Matematika II – přednáška 3

Co bude dneska?

Připomenutí plus příklad spojité složené funkce více proměnných, parciální derivace, vlastnosti parciální derivace.

Parciální derivace a spojitost funkce více proměnných.

Diferenciál funkce. Parciální derivace složené funkce.

P.S.: Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
Slidy nenahrazují skripta ani zápisky ani účast na přednášce a jsou pouze pro osobní potřeby.

Spojité složené funkce více proměnných - příklad

Najděme kde všude je spojitá funkce:

$$h(x, y, z) = \sqrt{x + y} + \sin(z + x)$$

Parciální derivace - definice, připomenutí

Definice (parciální derivace v bodě A). *Předpokládejme, že $y = f(x_1, \dots, x_n)$ je funkce n proměnných, $A = [a_1, \dots, a_n] \in D(f)$, i je jedno z čísel $1, \dots, n$ a $\mathbf{e}_i$ je jednotkový vektor v $\mathbb{E}_n$, orientovaný souhlasně se souřadnou osou x_i. Existuje-li konečná limita*

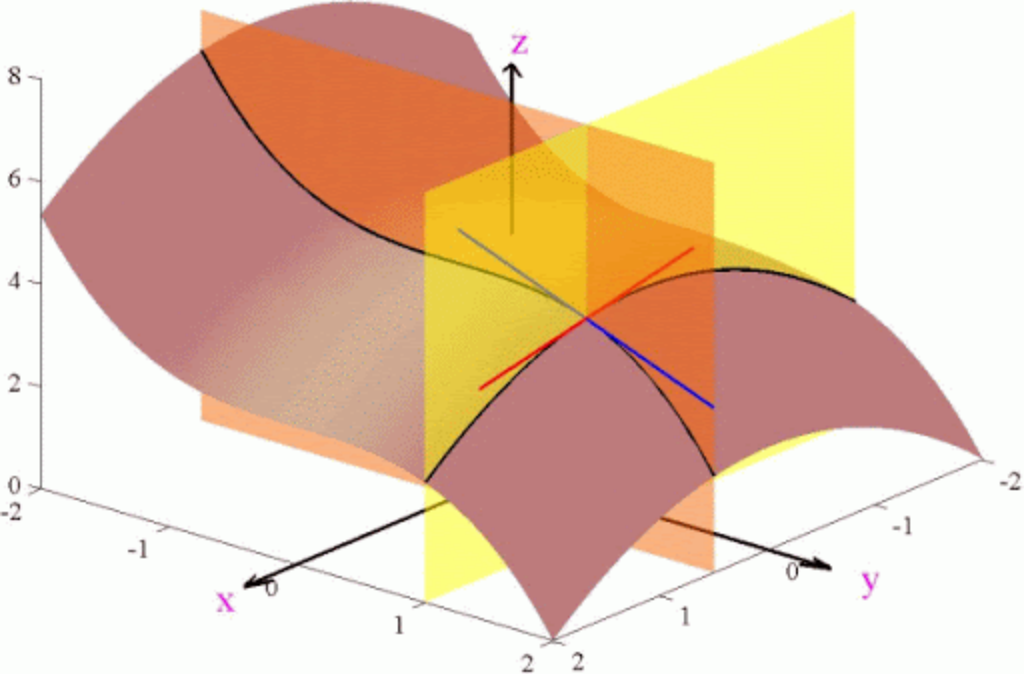
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(A + h\mathbf{e}_i) - f(A)}{h},$$

pak její hodnotu nazýváme parciální derivací funkce f podle proměnné x_i v bodě A a označujeme ji

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(A) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial y}{\partial x_i}(A).$$

Příklady PD.

PD jako funkce. Jak je to s definičním oborem?



z
8
6
4
2
0
-2
-1
0
1
2
x
2
1
0
-1
-2
y

Parciální derivace - definice, připomenutí

Příklady PD.

PD jako funkce. Jak je to s definičním oborem?

Vždy platí

$$D(\frac{\partial f}{\partial x_i}) \subseteq D(f))$$

Parciální derivace a spojitost funkce více proměnných

U funkce jedné proměnné platí, že z existence derivace v bodě x_0 plyne spojitost funkce v tomto bodě a existence tečny. (Totéž platí pro interval)

Je totéž pravda pro funkci více proměnných?
Tedy: Plyne z existence parciálních derivací funkce více proměnných v bodě $A \in \mathbb{E}_n$ spojitost této funkce v bodě A?

Příklad na tabuli.

