Analytická geometrie v E_3 - kvadriky

ROVNICE KVADRIKY (v základní a posunuté poloze)

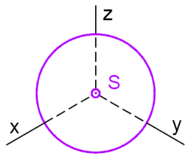
Kvadriky v základní poloze - střed nebo vrchol leží v počátku (viz příloha na konci)
Posunutí – v rovnici nahradíme všechny proměnné dvojčlenem : $x \rightarrow (x - m)$

$y \rightarrow (y - n)$

$z \rightarrow (z - p)$

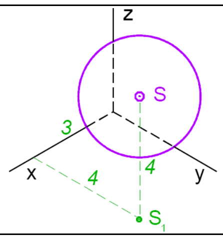
Bod $[m, n, p]$ je střed $\boldsymbol{S}$ nebo vrchol $\boldsymbol{V}$ kvadriky.

Příklad: Kulová plocha (S, r)



$S[0,0,0], r = 2$

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$



$S[3,4,4], r = 2$

$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 4$

$x^2 - 6x + y^2 - 16y + z^2 - 8z + 37 = 0$

KANONICKÝ TVAR ROVNICE KVADRIKY

V obecné rovnici doplníme příslušné členy s proměnnými na úplné čtverce a postupně upravíme (čtverce na levou stranu a vše ostatní na pravou stranu rovnice). Pokud se v rovnici vyskytují všechny čtverce, bude na pravé straně ***1*** (elipsoidy a hyperboloidy) nebo ***0*** (kuželová plocha).

Příklad 1: $2x^2 - 8x + 3y^2 + 18y - 6z + 35 = 0$

Řešení (postupné úpravy): $2[x^2 - 4x] + 3[y^2 + 6y] - 6z + 35 = 0$

$$2[(x-2)^2 - 4] + 3[(y+3)^2 - 9] = 6z - 35$$

$$2(x-2)^2 - 8 + 3(y+3)^2 - 27 = 6z - 35$$

$$2(x-2)^2 + 3(y+3)^2 = 6z$$

$$\boldsymbol{\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y+3)^2}{2} = z}$$

Eliptický paraboloid, vrchol V[2,-3,0], osa souměrnosti // z (X=V+(0,0,1)t)

Příklad 2: $-3x^2 + 6x + 4y^2 - 16y + 12z^2 + 24z + 13 = 0$

Řešení : $-3[x^2 - 2x] + 4[y^2 - 4y] + 12[z^2 + 2z] = -13$

$$-3[(x-1)^2 - 1] + 4[(y-2)^2 - 4] + 12[(z+1)^2 - 1] = -13$$

$$-3(x-1)^2 + 4(y-2)^2 + 12(z+1)^2 = 12$$

$$\boldsymbol{-\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} + (z+1)^2 = 1}$$

Jednodílný hyperboloid, střed S[1,2,-1], osa souměrnosti // x (X=S+(1,0,0)t)

ROTAČNÍ KVADRIKY

Rotační kvadrika (regulární) vznikne rotací kuželosečky kolem její osy nebo přímky kolem mimoběžné osy (rotační jednodílný hyperboloid).

Rotační válcová nebo kuželová plocha (singulární kvadrika) vznikne rotací přímky kolem rovnoběžné nebo různoběžné osy.

Rovnice rotační kvadriky v kanonickém tvaru obsahuje dva kvadratické členy se stejnými koeficienty (včetně znaménka !!), osa rotace je dána středem nebo vrcholem a směrem souřadnicové osy odpovídající “zbývajícímu rušivému“ nebo “chybějícímu“ členu

(např. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{2} = 1$, $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$ jsou rotační plochy s osou ve směru osy y).

<u>Poznámka:</u> Osa rotace odpovídá u nerotačních kvadrik ose souměrnosti (“zelená“ osa pro umístění náčrtku plochy v následujících obrázcích).

