Matematika II – přednáška 6

Co bude dneska?

Lokální extrémy funkcí dvou proměnných - připomenutí.

Globální (absolutní) extrémy.

Vázané extrémy (Lagrangeovy multiplikátory).

P.S.: Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
(pro osobní potřeby, nenahrazuji skripta).

Označme

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(A) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A) \end{pmatrix}.$$

A dále

$$\Delta_1(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A), \qquad \Delta_2(A) = \det \mathcal{M} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(A) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1}(A), & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A) \end{vmatrix}.$$

Věta (postačující podmínky pro lokální extrémy). *Předpokládejme, že* $y = f(x_1, x_2)$ *je funkce dvou proměnných, která má první i druhé parciální derivace spojité v bodě* A *a* $\operatorname{grad} f(A) = \mathbf{0}$. *Pak platí:*

a) Jestliže $\Delta_1(A) > 0$ *a* $\Delta_2(A) > 0$, *má funkce* f *v bodě* A *ostré lokální minimum.*

b) Jestliže $\Delta_1(A) < 0$ *a* $\Delta_2(A) > 0$, *má funkce* f *v bodě* A *ostré lokální maximum.*

c) Je-li $\Delta_2(A) < 0$, *pak* f *nemá v bodě* A *lokální extrém.*

Pokračování předchozího příkladu.

Pozn.: -”, vyšší dimenze.

Definice (maximum a minimum funkce na množině). *Nechť* f *je funkce* n *proměnných a* $M \subset D(f)$. *Říkáme, že* f *nabývá v bodě* $A \in M$ *svého* *maxima na množině* M, *jestliže* $\forall\, X \in M \;:\; f(X) \leq f(A)$. *Píšeme:* $f(A) = \max\limits_{X \in M} f(X)$ *nebo jenom* $f(A) = \max\limits_{M} f$, *respektive* $f(A) = \max_M f$.

Maximum funkce f *na celém svém definičním oboru značíme krátce* $\max f$.

Podobně můžeme definovat i *minimum* *funkce* f *na množině* M. *Značíme je* $\min\limits_{X \in M} f(X)$ *nebo jenom* $\min\limits_{M} f$, *respektive* $\min_M f$. *Minimum funkce* f *na celém definičním oboru* $D(f)$ *značíme krátce* $\min f$.

Maximum a minimum funkce f *na množině* M *nazýváme souhrnně* *extrémy* *funkce* f *na množině* M. *Používáme často názvy* *absolutní extrémy* *a* *globální extrémy*.

Jako je tomu u funkcí jedné proměnné, i zde se může stát, že některý z extrémů (nebo dokonce oba) neexistuje nebo, že je jich více.

Věta (o existenci absolutních extrémů funkce na množině). *Je-li* $M \subset \mathbb{E}_n$ *neprázdná, omezená a uzavřená množina a je-li funkce* f *spojitá na* M*, pak v množině* M *existují body* X_1 *a* X_2 *takové, že* $f(X_1) = \max_M f$ *a* $f(X_2) = \min_M f$.

Tj. spojitá funkce na neprázdné množině M, která je omezená a uzavřená, nabývá maxima a minima.

Věta (o existenci absolutních extrémů funkce na množině). *Je-li* $M \subset \mathbb{E}_n$ *neprázdná, omezená a uzavřená množina a je-li funkce* f *spojitá na* M*, pak v množině* M *existují body* X_1 *a* X_2 *takové, že* $f(X_1) = \max_M f$ *a* $f(X_2) = \min_M f$.

Tj. spojitá funkce na neprázdné množině M, která je omezená a uzavřená, nabývá maxima a minima.

Jak hledat absolutní extrémy. Funkce f může svých absolutních extrémů na množině M nabývat (když existují)

a) v bodech $X \in M^\circ$, ve kterých je f diferencovatelná a má tam všechny parciální derivace rovny nule,

b) nebo v bodech $X \in M^\circ$, ve kterých funkce f není diferencovatelná,

c) nebo v bodech $X \in \partial M$.

