Matematika II – přednáška 4

Co bude dneska?

Rovnice tečné roviny a normály. Diferenciál funkce více proměnných.

Přibližný výpočet hodnoty funkce pomocí diferenciálu a/nebo tečné roviny.

Derivace ve směru. (tj. i jiný směr než jen ve směru os).

P.S.: Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
Slidy nenahrazují skripta ani zápisky ani účast na přednášce a jsou pouze pro osobní potřeby.

Tečná rovina ke grafu funkce dvou proměnných

Shrnutí: Rovina $y = L(X)$, kde

$$L(X) = f(A) + k_1 \cdot (x_1 - a_1) + k_2 \cdot (x_2 - a_2)$$

splňuje požadavky a), b) a c) a můžeme ji tudíž nazvat tečnou rovinou k ploše σ v bodě P, jestliže je splněna podmínka

$$\lim_{X \to A} \frac{f(X) - L(X)}{\|X - A\|} = 0.$$

Definice (tečná rovina). *Předpokládejme, že funkce $y = f(x_1, x_2)$, dvou proměnných, je diferencovatelná v bodě $A = [a_1, a_2] \in \mathbb{E}_2$. Tečnou rovinou ke grafu funkce f v bodě $P = [A, f(A)] \in \mathbb{E}_3$ nazýváme rovinu o rovnici*

$$y = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot (x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) \cdot (x_2 - a_2).$$

Tečná rovina ke grafu funkce dvou či více proměnných

Definice (tečná rovina). *Předpokládejme, že funkce $y = f(x_1, x_2)$, dvou proměnných, je diferencovatelná v bodě $A = [a_1, a_2] \in \mathbb{E}_2$. Tečnou rovinou ke grafu funkce f v bodě $P = [A, f(A)] \in \mathbb{E}_3$ nazýváme rovinu o rovnici*

$$y \;=\; f(A) \;+\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)\cdot(x_1 - a_1) \;+\; \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)\cdot(x_2 - a_2).$$

Definici můžeme snadno zobecnit pro funkci n proměnných:

Předpokládejme, že funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$, n proměnných, je diferencovatelná v bodě $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{E}_n$. *Tečnou rovinou* ke grafu funkce f v bodě $P = [A, f(A)] \in \mathbb{E}_{n+1}$ nazýváme množinu bodů v $\mathbb{E}_{n+1}$, vyhovujících rovnici

$$y \;=\; f(A) \;+\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)\cdot(x_1 - a_1) \;+\; \dots \;+\; \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)\cdot(x_n - a_n).$$

Někdy hovoříme o tečné nadrovině. (Je to v $\mathbb{E}_{n+1}$). Příklad.

Normála ke grafu funkce dvou proměnných

Definice (normála). *Předpokládejme, že funkce* $y = f(x_1, x_2)$ *je diferencovatelná v bodě* $A = [a_1, a_2] \in \mathbb{E}_2$. *Normálou grafu funkce* f *v bodě* $P = [A, f(A)] \in \mathbb{E}_3$ *nazýváme přímku v* $\mathbb{E}_3$, *která prochází bodem* P *a je v tomto bodě kolmá k tečné rovině. Směrovým vektorem normály je vektor*

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \, \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), \, -1 \right).$$

Parametrické rovnice normály jsou

$$x_1 = a_1 + t \, \frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \quad x_2 = a_2 + t \, \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), \quad y = f(A) - t; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Diferenciál funkce.

Chci nahradit funkci n-proměnných lineární funkcí (u funkce 2 proměnných plochou). Nejlepší aproximací je zřejmě ta jejímž grafem je tečná rovina.
Pro $X = [x_1, \ldots, x_n]$ "blízko" A tedy přibližně platí (pro $n = 2$)

$$L(X) = f(A) + k_1 \cdot (x_1 - a_1) + k_2 \cdot (x_2 - a_2).$$

toto lze přibližně zapsat jako $f(X) \doteq f(A) + df$, kde

$$df = k_1 \cdot (x_1 - a_1) + k_2 \cdot (x_2 - a_2).$$

Jak konkrétně vypočítat hodnotu k_i bude příště.

Diferenciál funkce.

Měli jsme

$$f(X) \doteq f(A) + \mathrm{d}f,$$

kde

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot (x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) \cdot (x_2 - a_2).$$

Příklad.

Derivace ve směru

Připomenutí, gradient funkce f v bodě $A \in D(f) \subseteq (\in \mathbb{E}_n)$ je vektor

$$\operatorname{grad} f(A) \; = \; \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \, \ldots, \, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \right).$$

Parciální derivace říkají, jak rychle se funkce mění v bodu A, když jím nějaký proměnný bod X prochází ve směru shodným s orientací osy x_i.

Nyní nás bude zajímat změna hodnoty $f(X)$, když bude bod X procházet bodem A nějakým jiným (obecným) směrem.