URČENÍ TYPU KVADRIKY (podle její rovnice v kanonickém tvaru)

<u>Použité symboly:</u>

$\boxed{+}$ $\boxed{-}$ Kvadratické členy (čtverce) s proměnnou a se znaménkem (+) nebo (–) [např.: $\frac{(y-3)^2}{4}$, $-z^2$] , jejich pořadí nemusí odpovídat abecednímu pořadí proměnných.

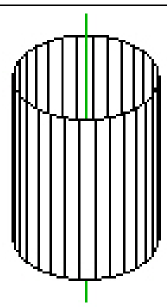
Podstatné pro určení typu jsou počty znamének (+) a (–)

+/– Lineární člen se znaménkem (+) nebo (–) [např.: z nebo $-(x+3)$]

<u>Poznámka</u>: Obrázky k příkladům jsou pouze orientační (bez přesného umístění a tvaru).

VÁLCOVÁ PLOCHA : v rovnici “chybí“ člen jedné proměnné (a rovnice připomíná rovnici kuželosečky)

Souřadnicová osa odpovídající chybějící proměnné udává směr površek, daná rovnice je rovnicí řídicí kuželosečky v příslušné souřadnicové rovině.

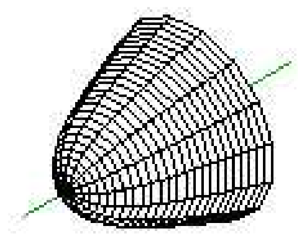
<u>Příklad 1a</u>: $\frac{x^2}{4} + (y-2)^2 = 1$ Eliptická válcová plocha, površky // z, řídicí elipsa $\subset (x,y)$: $S[0,2,0]$,$a=2$, $b=1$, osa souměrnosti : $X = S[0,2,0] + (0,0,1).t$	

<u>Příklad 1b</u>: $y^2 = z$ Parabolická válcová plocha, površky // x, řídicí parabola $\subset (y,z)$, $V[0,0,0]$	“parabolické korýtko ležící na ose x“

Poznámka: Rovnice dalších kvadrik obsahují členy se všemi proměnnými a minimálně dva jsou kvadratické .
Na levé straně jsou 3 čtverce a na pravé ***1*** (elipsoidy a hyperboloidy) nebo ***0*** (kuželová plocha), pokud jsou na levé straně dva čtverce je na pravé člen lineární (paraboloidy).

ELIPTICKÝ PARABOLOID : $\boxed{+}\ \boxed{+}\ = \pm$

Souřadnicová osa odpovídající lineárnímu členu udává směr osy.

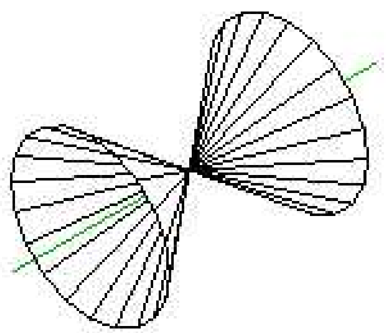
Příklad 2: $\frac{(y+3)^2}{4}+\frac{(z-1)^2}{4}=-x$ Rotační paraboloid, vrchol *V[0,-3,1]*, osa rotace : *X = V[0,-3,1] +(-1,0,0).t*	

HYPERBOLICKÝ PARABOLOID : $\boxed{+}\ \boxed{-}\ = \pm$

Uvádím pouze pro úplnost přehledu. Rovnice a obrázek je v příloze.

KUŽELOVÁ PLOCHA : $\boxed{+}\ \boxed{+}\ \boxed{-}\ = 0$ nebo $\boxed{+}\ \boxed{-}\ \boxed{-}\ = 0$

Souřadnicová osa odpovídající "rušivému" znaménku udává směr osy.

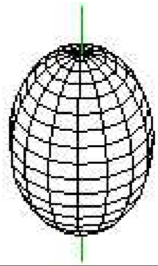
Příklad 3: $-(x+3)^2+y^2+\frac{(z-1)^2}{4}=0$ Kuželová plocha, vrchol *V[-3,0,1]*, osa : *X = V[-3,0,1] + (1,0,0).t*	

ELIPSOID : $\boxed{+}\ \boxed{+}\ \boxed{+}\ = 1$

Osy souměrnosti procházejí středem ve směru souřadnicových os (trojosý elipsoid).

