# Matematika II – přednáška 2

## Co bude dneska?

Co to je izokřivka (izoplocha).

Operace s funkcemi, Složená funkce, Omezená funkce, Vektorová funkce.

Limita a spojitost funkce $n$-proměnných.

Parciální derivace a jejich geometrický význam.

Gradient funkce $n$-proměnných a jeho fyzikální a geometrický význam.

P.S.: Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
*http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php*
Slidy nenahrazují skripta ani zápisky ani účast na přednášce a jsou pouze pro osobní potřeby.

## Izokřivky, Izoplochy

Kromě grafu je jiná možnost jak vizualizovat funkci dvou (více) proměnných sestrojením soustavy (několika) izokřivek.

**Definice (izokřivka).** *Je-li* $y = f(x_1, x_2)$ *funkce dvou proměnných a* $k$ *je zvolené reálné číslo, pak množinu bodů* $\{[x_1, x_2] \in \mathbb{E}_2;\ f(x_1, x_2) = k\}$ *nazýváme izokřivkou funkce* $f$*. Rovnici* $f(x_1, x_2) = k$ *nazýváme rovnicí uvažované izokřivky.*

Př: $f(x, y) = x^2 + y^2$ pro $k_1 = 1,\ k_2 = 4,\ k_3 = 0,\ k_4 = -4.$

Příklady z praxe: vrstevnice (body na křivce se stejnou nadmořskou výškou), izobara (stejný tlak), izoterma (stejná teplota) ...

**Definice (izoplocha).** *Je-li* $f$ *funkce tří proměnných a* $k$ *je reálné číslo, pak množinu bodů* $\{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{E}_3;\ f(x_1, x_2, x_3) = k\}$ *nazýváme izoplochou funkce* $f$*.*

## Operace s funkcemi

Nechť $f$ a $g$ jsou funkce $n$ proměnných s definičními obory $D(f),\ D(g) \subset \mathbb{E}_n$.

*Součtem* funkcí rozumíme funkci $h$, kde $D(h) = D(f) \cap D(g)$ a která každému $X \in D(h)$ přiřazuje hodnotu

$$h(X) = f(X) + g(X)$$

Zkrácený zápis $h = f + g$.

*Rozdíl, součin, podíl* funkcí. Na tabuli.

## Složená funkce

na tabuli

$$y = f(x_1, x_2 \dots x_n)$$

$$x_1 = \varphi_1(t_1 \dots t_k)$$

$$\vdots$$

$$x_n = \varphi_n(t_1 \dots t_k)$$

$$y = T(x_1, x_2, x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ x_3 = \varphi_3(t) \end{cases}$$

$$y = f(\varphi_1(t_1 \dots t_k), \varphi_2(t_1 \dots t_k) \dots, \varphi_n(t_1 \dots t_k))$$

nm. $G \subset E_k$

$\varphi_1 \dots \varphi_n$ jsou def. na $G$

$\Rightarrow$ $f$ musí být def. $H\varphi_i(G)$, $i \in \{1, 2 \dots n\}$

## Složená funkce

na tabuli

## Omezená funkce

**Definice (omezená funkce).** *Nechť $f$ je funkce $n$ proměnných a $M \subset D(f)$. Funkci $f$ nazýváme shora omezenou na množině $M$, jestliže existuje reálné číslo $K$ takové, že $\forall\, X \in M \;:\; f(X) \leq K$.*

Obdobně, funkci $f$ nazýváme *zdola omezenou na množině $M$*, jestliže existuje reálné číslo $L$ takové, že $\forall\, X \in M \;:\; f(X) \geq L$.

Funkci $f$ nazýváme *omezenou na množině $M$*, je-li $f$ na $M$ omezená zdola i shora.

Je-li funkce $f$ shora omezená na celém svém definičním oboru $D(f)$, pak tuto funkci nazýváme krátce *shora omezenou*. Podobně i funkci *zdola omezenou* a *omezenou*.