Parciální derivace a spojitost funkce více proměnných

U funkce jedné proměnné platí, že z existence derivace v bodě x_0 plyne spojitost funkce v tomto bodě a existence tečny. (Totéž platí pro interval)

Je totéž pravda pro funkci více proměnných?
Tedy: Plyne z existence parciálních derivací funkce více proměnných v bodě $A \in \mathbb{E}_n$ spojitost této funkce v bodě A?

NE.

1) *Co zajišťuje u funkce více proměnných spojitost?*
2) *Co zajišťuje u funkce více proměnných existenci tečné roviny a jaká je její rovnice?*

Diferencovatelnost funkce

U funkce jedné proměnné, se se funkce $y = f(x)$ mající derivaci v bodě a nazývá diferencovatelná v bodě a.

U funkce více proměnných je k tomu potřeba něco více.

Tečná rovina, diferencovatelná funkce – motivace.

Nechť $y = f(x_1, x_2)$ je funkce dvou proměnných, jejímž grafem je plocha σ, a $A = [a_1, a_2]$ je bod v $D(f)$.

P je bod v $\mathbb{E}_3$, jehož souřadnice jsou $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ a $y = f(a_1, a_2)$. Tj. $P = [a_1,\ a_2,\ f(a_1, a_2)] = [A, f(A)] \in \sigma$.

Přirozené požadavky na tečnou rovinu k ploše σ v bodě P jsou:

a) Tečná rovina prochází bodem P.

b) Tečná rovina není rovnoběžná s osou y.

c) Plocha σ se k tečné rovině v bodě P "přimyká".

Rovin splňující první dva požadavky je nekonečně mnoho. Co tedy znamená třetí podmínka. Jak ji matematicky zapsat?

Jsou to grafy všech možných lineárních funkcí $y = L(X)$, kde $X = [x_1, x_2]$,

$$L(X) = f(A) + k_1 \cdot (x_1 - a_1) + k_2 \cdot (x_2 - a_2)$$

a k_1 a k_2 jsou reálné koeficienty.

Rovin splňující první dva požadavky je nekonečně mnoho. Co tedy znamená třetí podmínka. Jak ji matematicky zapsat?

Jsou to grafy všech možných lineárních funkcí $y = L(X)$, kde $X = [x_1, x_2]$,

$$L(X) = f(A) + k_1 \cdot (x_1 - a_1) + k_2 \cdot (x_2 - a_2)$$

a k_1 a k_2 jsou reálné koeficienty.

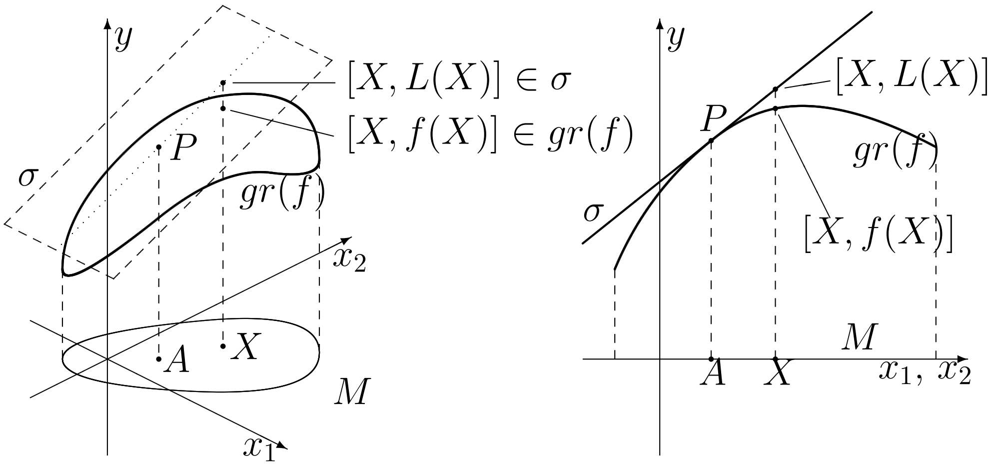
Body na tečné rovině mají souřadnice $[X,\ L(X)]$. Body na ploše σ mají souřadnice $[X,\ f(X)]$. Tyto body se liší ve třetí souřadnici. Rozdíl třetích souřadnic je $f(X) - L(X)$.

Zajímá nás TR v bodě P.

Blížíme-li se k bodu P, pro první dvě souřadnice bodů platí $x_1 \to a_1$ a $x_2 \to a_2$.
Pak $X \to A$, tj. $\|X - A\| \to 0$.

