Matematika II – přednáška 24

Co bude dneska?

Gaussova (Gaussova-Ostrogradského) věta.

Potenciální pole v E_3.

(Solenoidální pole a Stokesova věta.)

Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
(pro osobní potřeby).

Shrnutí co bylo minule

Plošný integrál skalární funkce (plošný integrál 2. druhu)

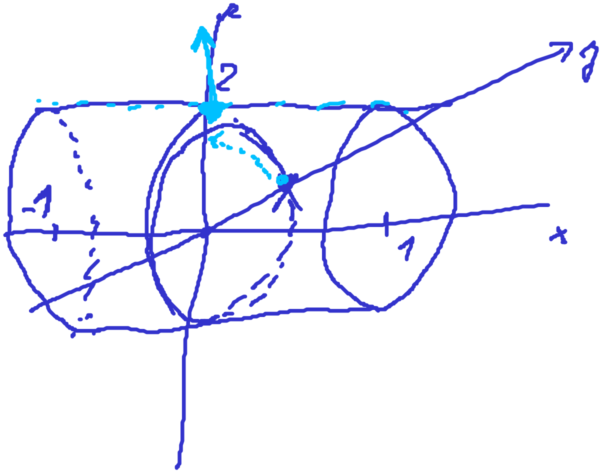
Tok vektorového pole plochou.

$\vec{f} = yz\cdot\vec{j} + z^2\cdot\vec{k}$, $G \equiv y^2+z^2=4$, $x \geq -1$, $x \leq 1$

$\vec{n}([0,0,2]) = \vec{k} = (0,0,1)$

Pr.:

$$\iint_G \vec{f}\cdot d\vec{p} = ?$$



$P(u,v)$:

$x = v$
$y = 2\cos u$
$z = 2\sin u$

B: $-1 \leq v \leq 1$
$0 \leq u \leq 2\pi$

Jordanova věta:

Nechť σ je uzavřená (p. č.) hladká jednoduchá plocha v E_3. Pak v E_3 existují dvě disjunktní oblasti G_1 a G_2, jejichž společná hranice je plocha σ a dále platí:

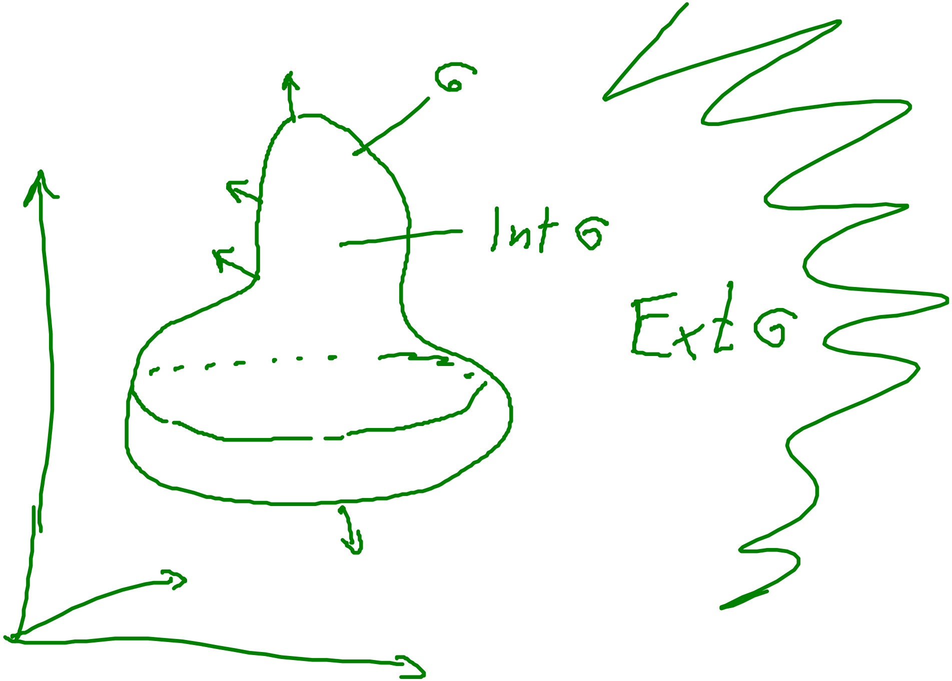
a) $E_3 = G_1 \cup \sigma \cup G_2$

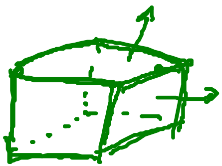
b) jedna z oblastí G_1, G_2 je omezená a druhá neomezená!

Tedy oblasti G_1 a G_2 nazýváme vnitřek a vnějšek plochy σ,

značíme $\mathrm{Int}\,\sigma$ a $\mathrm{Ext}\,\sigma$.