## Vektorová funkce

vekt. pole

na tabuli

$$\vec{f}(\cancel{X}) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ \vdots \\ f_n(X) \end{pmatrix} = \text{vektor o } n \text{ složkách}$$

$$X \in E_m$$

$$f = \vec{f} = (f_1, f_2 \dots f_n)$$

- $\vec{f} = (\underline{\underline{U}}, \underline{\underline{V}}, \underline{\underline{W}}) = U\vec{i} + V\vec{j} + W\vec{k}$

- $\vec{f} = (U, V)$

## Limita a spojitost funkce $n$-proměnných

$\mathbb{R}^*$ je tzv. rozšířená množina reálných čísel.
Je to sjednocení množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ a dvouprvkové množiny $\{-\infty; +\infty\}$.

Nechť je $f$ funkce $n$ proměnných, $A \in \mathbb{E}_n$ a $a \in \mathbb{R}^*$.

Poznámka: Při limitě uvažujeme, že se bod $X$ blíží k nějakému bodu $A$. U funkce jedné proměnné to bylo po ose $x$. Zde budeme předpokládat blížení ”ze všech směrů”.

**Definice (limita funkce).** *Nechť $f$ je funkce $n$ proměnných, $A \in \mathbb{E}_n$, $a \in \mathbb{R}^*$ a existuje prstencové okolí $P(A)$, které je celé obsaženo v definičním oboru funkce $f$. Jestliže pro každou posloupnost bodů $\{X_k\}$ v $P(A)$ platí implikace*

$$X_k \to A \implies f(X_k) \to a,$$

*pak číslo $a$ nazýváme limitou funkce $f$ pro $X$ blížící se k $A$. Píšeme:*

$$\lim_{X \to A} f(X) = a \qquad \textit{nebo} \qquad \lim_{x_1 \to a_1, \ldots, x_n \to a_n} f(x_1, \ldots, x_n) = a.$$

$X_k \to A$ je kratší zápis toho, že $\lim\limits_{k \to +\infty} X_k = A$.

Podobně, $f(X_k) \to a$ znamená, že $\lim\limits_{k \to +\infty} f(X_k) = a$.

Pozn.: Funkce nemusí být definována v bodě $A$!

Př.: na tabuli. Věta na tabuli.

## Rozdíl, součet, součin a podíl limit.

Předpokládejme, že $\lim_{X \to A} f(X) = a$ a $\lim_{X \to A} g(X) = b$. Pak

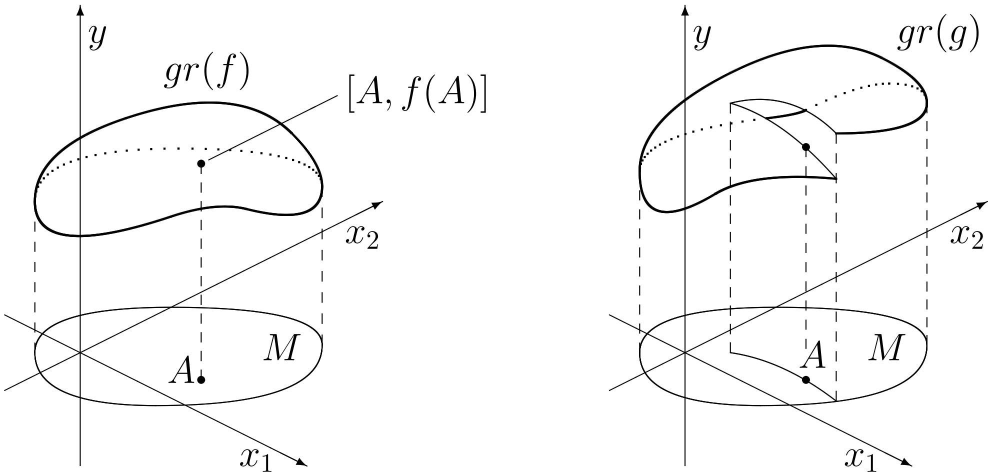
$$\lim_{X \to A} \left[ f(X) \pm g(X) \right] = a \pm b,$$

$$\lim_{X \to A} f(X) \cdot g(X) = a \cdot b,$$

$$\lim_{X \to A} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{a}{b}$$

za předpokladu, že výrazy na pravých stranách mají smysl.