<u>*Příklad 4*</u> *:* $\dfrac{(x-4)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{4}+\dfrac{z^2}{8}=1$

Rotační elipsoid, střed *S[4,1,0]*,
osa rotace : *X = S[4,1,0] +(0,0,1).t*



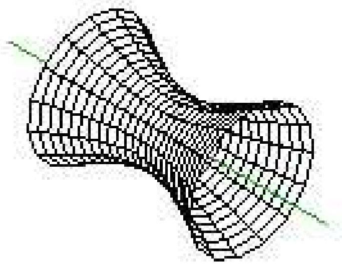
Poznámka: Do této skupiny patří samozřejmě i kulová plocha $x^2+y^2+z^2=r^2$

JEDNODÍLNÝ HYPERBOLOID : $\boxed{+}\ \boxed{+}\ \boxed{-}\ = 1$

Souřadnicová osa odpovídající znaménku “mínus“ udává směr osy.

<u>*Příklad 5*</u>*:* $\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y-2)^2}{3}+(z+1)^2=1$

Jednodílný hyperboloid, *S[1,2,-1]*,
osa : *X = S[1,2,-1] +(0,1,0).t*

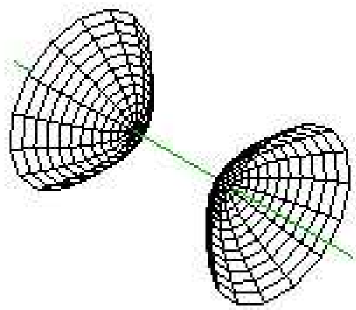


DVOUDÍLNÝ HYPERBOLOID : $\boxed{-}\ \boxed{-}\ \boxed{+}\ = 1$

Souřadnicová osa odpovídající znaménku “plus“ udává směr osy.

<u>*Příklad 6*</u>*:* $-\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{3}-(z+1)^2=1$

Dvoudílný hyperboloid, *S[1,2,-1]*,
osa : *X = S[1,2,-1] +(0,1,0).t*



ŘEZ KVADRIKY HLAVNÍ ROVINOU

Tato úloha představuje řešení soustavy dvou rovnic: rovnice kvadriky a roviny. Při vhodně zvolené rovině (hlavní rovina určená středem nebo vrcholem plochy) můžeme získat pravoúhlý průmět do souřadnicové roviny.

Příklad 1: Určete řezy rotačního elipsoidu $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{4}+\frac{(z-2)^2}{9}=1$

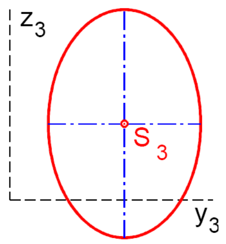
souřadnicovými rovinami.

a) řez rovinou (yz):

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{(y-3)^2}{4}+\frac{(z-2)^2}{9}=1$$

elipsa v rovině (yz), střed $S[0,3,2]$, poloosy 2 a 3

osový řez hlavní rovinou $\Rightarrow$ elipsa je průmětem do (yz)



---

b) řez rovinou (xz):

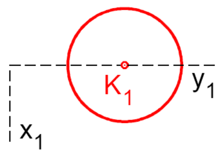
$$y=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{4}+\frac{(z-2)^2}{9}=-\frac{5}{4} \quad\Rightarrow$$ prázdná množina

