Matematika II A – 30. 5. 2019

1. a) Ověřte, že rovnicí $F(x,y) = x^3+xy^2-3xy+1 = 0$ je v okolí bodu $[x_0,y_0] = [1;2]$ implicitně určena funkce $y = f(x)$, která má spojitou 1. a 2. derivaci.

b) Určete derivaci $f'(1)$. Popište chování funkce f v okolí bodu $x_0 = 1$, tj. funkce rostoucí, resp. klesající a odhadněte, jak rychle (sklon tečny).

c) Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[1;2]$. Pomocí rovnice tečny vypočítejte přibližně hodnotu funkce f v bodě $x = 0.9$.

d) Určete hodnotu derivace $f''(1)$. Je funkce f v okolí bodu $x_0 = 1$ konvexní nebo konkávní ? Načrtněte tečnu a tvar grafu funkce f v okolí bodu $[x_0,y_0] = [1;2]$.

2. a) Najděte všechny stacionární body a vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = y\,\ln x + x^2 - 2x$ (určete jejich polohu, typ a hodnotu).

b) Určete absolutní extrémy funkce $f(x,y) = -6x - 2xy + x^2 + 3y^2 - 10$ na úsečce $M = \{\,[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\; y = x+2,\; -1 \le x \le 0\}$.

3. Je dán integrál $\iint_D \sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde množina $D = \big\{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\; x^2+y^2 \le 1,\, x \ge 0,\, y \ge 0\big\}$.

a) Načrtněte množinu D. Daný integrál převeďte na dvojnásobný, a to oběma způsoby (s elementárním oborem integrace vzhledem k ose x, resp. k ose y).

b) Zvolte jednu z možností a daný dvojný integrál vypočítejte.

c) Zdůvodněte, zda tento integrál vyjadřuje objem nějakého tělesa. Toto těleso popište (tj. jeho hraniční plochy) a načrtněte.

4. Načrtněte těleso W a jeho průmět W_{xy} do roviny $z = 0$, je-li $W = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\; z \ge x^2+y^2-2,\, z \le 2\big\}$.

Vypočítejte objem tohoto tělesa.

5. Dáno vektorové pole $\vec{f}(x,y) = \Big(x\mathrm{e}^{x^2+1} + y^2; 2xy + \dfrac{4}{\sqrt[3]{y}}\Big)$.

a) Užitím postačujících podmínek ověřte, že dané vektorové pole $\vec{f}$ je potenciální. Určete největší oblast(i) v $\mathbb{E}_2$.

b) Spočtěte jeho potenciál $\varphi(x,y)$. Ověřte (z definice), že získané skalární pole $\varphi(x,y)$ je potenciálem vektorového pole $\vec{f}(x,y)$.

c) Vypočtěte křivkový integrál $\int \vec{f} \cdot d\vec{s}$ od bodu $P = [0;-1]$ do bodu $Q = [1;-8]$.

6. Plocha $\sigma = \big\{[x;y,z] \in \mathbb{E}_3 : z = \sqrt{x^2+y^2}; 1 \le z \le 3\big\}$ je orientována normálovým vektorem $\vec{n}_\sigma$, který má zápornou poslední (třetí, z-ovou) složku.

a) Načrtněte plochu σ včetně její orientace. Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy σ a určete, zda je daná plocha orientováno souhlasně s touto parametrizací.

b) Vypočítejte plošný integrál (vektorové funkce) $\displaystyle\iint_\sigma (-x;-y;z^3)\cdot d\vec{p}$.

Matematika II B – 30. 5. 2019

$\boxed{\textbf{1.}}$ a) Vypočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7x$.

b) Vyšetřete lokální extrémy této funkce, uveďte též funkční hodnoty.

c) Nalezněte globální extrémy (polohu a hodnotu) funkce $g(x,y) = x^2 + 2y - 2x + 3$, na množině dané křivkou $y = x^2, x \in \langle 0; 1 \rangle$.

$\boxed{\textbf{1.}}$ a) Zapište a načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{y^2 - 2}$. Napište rovnici izokřivky této funkce, tj. rovnici $f(x,y) = k$ pro $k = 1$ a izokřivku načrtněte.

b) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce f v bodě $A = [-5;\ 2]$. Popište chování funkce f v tomto bodě v kladném směru osy y, tj. zda funkce je rostoucí či klesající a odhadněte jak rychle (sklon tečny).

c) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[-5;\ 2;\ ?]$. Výsledku použijte pro přibližný výpočet hodnoty dané funkce v bodě $[-4.9; 2.1]$.

d) Určete směr $\vec{s}$ maximálního růstu funkce f v bodě A. Vypočítejte derivaci funkce f v bodě A v tomto směru $\vec{s}$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ a) Načrtněte v $\mathbb{E}_2$ množinu D, která je **v 1. kvadrantu** omezena křivkami $y = x + 2, y = x^2$. Vypočítejte dvojný integrál $\iint_D xy\, dx\, dy$.

b) Uveďte alespoň dva příklady fyzikálního významu tohoto integrálu (hmotnost, resp. statický moment; při jaké hustotě, u momentu též k jaké ose).

$\boxed{\textbf{4.}}$ a) Načrtněte těleso $M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2 + y^2 \le 9,\ 0 \le z \le 2\right\}$. Zakreslete též průmět tělesa M do roviny $z = 0$.

b) Vypočítejte hmotnost tohoto tělesa, je-li hustota $\varrho(x,y,z) = x^2 + y^2$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ a) C je křivka $y = x^2$ s počátečním bodem $A = [1; 1]$ a koncovým bodem $B = [2; 4]$.Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (x\,y,\ x^2)$ působením po této křivce C (tj. křivkový integrál vektorové funkce $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$).

b) Křivka K je úsečka EF, kde $E = [3; 0]$, $F = [2; 3]$. Vypočítejte její hmotnost, je-li délková hustota $\varrho(x,y) = x^2 + y^2$ (tj. křivkový integrál skalární funkce $\int_K \rho(x,y)\, ds$).

$\boxed{\textbf{6.}}$ a) Načrtněte plochu $\sigma = \left\{[x; y, z] \in \mathbb{E}_3 : 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 2; z = x + y^2\right\}$. Navrhněte parametrizaci dané plochy a jejím užitím určete vektor kolmý k této ploše. Vypočítejte délku tohoto vektoru.

b) Vypočítejte plošný integrál (skalární funkce) $\displaystyle\iint_\sigma y\, dp$.

c) Napište dva možné fyzikální významy integrálu z úlohy b).