Definice (derivace ve směru). *Předpokládejme, že f je funkce n-proměnných, $A \in D(f)$ a $\mathbf{u}^0$ je jednotkový vektor v $\mathbb{E}_n$. Existuje-li konečná limita*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(A + h\mathbf{u}^0) - f(A)}{h},$$

pak její hodnotu nazýváme derivací funkce f ve směru $\mathbf{u}^0$ v bodě A (nebo také směrovou derivací f v bodě A podle $\mathbf{u}^0$) a označujeme ji

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}^0}(A).$$

Není nutné omezovat se na směry definované jednotkovým vektorem. Je-li $\mathbf{u}$ nenulový vektor v $\mathbb{E}_n$, pak jednotkový vektor ve směru $\mathbf{u}$ dostaneme jako $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$.

Derivaci f v bodě A ve směru $\mathbf{u}$ definujeme rovností

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(A) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}^0}(A).$$

Výpočet derivace funkce f ve směru $\mathbf{u}$

Je-li f diferencovatelná funkce v bodě A a $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ je nenulový vektor v $\mathbb{E}_n$, derivace funkce f ve směru $\mathbf{u}$ v bodě A existuje a

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(A) = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot u_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \cdot u_n \right).$$

Tento vzorec lze přepsat jako

Věta. *Předpokládejme, že funkce f (n proměnných) je diferencovatelná v bodě $A \in \mathbb{E}_n$. Předpokládejme dále, že $\mathbf{u}$ je nenulový vektor v $\mathbb{E}_n$. Pak derivace funkce f v bodě A ve směru $\mathbf{u}$ existuje a je možné ji vypočítat pomocí formule*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(A) = \frac{\operatorname{grad} f(A) \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \qquad \left(= \operatorname{grad} f(A) \cdot \mathbf{u}^0, \quad \textit{kde } \mathbf{u}^0 = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right).$$

Příklady.

Gradient a derivace ve směru

Je skutečně gradient směrem, ve kterém funkce nejrychleji roste?

Na tabuli.

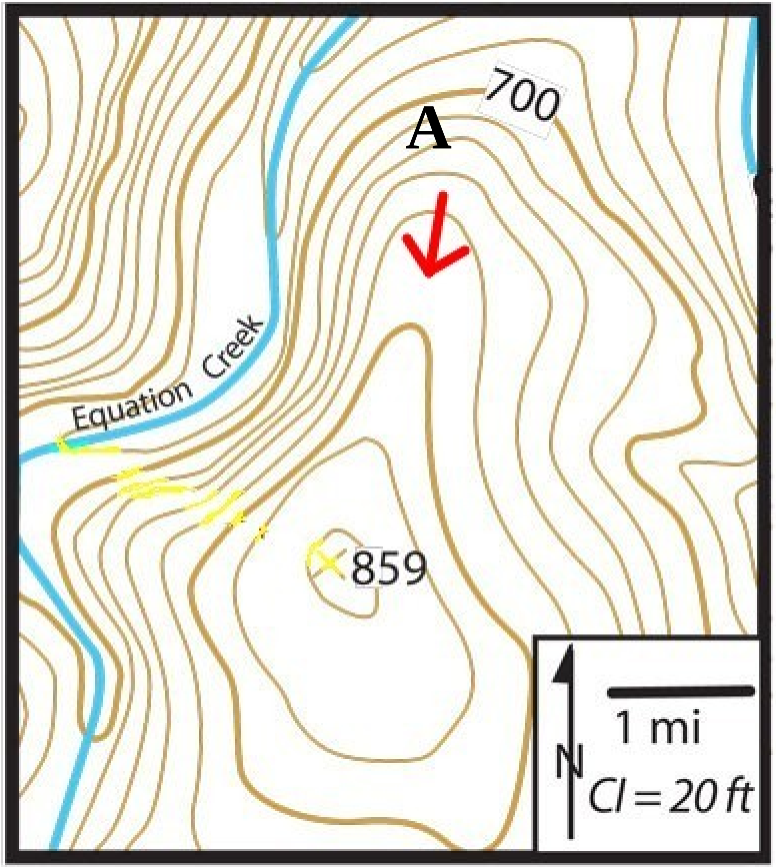
Gradient a derivace ve směru

Je skutečně gradient směrem, ve kterém funkce nejrychleji roste?

