Matematika II – přednáška 8

Co bude dneska?

Implicitní funkce definovaná rovnicí $F(x,y,z)=0$, vlastnosti a použití.

Dělení obdélníku a jeho norma.

P.S.: Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
Slidy nenahrazují skripta ani zápisky ani účast na přednášce a jsou pouze pro osobní

Věta (o implicitní funkci). *Předpokládejme, že*

a) funkce $F(x,y)$ *má spojité obě parciální derivace v nějakém okolí bodu* $[x_0, y_0]$*,*

b) $F(x_0, y_0) = 0$*,* *c)* $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existují čísla $\delta > 0$ *a* $\epsilon > 0$ *a jediná funkce* $y = f(x)$*, definovaná v intervalu* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$*, pro kterou platí:*

1. $y_0 = f(x_0)$,
2. $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \;:\; y = f(x) \in (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ *a* $F(x, f(x)) = 0$,
3. *funkce* f *je spojitá a má spojitou derivaci* f' *v intervalu* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,
4. $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \;:\; f'(x) = -\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \Big/ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))$.

Druhá derivace (jak by vypadala věta) $f''(x) = -\frac{F_{xx}\, F_y^2 - 2F_{xy}\, F_x\, F_y + F_{yy}\, F_x^2}{F_y^3}$.

Konec př. z minule, f''(x0)=?

Příklady a obrázky

$F(x,y)=0$

$x^3+y^3-2x^2-xy+1=0$; $A=[1,0]$

• $\exists$ impl. zadaná f-ce $y=f(x)$ na okolí bodu A?

VoIF → 3 předpoklady

a) F má spoj. parc. der. na okolí A:

$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2-4x-y$ → jsou na celém E_2

$\frac{\partial F}{\partial y}=3y^2-x$

b) splňuje A r-ci $F(A)=0$?

$A=[x_0,y_0]$

$F(1,0)=1+0-2-1\cdot 0+1=0=0$ ✓

c) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$

$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0)=0-1=-1\neq 0$

splněné všechny předpoklady

Tedy platí: $\exists$ jediná f-ce $y = f(x)$

1) $y_0 = f(x_0)$

2) na malém okolí x_0

$F(x,$

3) $\exists$ spoj. der. f'

4) $f'(x_0) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$

speciálně $x, y \to x_0, y_0$

$A = [1, 0]$

$y_0 = f(x_0)$

$\boxed{y = -1(x-1)}$

- $F_x = 3x^2 - 4x - y \big|_A = -1$
- $F_y = 3y^2 - x \big|_A = -1$

$y'(x_0) = f'(x_0) = -\dfrac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} = -\dfrac{-1}{-1} = -1$

$\exists!\ y = f(x)$, ale ho neznám, dokážu aprox. $T_1(x)$

$y \approx T_1(x) =$ tečna

$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0 - 1(x - 1)$

f''=

$$f''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

$$= \left(\frac{-F_{xx} - F_{xy}\cdot f'(x) - f'(x)\left(F_{xy} + F_{yy} f'\right)}{F_y} \right)$$

$f' = -\frac{F_x}{F_y}$

$F_x = 3x^2 - 4x - 1 \Big|_A = -1$ $\qquad f'(1) = -1$

$F_y = 3y^2 - x \Big|_A = -1$

$F_{xx} = 6x - 4 \Big|_{A=[1,0]} = 2$

$F_{xy} = -1$

$F_{yx} =$ // ✓

$F_{yy} = 6y \Big|_A = 0$

$$\overset{x_0}{\downarrow}\; f''(1) = -\frac{2\cdot(-1)^2 - 2(-1)(-1)(-1) + 0\cdot(-1)^2}{(-1)^3}$$

$$= -\frac{2+2+0}{-1} = +4$$

$$y \doteq T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\cdot(x - x_0)^2$$