---

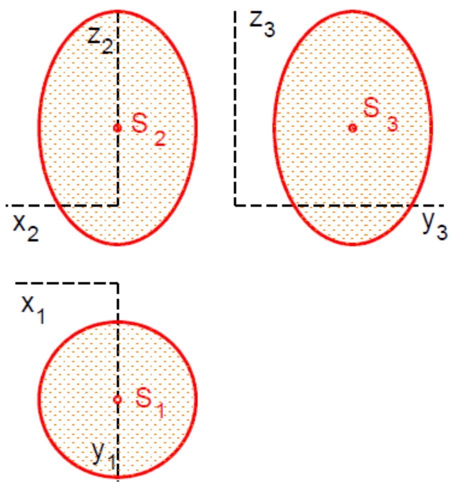
c) řez rovinou (xy):

$$z=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+(y-3)^2=\frac{20}{9}$$

kružnice v rovině (xy), střed $K[0,3,0]$, $r=\sqrt{\frac{20}{9}}$



Poznámka: Doplněním dalších hlavních řezů středem $S[0,3,2]$ ($y = 3$, $z = 2$) získáme průměty dané kvadriky do ostatních souřadnicových rovin.
Obrázky jsou v polovičním měřítku.



Příklad 2: Určete řezy kvadriky $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{(z-3)^2}{9}=1$ vhodnými rovinami pro sestrojení pravoúhlých sdružených průmětů.

Řešení: Plocha je rotační jednodílný hyperboloid: střed *S[0,0,3]* , osa rotace = osa *z*.

Vhodné roviny: 1) souřadnicová rovina *(xz)* $\Rightarrow$ ***y = 0*** (osový řez rovinou *(xz)*), který bude současně průmětem obrysu plochy do této roviny

2) $\alpha \,//(xy)$, $S\in\alpha$ $\Rightarrow$ ***z = 3*** (řezem bude hrdlová kružnice ***h***, jejíž průmět do roviny *(xy)* bude průmětem obrysu plochy).

1) řez rovinou (*x z*):

$$y=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{4}-\frac{(z-3)^2}{9}=1$$

hyperbola v rovině (*xz*),

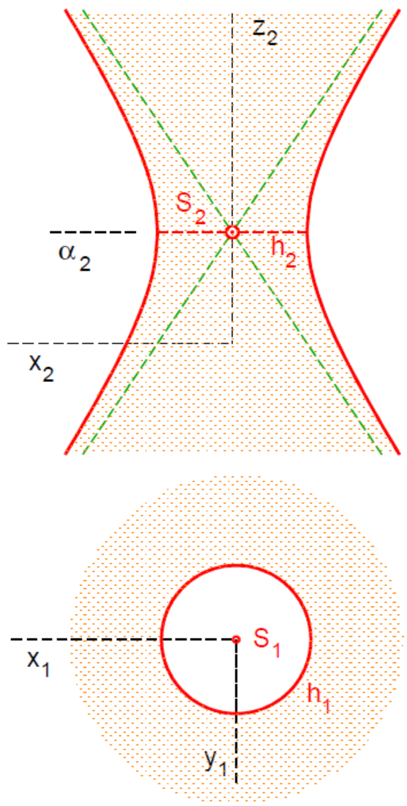
střed *S[0,0,3]*, poloosy *2* a *3*

2) řez rovinou α:

$$z=3 \quad\Rightarrow\quad x^2+(y-3)^2=4$$

kružnice v rovině α // *(xy)*,

střed *S[0,0,3]*, $r=2$



Poznámka 1: Obrázek je v polovičním měřítku

Poznámka 2: Celý obrázek představuje dva sdružené pravoúhlé průměty jednodílného hyperboloidu, třetí vzhledem k tomu, že plocha je rotační (osa *z*), by byl shodný s druhým .

MNOŽINA BODŮ ohraničených plochami

Tato úloha nemusí být jednoduchá, omezíme se tedy jen na případ hlavní roviny a rotační kvadriky nebo dvou souosých rotačních kvadrik. Způsob řešení naznačují uvedené příklady.

Příklad 1: Je dána množina D: $\left\{[x,y,z]\in E_3, 0\le z\le 5, -\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\ge 1\right\}$.

Určete: a) hraniční plochy, b) průnikové křivky, c) načrtněte sdruž. průměty množiny D.

