# Matematika II – přednáška 5

## Co bude dneska?

Shrnutí toho co bylo.

Parciální derivace vyšších řádů.

Lokální extrémy funkcí dvou proměnných.

Nutná podmínka, postačující podmínky pro existenci extrému.

P.S.: Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
*http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php*
Slidy nenahrazují skripta ani zápisky ani účast na přednášce a jsou pouze pro osobní potřeby.

*Funkce $f$ má spojité parciální derivace podle všech proměnných v bodě $A$.*

$$\Downarrow$$

*$f$ je diferencovatelná v bodě $A$.* $\Longrightarrow$

1. *$f$ je spojitá v bodě $A$.*
2. *Existuje tečná rovina ke grafu funkce $f$ v bodě $A$.*
3. *Existuje diferenciál funkce $f$ v bodě $A$.*
4. *Derivace $f$ ve směru daném nenulovým vektorem $\mathbf{u}$ existuje.*
5. *Gradient funkce $f$ v bodě $A$ má geometrický a fyzikální význam, popsaný dříve.*

## Parciální derivace vyšších řádů

**Definice (parciální derivace vyšších řádů).** *Předpokládejme, že $f$ je funkce $n$ proměnných $x_1, \dots, x_n$ a $i \in \{1; \dots; n\}$. Připomeňme, že funkce $\partial f / \partial x_i$ je parciální derivace $f$ podle $x_i$.*

*Je-li $j \in \{1; \dots; n\}$, pak parciální derivaci podle $x_j$ funkce $\partial f / \partial x_i$ nazýváme parciální derivací 2. řádu (nebo druhou parciální derivací) funkce $f$ podle $x_j$ a $x_i$.*

Označujeme ji

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i} \quad \left( \text{případně} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad \text{pokud } j = i \right).$$

Pro definiční obory platí inkluze $\quad D\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}\right) \subset D\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right) \subset D(f).$

Parciální derivace vyšších (třetího, čtvrtého a dalších) řádů jsou definovány obdobně.

Příklady na tabuli.

## Záměna pořadí parciálních derivací

V minulém příkladu vyšlo, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,.$$

Je to tak vždy?

## Záměna pořadí parciálních derivací

V minulém příkladu vyšlo, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,.$$

Je to tak vždy?

Ne vždy, ale skoro vždy, když je funkce ”rozumná”.

Př.

**Věta (o záměně pořadí parciálních derivací).** *Předpokládejme, že $f$ je funkce $n$ proměnných $x_1, \ldots, x_n$ a $i, j \in \{1; \ldots; n\}$. Jestliže obě druhé parciální derivace $\partial^2 f / \partial x_i \, \partial x_j$ a $\partial^2 f / \partial x_j \, \partial x_i$ existují v bodě $X = [x_1, \ldots, x_n]$ a alespoň jedna z nich je v bodě $X$ spojitá, pak*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}(X).$$

Příklady na PD na tabuli.

## Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

**Definice (lokální extrémy).** *Nechť* $f$ *je funkce* $n$ *proměnných a* $A \in D(f)$. *Říkáme, že funkce* $f$ *má v bodě* $A$ *lokální maximum, existuje-li prstencové okolí* $P(A) \subset D(f)$ *takové, že* $\forall X \in P(A):\ f(X) \leq f(A)$.

*Podobně, funkce* $f$ *má v bodě* $A$ *lokální minimum, existuje-li prstencové okolí* $P(A)$ *takové, že* $\forall X \in P(A):\ f(X) \geq f(A)$.

*Lokální maximum a lokální minimum se souhrnně nazývají lokální extrémy.*

## Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

**Definice (lokální extrémy).** *Nechť $f$ je funkce $n$ proměnných a $A \in D(f)$. Říkáme, že funkce $f$ má v bodě $A$ lokální maximum, existuje-li prstencové okolí $P(A) \subset D(f)$ takové, že $\forall X \in P(A): \; f(X) \leq f(A)$.*
*Podobně, funkce $f$ má v bodě $A$ lokální minimum, existuje-li prstencové okolí $P(A)$ takové, že $\forall X \in P(A): \; f(X) \geq f(A)$.*
*Lokální maximum a lokální minimum se souhrnně nazývají lokální extrémy.*

Změníme-li nerovnosti v definici lokálních extrémů na ostré, získáme definici tzv. *ostrých lokálních extrémů*:

Říkáme, že funkce $f$ má v bodě $A$ *ostré lokální maximum* (respektive *ostré lokální minimum*), existuje-li prstencové okolí $P(A) \subset D(f)$ takové, že $\forall X \in P(A): \; f(X) < f(A)$ (respektive $\forall X \in P(A): \; f(X) > f(A)$).

## Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému

**Věta (nutná podmínka pro existenci lokálního extrému).** *Nechť funkce $f$, $n$ proměnných, je diferencovatelná v bodě $A$. Má-li $f$ v bodě $A$ lokální extrém, pak*

$$\operatorname{grad} f(A) = \mathbf{0}.$$

## Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému

**Věta (nutná podmínka pro existenci lokálního extrému).** *Nechť funkce $f$, $n$ proměnných, je diferencovatelná v bodě $A$. Má-li $f$ v bodě $A$ lokální extrém, pak*

$$\operatorname{grad} f(A) = \mathbf{0}.$$

Poznámka: Všimněte si, že tato podmínka není omezená na funkci dvou proměnných. Je to tedy bod, kde je tečná rovina (nadrovina) "vodorovná".

**Definice (kritický bod).** *Uvažujeme-li i funkce, které nejsou v bodě $A$ diferencovatelné, můžeme konstatovat: Funkce $f$ ($n$ proměnných) může mít v bodě $A \in \mathbb{E}_n$ lokální extrém pouze v případě, že*

i) *$f$ je diferencovatelná v bodě $A$ a* $\operatorname{grad} f(A) = \mathbf{0}$,

ii) *nebo $f$ není diferencovatelná v bodě $A$.*

Bod $A$, který vyhovuje podmínce i) nebo podmínce ii), se nazývá *kritický bod* funkce $f$. (Často se také používá název *stacionární bod*.)

Př: Hledáme kritické body funkce: $f(x, y) = x^3 + y^3 + \frac{9}{2}x^2 - 3y - 12x$.

Označme

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}(A) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A) \end{pmatrix}.$$

A dále

$$\Delta_1(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A), \qquad \Delta_2(A) = \det \mathcal{M} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}(A) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A) \end{vmatrix}.$$

**Věta (postačující podmínky pro lokální extrémy).** *Předpokládejme, že* $y = f(x_1, x_2)$ *je funkce dvou proměnných, která má první i druhé parciální derivace spojité v bodě* $A$ *a* $\operatorname{grad} f(A) = \mathbf{0}$*. Pak platí:*

*a) Jestliže* $\Delta_1(A) > 0$ *a* $\Delta_2(A) > 0$*, má funkce* $f$ *v bodě* $A$ *ostré lokální minimum.*

*b) Jestliže* $\Delta_1(A) < 0$ *a* $\Delta_2(A) > 0$*, má funkce* $f$ *v bodě* $A$ *ostré lokální maximum.*

*c) Je-li* $\Delta_2(A) < 0$*, pak* $f$ *nemá v bodě* $A$ *lokální extrém.*

Pokračování předchozího příkladu.

Pozn.: -”, vyšší dimenze.