## Spojitost funkce - myšlenka, Obrázek ze skript




Obr. 5a Obr. 5b

Funkce $f$ je spojitá v bodě $A$ a v množině $M$ zatímco funkce $g$ není spojitá tamtéž.

## Spojitost funkce v bodě/na množině - definice

**Definice (Spojitost funkce v bodě).** *Předpokládejme, že $f$ je funkce $n$ proměnných, $A \in D(f)$ a existuje okolí $U(A)$, které je celé obsaženo v $D(f)$. Říkáme, že funkce $f$ je spojitá v bodě $A$, jestliže pro každou posloupnost bodů $\{X_k\}$ v $U(A)$ platí implikace*

$$X_k \to A \implies f(X_k) \to f(A).$$

Vzhledem k definici limity platí: Funkce $f$ je spojitá v bodě $A$ právě tehdy, je-li

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A).$$

Poznámka: Spojitost vzhledem k množině se od zmíněné definice liší akorát tím, že jak bod $A$ tak posloupnost bodů $X_k$ musí být v množině $M$. (Tedy studujeme pouze chování v této množině).

Spojitost na množině $M$ potom znamená, že je funkce spojitá vzhledem k množině $M$ v každém bodě množiny $M$.

Věty(o spojitosti součtu ...): na tabuli.

## Parciální derivace - motivace

Derivace funkce jedné proměnné v bodě, je vlastně otázka toho jak rychle se hodnota funkce mění když tímto bodem procházím. Mám pouze jednu možnost, (zleva doprava podél osy x).

U funkce více proměnných mám nekonečně mnoho směrů ze kterých mohu bodem projít.

Budu procházet bodem $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \in \mathbb{E}_n$ ve směru souřadných os. Například ve směru osy $x_1$.
Pak má proměnný bod $X$ všechny souřadnice kromě první (osa $x_1$) stejné jako bod $A$. Tj. $X = [x_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$.
Tedy na funkci $f$ mohu hledět jako na funkci jedné proměnné a jako takovou ji i derivovat:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h},$$

jestliže tato limita existuje a je konečná. Derivaci nazýváme parciální derivace funkce $f$ podle $x_1$ v bodě $A$. Lze též psát $[a_1 + h, a_2, \ldots, a_n] = A + h\mathbf{e}_1$.