Chceme, aby v blízkosti bodu P splývala tečná rovina s grafem funkce a to rychleji než se blíží bod X k bodu A (rychleji než $\|X - A\|$). Tj. aby

$$\lim_{X \to A} \frac{f(X) - L(X)}{\|X - A\|} = 0.$$



Obrázek ze skript

Shrnutí: Rovina $y = L(X)$, kde

$$L(X) \; = \; f(A) \; + \; k_1 \cdot (x_1 - a_1) \; + \; k_2 \cdot (x_2 - a_2)$$

splňuje požadavky a), b) a c) a můžeme ji tudíž nazvat tečnou rovinou k ploše σ v bodě P, jestliže je splněna podmínka

$$\lim_{X \to A} \frac{f(X) - L(X)}{\|X - A\|} \; = \; 0.$$

Lze dokázat, že pak jsou koeficienty k_1 a k_2 jednoznačně určeny a tečná rovina je tudíž také jednoznačně určená.

Vše lze zobecnit pro funkci n-proměnných, pak $L(X)$ má tvar

$$L(X) \; = \; f(A) \; + \; k_1 \cdot (x_1 - a_1) \; + \; \ldots \; + \; k_n \cdot (x_n - a_n).$$

Definice (diferencovatelná funkce). *Předpokládejme, že* $y = f(X) = f(x_1, \dots, x_n)$ *je funkce* n *proměnných a* $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{E}_n$. *O funkci* f *říkáme, že je* *diferencovatelná v bodě* A, *jestliže existuje lineární funkce* $L(X)$ *taková, že*

$$\lim_{X \to A} \frac{f(X) - L(X)}{\|X - A\|} = 0.$$

O funkci f *říkáme, že je* *diferencovatelná v množině* $M \subset \mathbb{E}_n$, *jestliže je diferencovatelná v každém bodě množiny* M.

Věta. *Je-li funkce* f *(*n *proměnných) diferencovatelná v bodě* $A \in \mathbb{E}_n$, *pak je v bodě* A *spojitá.*

Důkaz na tabuli

Věta. *Je-li funkce f (n proměnných) diferencovatelná v bodě $A \in \mathbb{E}_n$, pak má v bodě A parciální derivace podle všech proměnných.*

Věta. *Je-li funkce f (n proměnných) diferencovatelná v bodě $A \in \mathbb{E}_n$, pak má v bodě A parciální derivace podle všech proměnných.*

Diferenciál funkce.

Chci nahradit funkci n-proměnných lineární funkcí (u funkce 2 proměnných plochou). Nejlepší aproximací je zřejmě ta jejímž grafem je tečná rovina.

Pro $X = [x_1, \dots, x_n]$ "blízko" A tedy přibližně platí (pro $n = 2$)

$$L(X) = f(A) + k_1 \cdot (x_1 - a_1) + k_2 \cdot (x_2 - a_2).$$

toto lze přibližně zapsat jako $f(X) \doteq f(A) + \mathrm{d}f$, kde

$$\mathrm{d}f = k_1 \cdot (x_1 - a_1) + k_2 \cdot (x_2 - a_2).$$

Jak konkrétně vypočítat hodnotu k_i bude příště.

Jak poznáme, že funkce je diferencovatelná.

Věta. *Předpokládejme, že f je funkce n proměnných.*

a) Má-li funkce f spojité parciální derivace podle všech proměnných v bodě $A \in \mathbb{E}_n$, pak je diferencovatelná v bodě A.

b) Je-li M otevřená množina v $\mathbb{E}_n$ a funkce f má spojité parciální derivace podle všech proměnných v množině M, pak je diferencovatelná v množině M.

Příklad. $f(x, y) = 2 \ln x - y^2$

Parciální derivace složené funkce.

Na tabuli.

$$y = f\big(\underset{\underset{x_1}{\parallel}}{\varphi_1}(t_1 \dots t_k),\ \underset{\underset{x_2}{\parallel}}{\varphi_2}(t_1 \dots t_k),\ \dots\ \underset{\underset{x_n}{\parallel}}{\varphi_n}(t_1 \dots t_k)\big)$$

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial t_j} = ?}$$

f byla diferenc. v $X = [x_1 \dots x_n]$, vnitřní f-ce $\varphi_1 \dots \varphi_n$ jsou dif. v $T = [t_1 \dots t_k]$ a platí!

$X = [\varphi_1(T), \dots \varphi_n(T)]$.

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial t_j}} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_j} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_j} \to \frac{\partial \varphi_1(t_1 \dots t_k)}{\partial t_j}, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial t_j} \to \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_j}$$