Matematika II – přednáška 9

Co bude dneska?

Dělení obdélníku a jeho norma.

Riemanovy součty a jejich limita.

Dvojný integrál na obdélníku a na obecné množině.

Měřitelná množina a Jordanova míra množiny.

Základní vlastnosti dvojného integrálu. (Fubiniho věta)

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
Slidy nenahrazují skripta ani zápisky ani účast na přednášce a jsou pouze pro osobní potřeby.

Dělení obdélníku a norma dělení

Na tabuli.

Dělení obdélníku a norma dělení

Na tabuli.

Motivace pro dvojný integrál.

Riemanovy součty a jejich limita

Nechť je $f(x, y)$ funkce omezená na obdélníku $O = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ v $\mathbb{E}_2$.

Nechť D je dělení O na dílčí obdélníky $O_1, \dots, O_n$, jejichž strany mají délky Δx_1, Δy_1, $\dots$, Δx_n, Δy_n.

Riemanovy součty a jejich limita

Nechť je $f(x,y)$ funkce omezená na obdélníku $O = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ v $\mathbb{E}_2$.

Nechť D je dělení O na dílčí obdélníky $O_1, \dots, O_n$, jejichž strany mají délky Δx_1, Δy_1, $\dots$, Δx_n, Δy_n.

Nyní vyberme v každém z obdélníků jeden bod a označme $\mathcal{V}$ systém vybraných bodů $Z_i \in O_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Pak *Riemannovým součtem* funkce f na obdélníku O, odpovídajícím dělení D a systému bodů $\mathcal{V}$, nazýváme

$$s(f, D, \mathcal{V}) = \sum_{i=1}^{n} f(Z_i) \cdot \Delta x_i \, \Delta y_i \, .$$

Říkáme, že číslo S je *limitou Riemannových součtů* $s(f, P, V)$ *pro* $\|D\| \to 0+$, jestliže ke každému danému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D obdélníku O a pro každý zvolený systém $\mathcal{V}$ platí:

$$\|D\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |s(f, D, \mathcal{V}) - S| < \epsilon.$$

Píšeme:

$$\lim_{\|D\| \to 0+} s(f, D, \mathcal{V}) \; = \; S.$$

Říkáme, že číslo S je *limitou Riemannových součtů* $s(f, P, V)$ *pro* $\|D\| \to 0+$, jestliže ke každému danému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D obdélníku O a pro každý zvolený systém $\mathcal{V}$ platí:

$$\|D\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |s(f, D, \mathcal{V}) - S| < \epsilon.$$

Píšeme:

$$\lim_{\|D\| \to 0+} s(f, D, \mathcal{V}) = S.$$

Dvojný integrál na obdélníku

Jestliže tato limita existuje, pak číslo S nazýváme *dvojným integrálem* funkce f *na obdélníku* O. Integrál obvykle značíme

$$\iint_O f(x, y)\, dx\, dy \qquad \text{nebo} \qquad \iint_O f\, dx\, dy.$$

Jestliže limita existuje, říkáme, že "dvojný integrál $\iint_O f\, dx\, dy$ existuje" nebo že "funkce f je *integrovatelná* na obdélníku O".

Dvojný integrál na obecné množině

Na tabuli.

Měřitelná množina v E_2 a její Jordanova míra

Omezená množina není dostatečné omezení. (Př.) Abychom se tedy omezili jen na ”rozumné”množiny zavádíme:

Definice (měřitelná množina). *Předpokládejme, že M je omezená množina v $\mathbb{E}_2$. Říkáme, že tato množina je měřitelná (v Jordanově smyslu), jestliže dvojný integrál konstantní funkce $f(x, y) = 1$ na M existuje. V tomto případě nazýváme číslo*

$$\mu_2(M) \; = \; \iint_M dx\, dy$$

dvourozměrnou Jordanovou mírou množiny M.

Geometrická interpretace dvourozměrné míry je obsah množiny M.

Množiny, které mají míru 0.

Věta. a) *Sjednocení konečně mnoha množin míry nula je množina míry nula.*

b) *Je-li* N *množina míry nula a* $M \subset N$, *pak* M *je také množina míry nula.*

Geometrická interpretace dvourozměrné míry je obsah množiny M.

Množiny, které mají míru 0.

Věta. a) *Sjednocení konečně mnoha množin míry nula je množina míry nula.*
b) *Je-li N množina míry nula a $M \subset N$, pak M je také množina míry nula.*

Věta (Nutná a postačující podmínka pro měřitelnost množiny v $\mathbb{E}_2$). *Množina $M \subset \mathbb{E}_2$ je měřitelná (v Jordanově smyslu) právě tehdy, je-li omezená a $\mu_2(\partial M) = 0$.*

Existence a vlastnosti dvojného integrálu

Věta (Postačující podmínka pro existenci dvojného integrálu).
Nechť M *je měřitelná množina v* $\mathbb{E}_2$ *a* f *je omezená a spojitá funkce na* M. *Pak dvojný integrál* $\iint_M f\, dx\, dy$ *existuje.*

Existence a vlastnosti dvojného integrálu

Věta (Postačující podmínka pro existenci dvojného integrálu).
Nechť M *je měřitelná množina v* $\mathbb{E}_2$ *a* f *je omezená a spojitá funkce na* M. *Pak dvojný integrál* $\iint_M f \, dx \, dy$ *existuje.*

Některé vlastnosti dvojného integrálu

Na tabuli.