(M° je vnitřek a ∂M je hranice množiny M. Body, vyhovující podmínkám a) a b), jsou kritické body funkce f v M°.) Tedy:

1. *Najdeme body $X \in M^\circ$, ve kterých je funkce f diferencovatelná a má nulové parciální derivace.*
2. *Najdeme body $X \in M^\circ$, ve kterých funkce f není diferencovatelná.*
3. *Vyšetříme, ve kterých bodech $X \in \partial M$ může nabývat funkce f svých absolutních extrémů na hranici množiny M.*
4. *Nakonec vypočítáme hodnoty funkce f ve všech získaných bodech. Největší hodnota je rovna $\max_M f$ a nejmenší hodnota je rovna $\min_M f$.*

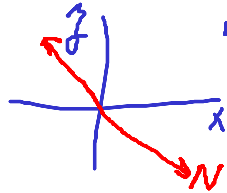
Příklady na tabuli.

Vázané extrémy f-ce

$\max_N / \min_N f(x,y)$ za podmínky, že množina bodů N je dána $g(x,y)=0$.

- vyšetřování chování f-ce na zadané křivce

Př.: $f(x,y)=x^2+2xy$, $N=\{[x,y]\in E_2 \,/\, x+y=0\}$



Př.: $f(x,y) = -\|-$, N: $\underbrace{\sqrt{x^2+y^3}-5}_{g(x,y)}=0$ NELZE

$y = f_1(x)$

Langrangeliv multiplikátor

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y) \Rightarrow \text{lok. extrémy } F(x,y,\lambda) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \boxed{g(x,y)=0}$$

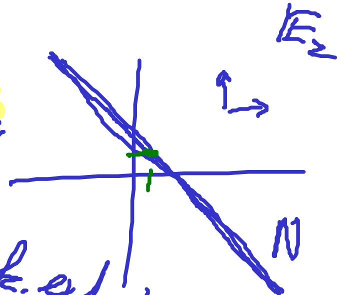
202) $z = 2(x^2+y^2)$, na křivce dané $x+y=2$.

$z(x,y) \to$ na křivce N se stane ze z "f-ce 1 proměnné"

lze psát $y = f(x)$, tedy máme vyjádřeno

$\to y = 2-x$

N: $z(x,y) \to z(x, 2-x) = 2\left(x^2+(2-x)^2\right) = \tilde{z}(x)$



Nyní jsem v M1: otázka zní: najdi lok. extrémy $\tilde{z}(x)$

$$\tilde{z}(x) = 2(x^2+4-4x+x^2) = 2(2x^2-4x+4)$$

$$\frac{d\tilde{z}}{dx} = 2(4x-4) = 0$$

$$x = 1$$

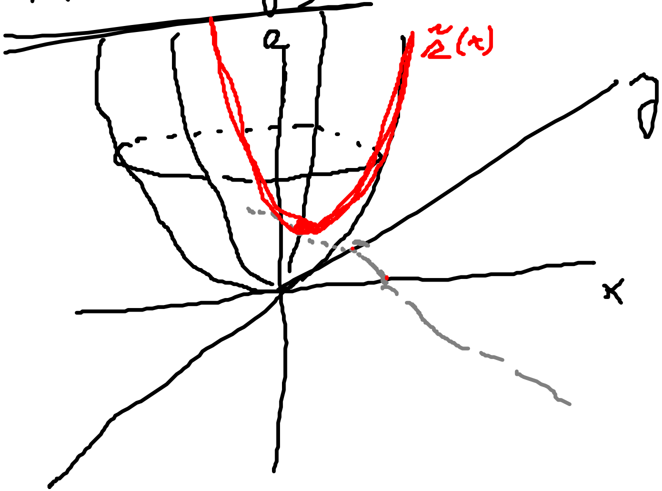
	$-\infty$	1
$\tilde{z}'$	$\ominus$	$\oplus$
$\tilde{z}$	klesá	rostoucí