Řešení:

a) 1. podmínka $0\le z\le 5$ je jednoduchá: vrstva ohraničená rovinami $z=0$ a $z=5$

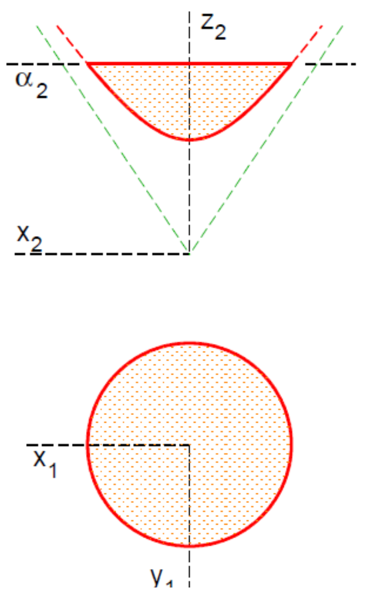
2. podmínka dává hraniční rotační dvoudílný hyperboloid $-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$

b) průnikové křivky:

soustava $\{\, z=0,\ -\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1 \,\}$ nemá řešení,

soustavu $\{\, z=5,\ -\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1 \,\}$ řeší kružnice $\left\{z=5, x^2+y^2=\frac{64}{9}\right\}$

c)



Řez rovinou $y=0$: hyperbola $-\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$,

přímky $z=0$ a $z=5$ (α_2)

Vzhledem k podmínkám je průmětem do roviny (xz) vyznačený útvar.

Průmětem do roviny (xy) je kruh ohraničený

průmětem průnikové křivky ($x^2+y^2=\frac{64}{9}$).

Výsledná množina je rotační těleso, které vznikne rotací vyznačeného útvaru v rovině (xz) kolem osy z. Toto tvrzení můžeme ověřit testem: bod $[0,0,4]$ ležící v tomto tělese splňuje dané podmínky.

Poznámka: Obrázek je v polovičním měřítku.

__Příklad 2__: Těleso je ohraničené plochami $z=\sqrt{x^2+y^2}$ a $z=2-x^2-y^2$.

Načrtněte sdružené průměty.

__Řešení__:

a) po úpravě rovnic dostaneme

$x^2+y^2-z^2=0,\ z\geq 0$: "horní" polovina rotační kuželové plochy s osou z

$x^2+y^2=-(z-2)$: rotační paraboloid, $V\,[0,0,2]$, osa z je osou rotace

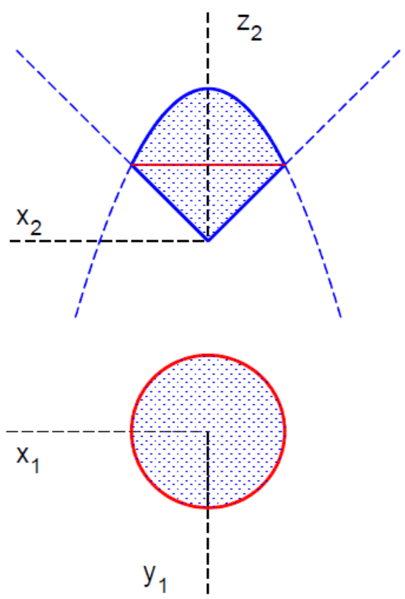
b) průniková křivka : řešením soustavy (s podmínkou $z\geq 0$) dostaneme kružnici

$z=1,\ \ x^2+y^2=1$ (střed $[0,0,1]$, poloměr $=1$, v rovině $z=1$)

c) zobrazíme osové řezy v rovině $y=0$: $x^2-z^2=0$ (dvě polopřímky $z=\pm x,\ z\geq 0$)

$x^2=-(z-2)$ (parabola, osa z, $V[0,0,2]$)

a doplníme průmětem průnikové kružnice do roviny (xy)