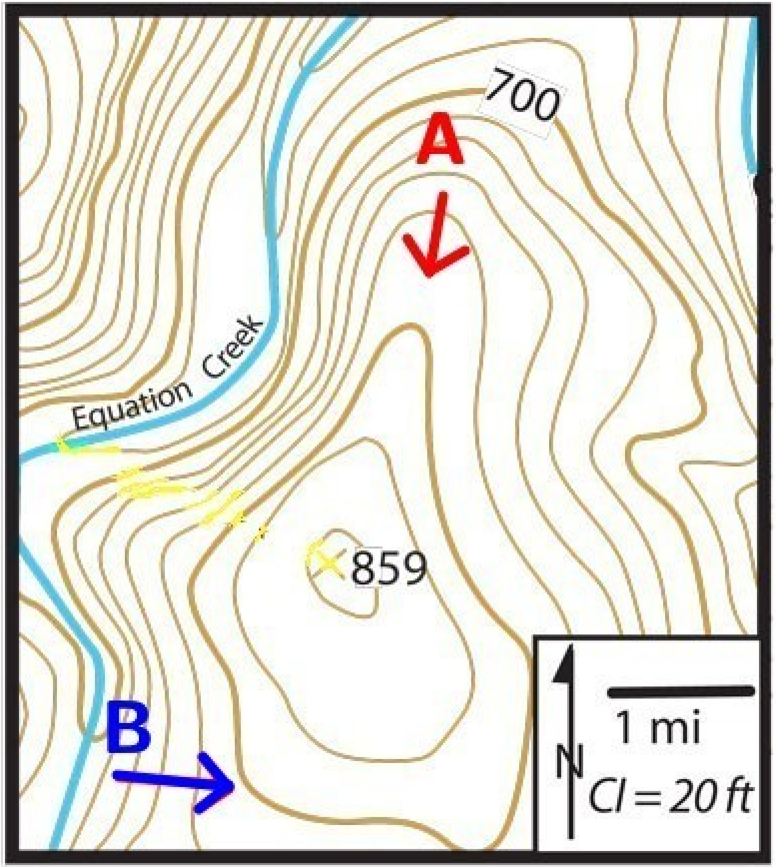
Na tabuli.

Tečna a normála k izokřivce, tečná rovina a normála k izoploše

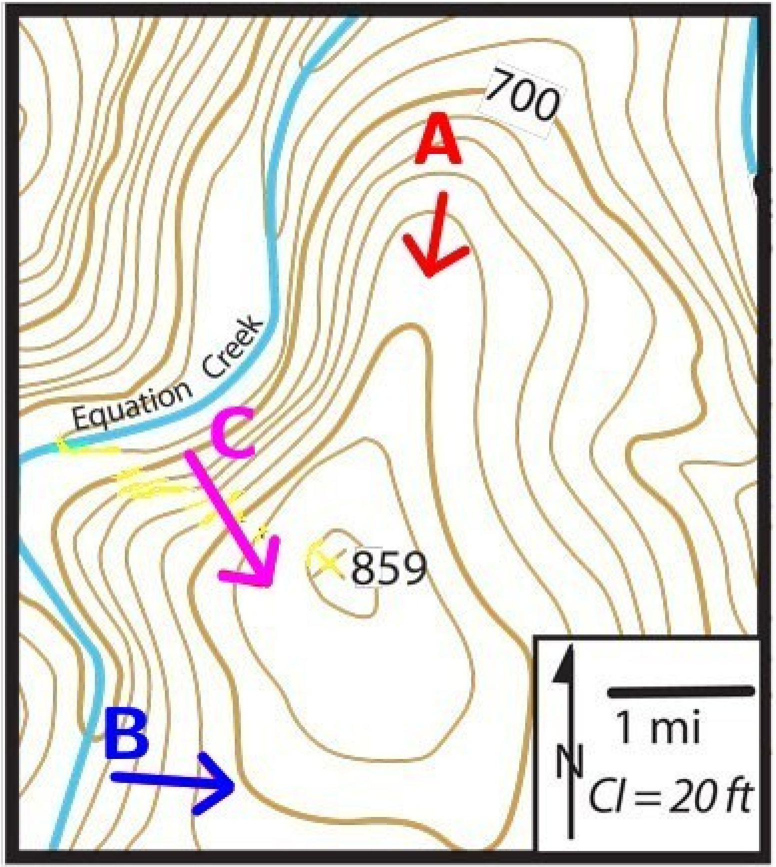
Na tabuli.



Topographic Map of part Math State Park



Topographic Map of part Math State Park



Topographic Map of part Math State Park

Příklady (zkouškové)

1. a) Napište (a zdůvodněte), ve kterých bodech $[x, y] \in \mathbb{E}_2$ je funkce $f(x, y) = \sqrt{x + y^2 - 4}$ diferencovatelná. Množinu těchto bodů načrtněte.

   b) Napište gradient a diferenciál funkce f v bodě $A = [4, -2]$.

   c) Pomocí diferenciálu nebo pomocí rovnice tečné roviny vypočítejte přibližnou hodnotu funkce f v bodě $[4.2, -1.8]$.

   d) Určete jednotkový vektor $\vec{s}$, v jehož směru funkce f v bodě A nejrychleji roste. Vypočítejte derivaci funkce f v bodě A v tomto směru.

Příklady (zkouškové)

2. a) Vyjádřete a načrtněte množinu, ve které je funkce funkce $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$ diferencovatelná. Zdůvodněte !

   b) Určete gradient funkce f v bodě $A = [1,\ -2]$.

   c) Vypočítejte derivaci funkce f v bodě $A = [1,\ -2]$ ve směru $\vec{s} = (2,\ 1)$. Udává tento vektor $\vec{s}$ směr, ve kterém funkce f v bodě A nejrychleji klesá? Odpověď zdůvodněte!

   d) Napište rovnici izokřivky této funkce, tj. rovnici $f(x, y) = k$ pro $k = 0$ a izokřivku načrtněte.