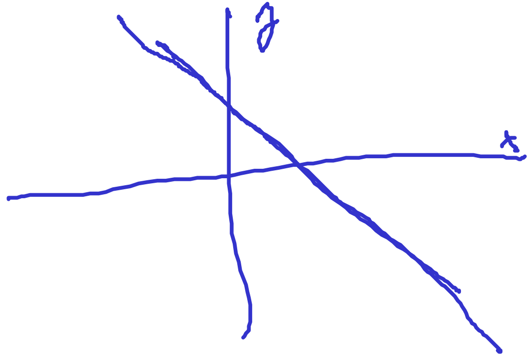
$x = 1$ je lok. min.

$\Downarrow$

$[1;1]$ je lok. min s hodnotou 4

$z = 2(x^2+y^2)$

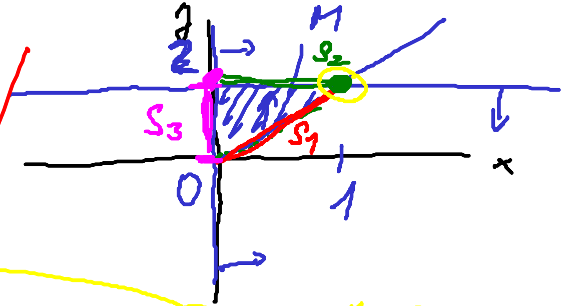




Příklad na globální extrém $f(x,y)$

$f(x,y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 2$ $\quad M = \{ X \in E^2 \,/\, x \geq 0,\ y \leq 2,\ y \geq 2x \}$

$D_f = E_2$ $\quad$ Ověření $\exists$ gl. extrém: f je spoj., M je omez. uzavřená ✓



1, podezřelé body na lok. extrém

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 4 = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad y = 2 \quad \in M^0$$

2, body na hranici

$S_1 = \{ [x,y] \in E_2 \,/\, 0 \leq x \leq 1,\ y = 2x \}$ $\quad f(x,y) = f(x, 2x) = 2x^2 - 4x + (2x)^2 - 4(2x) + 2$ $= \underbrace{6x^2 - 12x + 2 = \tilde{f}_1(x)}$

$$\frac{d\tilde{f}_1}{dx} = 12x - 12 = 0 \ \to \ x = 1,\ y = 2$$

$S_2 = \{ \ldots \,/\, y = 2,\ 0 \leq x \leq 1 \} \to \tilde{f}_2(x) = f(x, 2) = 2x^2 - 4x + 4 - 8 + 2 = 2x^2 - 4x - 2$

$$\frac{d\tilde{f}_2}{dx} = 4x - 4 = 0 \to x = 1,\ y = 2$$

$S_3 = \{ \ldots \,/\, x = 0,\ 0 \leq y \leq 2 \} \to \tilde{f}_3(y) = f(0, y) = y^2 - 4y + 2$ $\quad \frac{d\tilde{f}_3}{dy} = 2y - 4 = 0 \to y = 2,\ x = 0$