Def: Uzavřená plocha je orientovaná směrem ven, pokud její normálový vektor míří ve všech bodech plochy do vnějšku σ.





jednoduchá p.č. hladká plocha

Gaussova–Ostrogradského věta

Věta (Gaussova–Ostrogradského věta.). *Předpokládejme, že*

a) *vektorová funkce* $\mathbf{f}$ *má spojité parciální derivace v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$,

b) σ *je uzavřená po částech hladká plocha v* D, *orientovaná směrem vně a taková, že* $\operatorname{Int}\sigma \subset D$.

Pak platí:

$$\iint_\sigma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} \;=\; \iiint_{\operatorname{Int}\sigma} \operatorname{div}\mathbf{f} \;\; dx\, dy\, dz.$$

Nějaké příklady na tabuli.

Gaussova–Ostrogradského věta

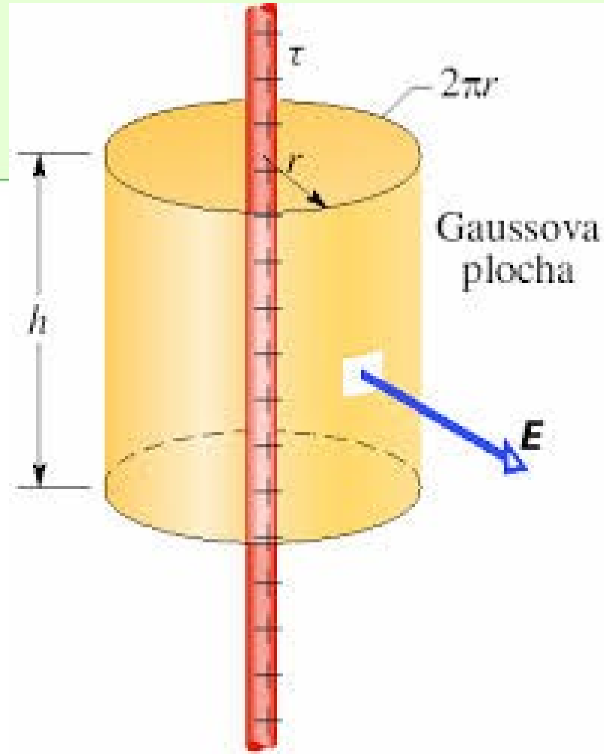
Věta (Gaussova–Ostrogradského věta.). *Předpokládejme, že*

a) *vektorová funkce* $\mathbf{f}$ *má spojité parciální derivace v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$,

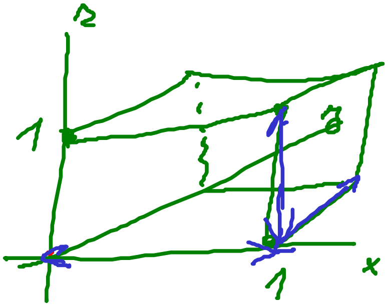
b) σ *je uzavřená po částech hladká plocha v* D, *orientovaná směrem vně a taková, že* $\operatorname{Int} \sigma \subset D$.

Pak platí:

$$\iint_\sigma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} = \iiint_{\operatorname{Int} \sigma} \operatorname{div} \mathbf{f} \; dx\, dy\, dz.$$



Př: Vypočítejte tok $\vec{f} = \overset{\overset{u}{\|}}{xz}\,\vec{i} + \overset{\overset{v}{\|}}{yz}\,\vec{j} + \overset{\overset{w}{\|}}{xz}\,\vec{k}$ skrze vn. povrch krychle $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ orient. vně.



$$\oiint_\sigma \vec{f} \cdot d\vec{p} \overset{GV}{=} + \iiint_{\operatorname{Int}\sigma} \operatorname{div} \vec{f}\, dx\,dy\,dz$$

a) spoj. PD $\vec{f}$: 2

b) σ je uzavřená! 1

Př.: Tok válcovou plochou $\sigma: y^2+z^2=4,\ -1\le x\le 1$

$\vec{f} = (0, yz, z^2)$

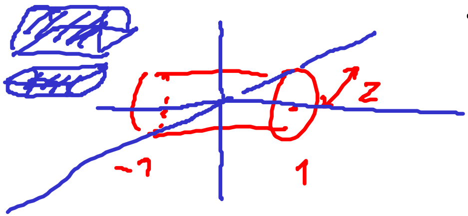
Ověření G-O.V.

a) $\dfrac{\partial U}{\partial x} = 0 \qquad \dfrac{\partial V}{\partial y} = z \qquad \dfrac{\partial W}{\partial z} = 2z$ spoj. v E_3