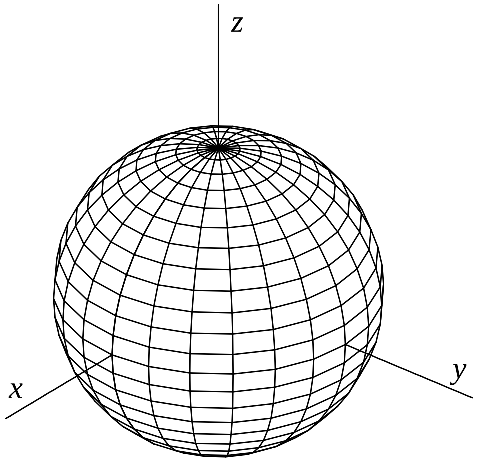
Těleso je rotační, vznikne rotací vyznačeného útvaru (modrá barva) v rovině (xz) kolem osy z.

Průnikovou křivkou hraničních ploch je kružnice

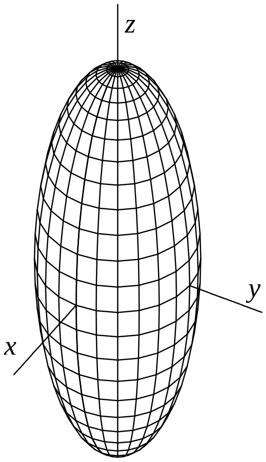
$z=1,\ \ x^2+y^2=1$ (červená barva).

Příloha – rovnice kvadrik $\rightarrow$ ("nové" stránky 3 a 4) :

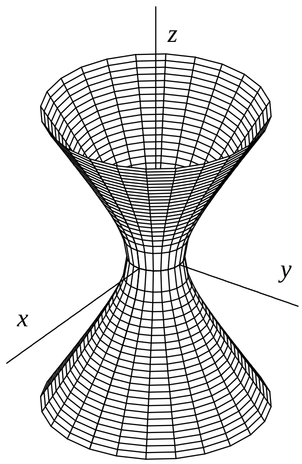
Kvadratické plochy



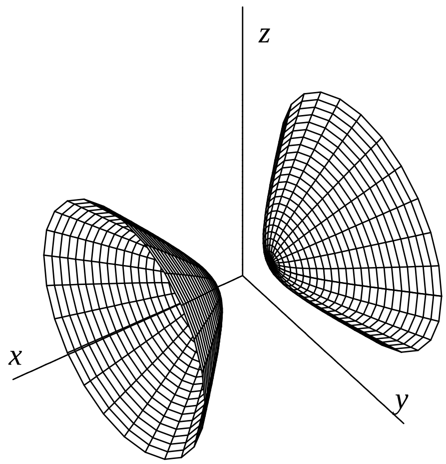
kulová plocha $\quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$



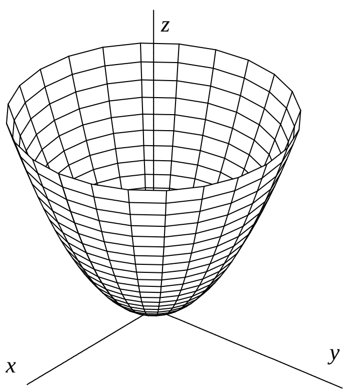
elipsoid $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



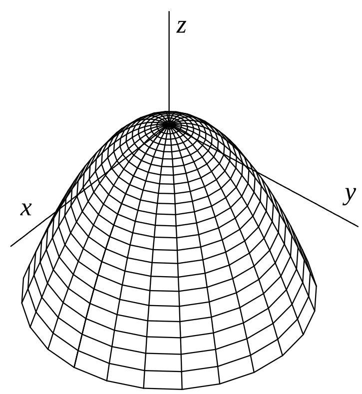
jednodílný hyperboloid $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