Nakonec získám tabulku

$$\underbrace{2x^2-4x}+y^2-4y+2$$

x	y	f(x,y)
1	2	$\notin M^0$
1	2	
1	2	-4
0	2	-2
0	0	2

$\Rightarrow$ $\min\limits_M f = -4$

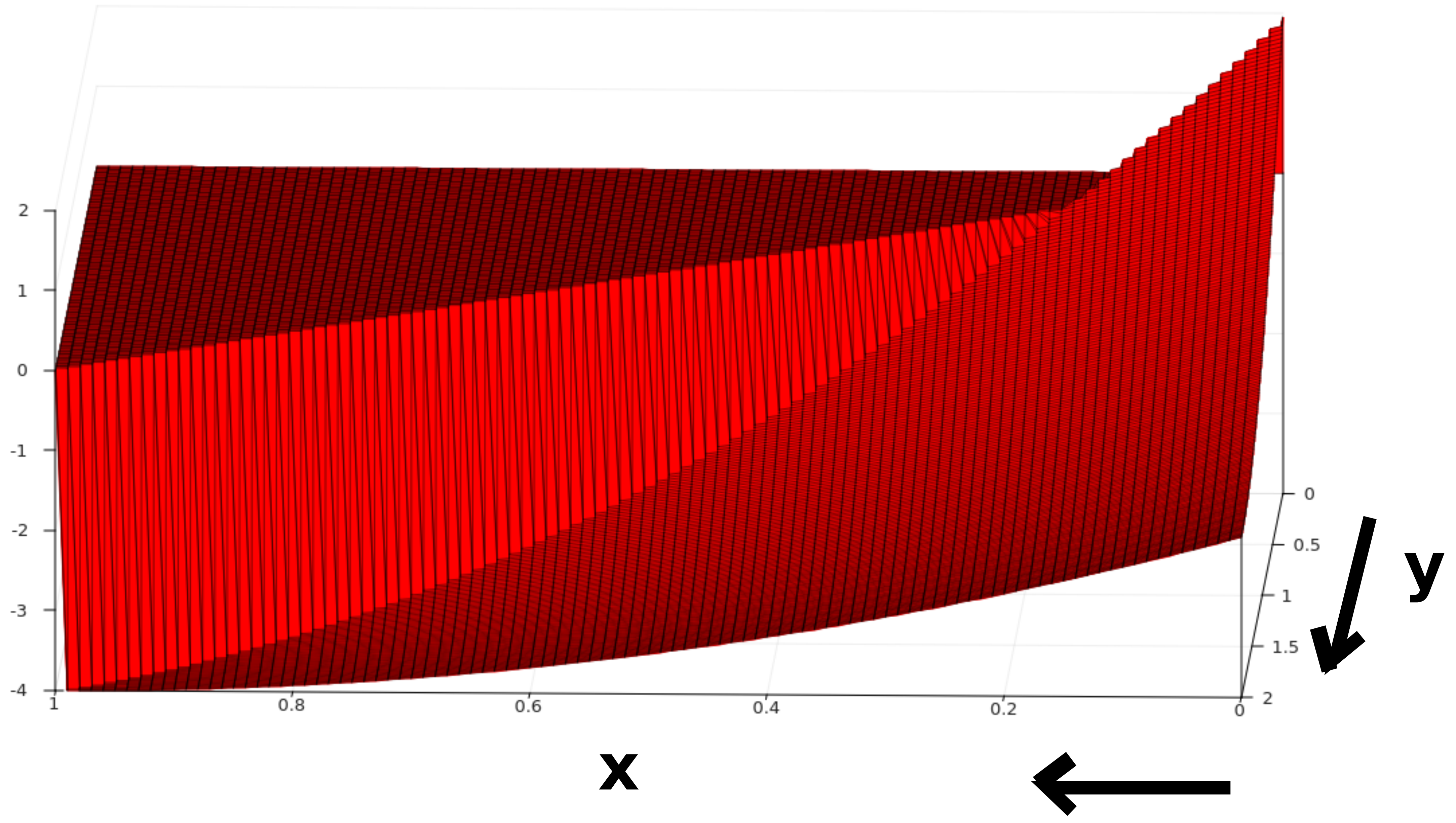
a je nabyto v bodě $[1,2]$

$\max\limits_M f = 2$

$\arg\max\limits_M f = [0,0]$.

2)

Graf funkce na M doplneny 0 ve zbytku ctverce 1x2




Vrstevnice grafu f-ce f na M doplneny 0
200
150
100
50
20
40
60
80
100