Matematika II – přednáška 7

Co bude dneska?

Implicitní funkce definovaná rovnicí $F(x, y)=0$, vlastnosti a použití.

P.S.: Nějaké příklady.

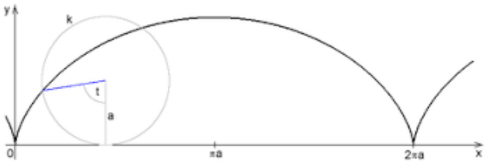
Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
Slidy nenahrazují skripta ani zápisky ani účast na přednášce a jsou pouze pro osobní potřeby.

Funkce zadaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$

Co je to explicitní funkce, co je to implicitní funkce.

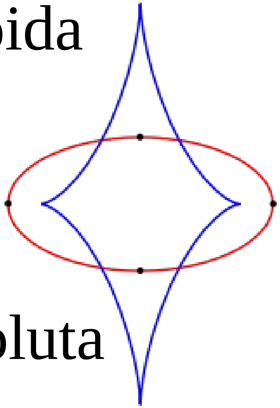
Příklady na tabuli.

Motivace = popis (složitých) křivek

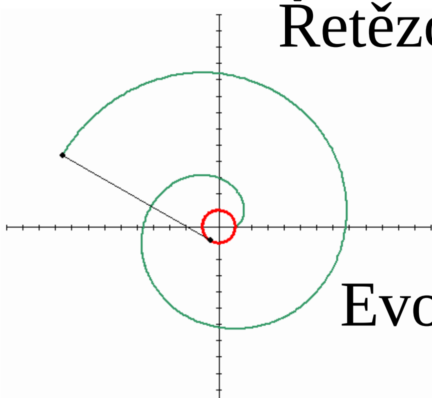


Cykloida

Řetězovka



Evoluta



Evolventa

Další známé křivky viz např. Srdcovka, Astroida, Descartův list, atd=pdf…

Funkce zadaná implicitně rovnicí $F(x,y)=0$

Co je to explicitní funkce, co je to implicitní funkce.

Příklady na tabuli.

Obecně můžeme psát

$$F(x,y) \;=\; 0,$$

kde F je spojitá funkce dvou proměnných.

Otázka je: *Je touto rovnicí jednoznačně definována nějaká funkce* $y = f(x)$*? Pokud ano, jakou má derivaci?*

Funkce zadaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$

Co je to explicitní funkce, co je to implicitní funkce.

Příklady na tabuli.

Obecně můžeme psát

$$F(x, y) = 0,$$

kde F je spojitá funkce dvou proměnných.
Otázka je: *Je touto rovnicí jednoznačně definována nějaká funkce $y = f(x)$? Pokud ano, jakou má derivaci?*

Pokud je odpověď ano, pak říkáme, že rovnicí $F(x, y) = 0$ je funkce $y = f(x)$ definována implicitně (význam: nevysloveně, skrytě). Funkci $y = f(x)$ pak nazýváme implicitní funkcí.

Věta (o implicitní funkci). *Předpokládejme, že*

a) funkce $F(x,y)$ *má spojité obě parciální derivace v nějakém okolí bodu* $[x_0, y_0]$,

b) $F(x_0, y_0) = 0$, *c)* $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existují čísla $\delta > 0$ *a* $\epsilon > 0$ *a jediná funkce* $y = f(x)$, *definovaná v intervalu* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, *pro kterou platí:*

1. $y_0 = f(x_0)$,
2. $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \; : \; y = f(x) \in (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ *a* $F(x, f(x)) = 0$,
3. *funkce* f *je spojitá a má spojitou derivaci* f' *v intervalu* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,
4. $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \; : \; f'(x) = -\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \Big/ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))$.

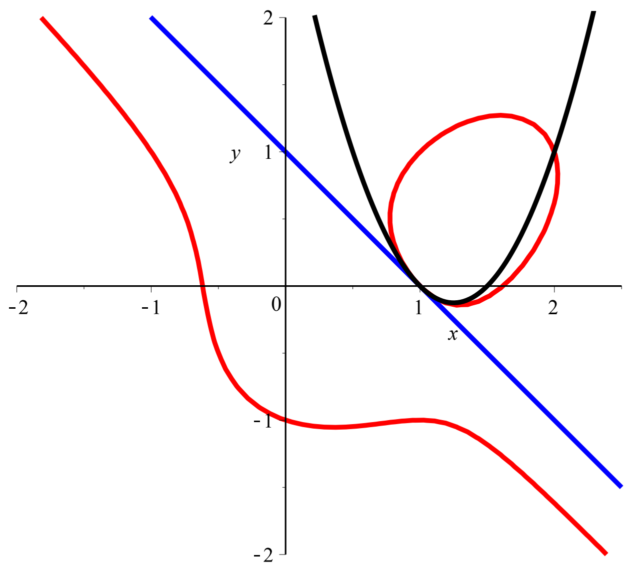
Příklady a obrázky

Sb 166 (reseny): Krivka F(x,y)=0, tecna a Tayloruv polynom v okolí bodu A=[1,0]

$$x^3 + y^3 - 2\,x^2 - x\,y + 1 = 0$$

$$t = 1 - x$$

$$T_2(x) = 1 - x + 2\,(x-1)^2 \tag{2}$$



>

Odvozeni f’’(x) viz skripta

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0. \tag{I.7.5}$$

Vyjádříme-li odtud y' a uvědomíme-li si, že $y = f(x)$ a $y' = f'(x)$, dostaneme žádaný vzorec. Použijeme-li zjednodušené označení

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad F_y = \frac{\partial F}{\partial y},$$

můžeme vzorec zapsat ve tvaru

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}, \tag{I.7.6}$$

kde y' je uvažováno v bodě x a F_x a F_y v bodě $[x, f(x)]$.

Obdobným způsobem lze získat i vyjádření druhé derivace funkce $y = f(x)$. Předpokládejme, že funkce F má spojité druhé parciální derivace. Rovnici (I.7.5) derivujeme ještě jednou podle x. Označujeme-li pro jednoduchost parciální derivace funkce F i nadále pouze indexy, obdržíme:

$$F_{xx} + F_{yx}\, y' + F_{xy}\, y' + F_{yy}\, y'^2 + F_y\, y'' = 0.$$

Využijeme-li rovnosti $F_{xy} = F_{yx}$ (viz věta I.5.12) a dosadíme-li sem vyjádření y' z (I.7.6), dostaneme:

$$y'' = f''(x) = -\frac{F_{xx}\, F_y^2 - 2F_{xy}\, F_x\, F_y + F_{yy}\, F_x^2}{F_y^3},$$

kde y'' je uvažováno v bodě x a všechny derivace funkce F v bodě $[x, f(x)]$. Tuto formuli si nemusíte pamatovat. Je však dobré si pamatovat postup, který k ní vede. To znamená, že rovnici (I.7.3) derivujeme dvakrát podle x a poté vyjádříme y''.