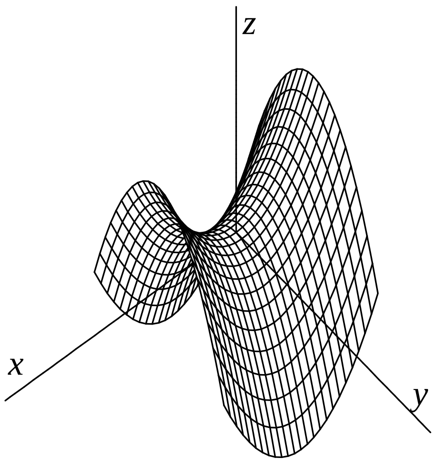
dvoudílný hyperboloid $\quad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



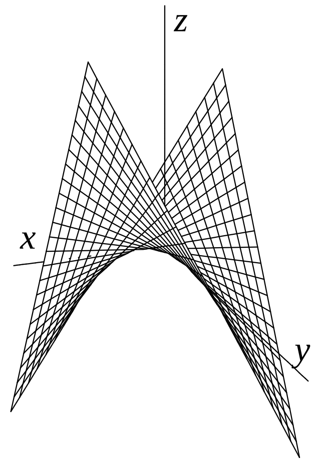
eliptický paraboloid $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z$



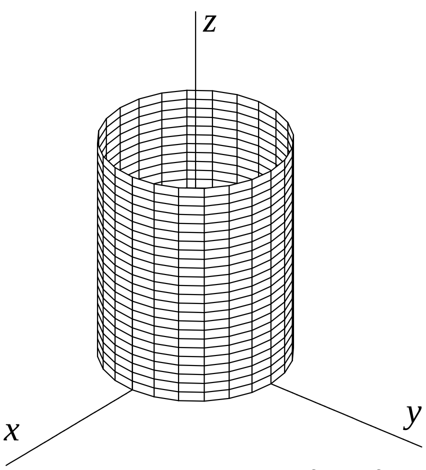
eliptický paraboloid $\quad -\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z$



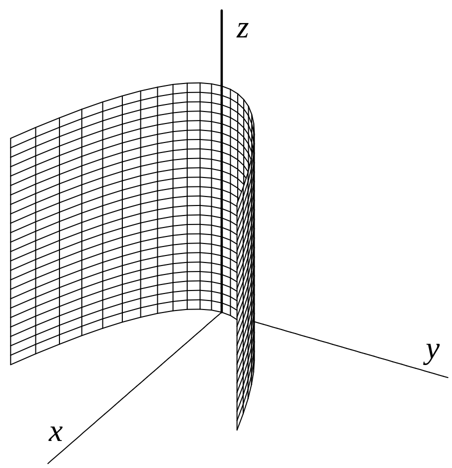
hyperbolický paraboloid $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$



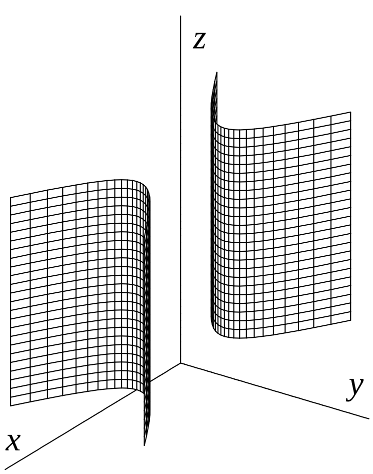
otočený hyperbolický paraboloid $z = axy$



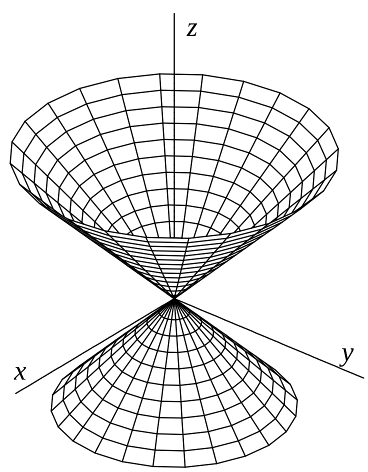
eliptická válcová plocha $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



parabolická válcová plocha $y^2 = 2px.$



hyperbolická válcová plocha $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



kuželová plocha $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$