## Parciální derivace - definice

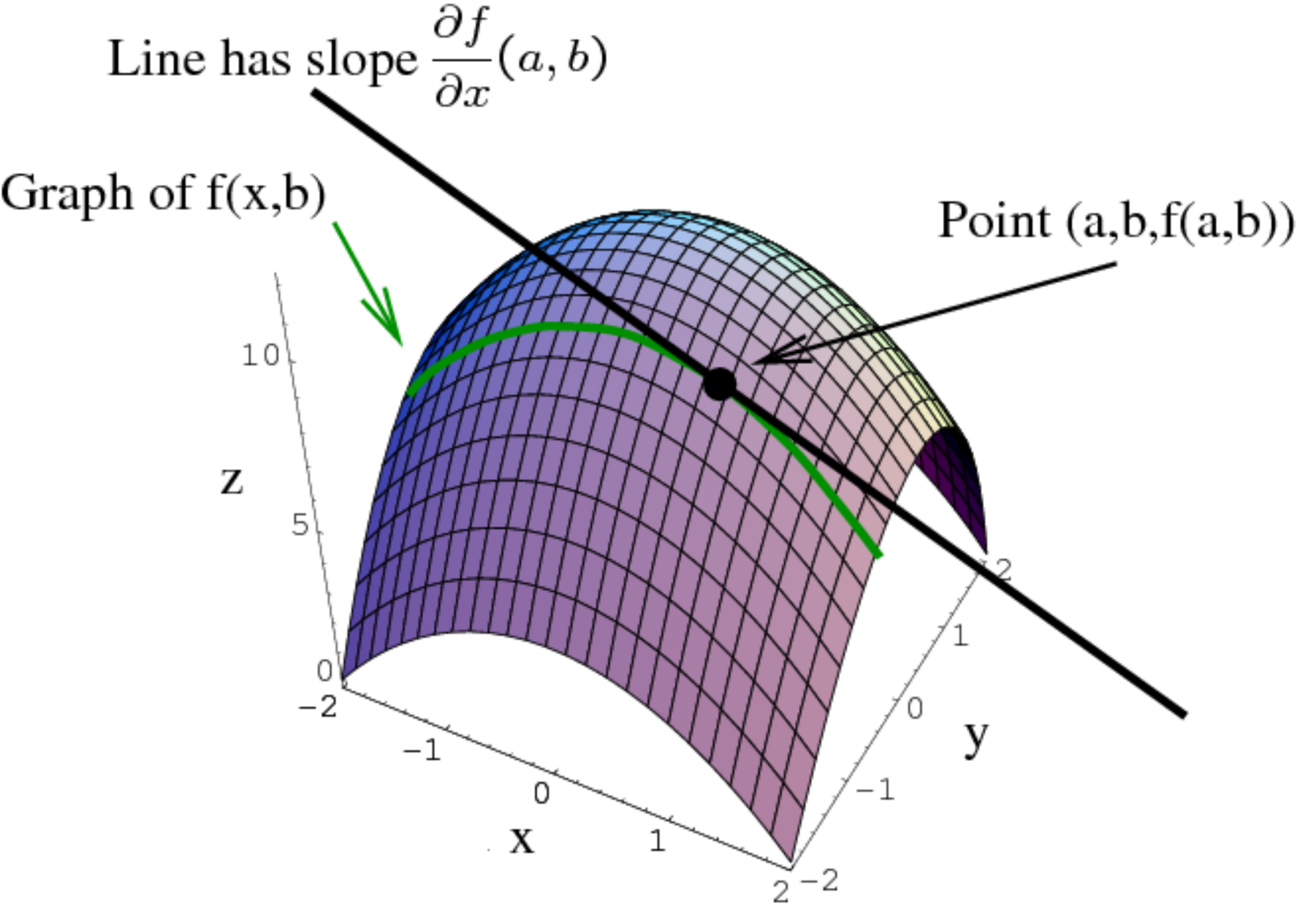
**Definice (parciální derivace v bodě $A$).** *Předpokládejme, že $y = f(x_1, \dots, x_n)$ je funkce $n$ proměnných, $A = [a_1, \dots, a_n] \in D(f)$, $i$ je jedno z čísel $1, \dots, n$ a $\mathbf{e}_i$ je jednotkový vektor v $\mathbb{E}_n$, orientovaný souhlasně se souřadnou osou $x_i$. Existuje-li konečná limita*

*(I.4.3)*
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(A+h\mathbf{e}_i) - f(A)}{h},$$

*pak její hodnotu nazýváme parciální derivací funkce $f$ podle proměnné $x_i$ v bodě $A$ a označujeme ji*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(A) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial y}{\partial x_i}(A).$$

Uvážit geometrický význam. Vlastnosti a výpočet na tabuli.


Line has slope $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$
Graph of f(x,b)
Point (a,b,f(a,b))
z
10
5
0
x
−2
−1
0
1
2
y
−2
−1
0
1
2

## Gradient funkce $f$ v bodě $A$

**Definice (gradient).** *Nechť je $f$ funkce $n$ proměnných $x_1, \ldots, x_n$ a $A$ je bod v $\mathbb{E}_n$, ve kterém má funkce $f$ parciální derivace podle všech proměnných. Gradientem funkce $f$ v bodě $A$ nazýváme vektor, který značíme $\operatorname{grad} f(A)$ a pro který platí:*

$$\operatorname{grad} f(A) \;=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A),\, \ldots,\, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)\right).$$

jiné označení

$$\operatorname{grad} f(A) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)\,\mathbf{e}_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)\,\mathbf{e}_n\,.$$

Význam a příklad na tabuli.