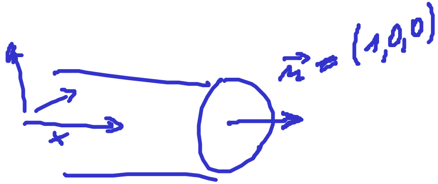
b) σ je orientovaná vně

je uzavřená! Tj. včetně boku, spodní a horní podstavy

$$\hookrightarrow \iint_\sigma \vec{f}\cdot d\vec{p} = +\iiint_{\mathrm{Int}\,\sigma} (\underbrace{0+z+2z}_{3z})\,dx\,dy\,dz = 2$$



ad ⇒ dopočítání toku $\vec{f}$ skrze spodní a horní podstavu válce



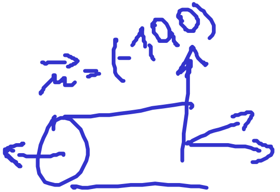
$P(u,v) =$

$x = 1$

$y = u$

$z = v$

$B = ?$



spodní podstavy

$$\iint_{\text{horní podstava}} \vec{f} \cdot \vec{n} \, dp =$$

$$= \iint_{\text{horní podstava}} \overbrace{(0, yz, z^2) \cdot (1,0,0)}\, dp = \underline{\underline{0}}$$

Potenciální pole - opakování

Definice (Potenciální vektorové pole.). Vektorové pole $\mathbf{f}$ v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$) nazýváme *potenciální pole* v D, jestliže existuje skalární pole ($=$ skalární funkce) φ v Dtakové, že

$$\mathbf{f} \;=\; \operatorname{grad} \varphi$$

v D. Skalární funkci φ nazýváme *potenciál* vektorového pole $\mathbf{f}$ v D.

Věta. *Je-li* $\mathbf{f}$ *potenciální a spojité vektorové pole v oblasti* D, φ *je potenciál* $\mathbf{f}$ *v* D *a* C *je křivka v* D, *pak*

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \;=\; \varphi(k.b.\,C) - \varphi(p.b.\,C).$$

Potenciální pole - opakování

Věta. $\mathbf{f}$ *je potenciální vektorové pole v oblasti* D $\Leftrightarrow$ *Křivkový integrál vektorové funkce* $\mathbf{f}$ *nezávisí v* D *na integrační cestě.*

Potenciální pole - opakování

Věta. $\mathbf{f}$ *je potenciální vektorové pole v oblasti* $D \quad \Leftrightarrow \quad$ *Křivkový integrál vektorové funkce* $\mathbf{f}$ *nezávisí v* D *na integrační cestě.*

Věta (Potenciální pole v $\mathbb{E}_2$ – postačující podmínka.). *Nechť*

a) D *je jednoduše souvislá oblast v* $\mathbb{E}_2$ *a*

b) $\mathbf{f} = (U, V)$ *je vektorové pole v* D*, jehož souřadnicové funkce* U *a* V *mají v* D *spojité parciální derivace a splňují podmínku:*

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{v } D.$$

Pak $\mathbf{f}$ *je potenciální pole v* D*.*

Potenciální pole v E_3.

Věta (Potenciální pole v $\mathbb{E}_3$ – nutná podmínka.). *Nechť je* $\mathbf{f}$ *potenciální pole v oblasti* $D \subset E_3$*, které má spojité parciální derivace v* D*. Pak*

$$\mathrm{rot}\;\mathbf{f} = \mathbf{0}$$

v oblasti D*.*

Definice (Jednoduše souvislá oblast v E_3.). Oblast $D \subset \mathbb{E}_3$ nazýváme *jednoduše souvislou*, pokud každou uzavřenou křivku C v D můžeme spojitě změnit (stáhnout) v bod v D, aniž přitom kdykoliv oblast D opustíme.

Potenciální pole v E_3.

Věta (Potenciální pole v $\mathbb{E}_3$ – postačující podmínka.). *Nechť*

a) *D je jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{E}_3$*

b) *$\mathbf{f}$ je vektorové pole v D, které má v D spojité parciální derivace a splňuje podmínku:*

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{v } D.$$

Pak $\mathbf{f}$ je potenciální pole v D.

Stokesova věta

Věta (Stokesova věta.). *Předpokládejme, že*

a) *vektorová funkce* $\mathbf{f}$ *má spojité parciální derivace v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_3$,

b) σ *je jednoduchá po částech hladká plocha v* D *jejímž okrajem je jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka* C,

c) *plocha* σ *je se svým okrajem* C *souhlasně orientovaná.*

Pak platí:

$$\iint_\sigma \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{p} \;=\; \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}.$$