$$= 0 - 1(x - 1) + \frac{1}{2}(+4)(x-1)^2$$

$$= 1 - x + 2(x-1)^2$$

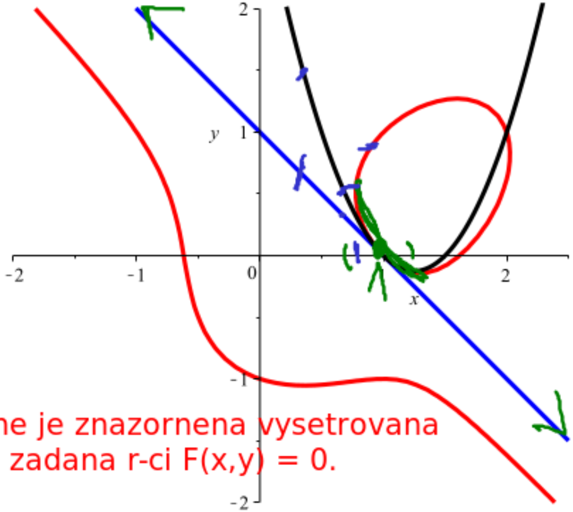
Sb 166 (reseny): Krivka F(x,y)=0, tecna a Tayloruv polynom v okolí bodu A=[1,0]

$$x^3+y^3-2x^2-xy+1=0$$

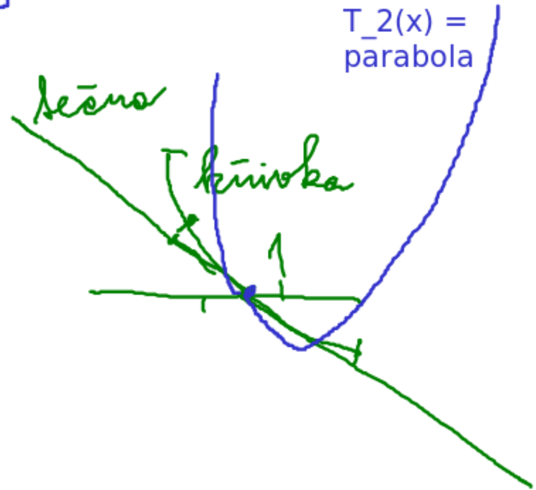
$$t=1-x$$

$$\boxed{T_2(x)=1-x+2\,(x-1)^2}$$

(2)



cervene je znazornena vysetrovana krivka zadana r-ci F(x,y) = 0.



f''(x_0) rozhoduje o tom, jestli graf f(x) lezi pod nebo nad grafem f-ce

Funkce zadaná implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$

Jaký je rozdíl proti minule.

Příklady na tabuli.

Funkce zadaná implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$

Jaký je rozdíl proti minule.

Příklady na tabuli.

Obecně můžeme psát

$$F(x, y, z) = 0,$$

kde F je spojitá funkce tří proměnných.
Otázka je: *Je touto rovnicí jednoznačně definována nějaká funkce $z = f(x, y)$? Pokud ano, jaké má parciální derivace?*

Pokud je odpověď ano, pak říkáme, že rovnicí $F(x, y, z) = 0$ je funkce $z = f(x, y)$ definována implicitně (význam: nevysloveně, skrytě). Funkci $z = f(x, y)$ pak nazýváme implicitní funkcí.

Věta (zobecněná o implicitní funkci). *Předpokládejme, že*

a) funkce $F(x,y,z)$ *má spojité parciální derivace v nějakém okolí bodu* $[x_0, y_0, z_0]$,

b) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$,

c) $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Pak existují čísla $\delta > 0$ *a* $\epsilon > 0$ *a jediná funkce* $z = f(x,y)$, *definovaná v okolí* $U_\delta(x_0, y_0)$ *bodu* $[x_0, y_0]$, *pro kterou platí:*

1. $z_0 = f(x_0, y_0)$,
2. $\forall\, [x,y] \in U_\delta(x_0, y_0)\ :\ z = f(x,y) \in (z_0 - \epsilon, z_0 + \epsilon)$ *a* $F(x, y, f(x,y)) = 0$,
3. *funkce* f *je spojitá a má spojité parciální derivace podle* x *a podle* y *v okolí* $U\delta(x_0, y_0)$,
4. $\forall\, [x,y] \in U_\delta(x_0, y_0)\ :\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{\partial F}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial F}{\partial z}, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\partial F}{\partial y}\Big/\dfrac{\partial F}{\partial z},$

   přičemž parciální derivace funkce f *jsou uvažovány v bodě* $[x,y]$ *a parciální derivace funkce* F *v bodě* $[x, y, f(x,y)]$.

Zamyšlení a odvození, odkud plyne tvrzení 4. (první a případně druhá derivace)

Nějaké příklady.

Dělení obdélníku a norma dělení

Na tabuli.

Dělení obdélníku a norma dělení

Na tabuli.

Motivace pro dvojný integrál.