Předmluva

Cílem semestrální práce je vyzkoušet si zvolenou metodu naprogramovat v Matlabu, na což bude kladen větší důraz, ikdyž bez znalosti teoretických otázek lze dané metody těžko naprogramovat. Odevzdaná práce by se měla skládat z:

- **popisu problému**
- **popisu metody řešení**
- **výsledků -** nejlépe graf s popisky
- **závěru** s komentářem získaných výsledků, zajímavých postřehů či posouzením vhodnosti zvolené metody.
- **přílohy** se skriptem v Matlabu

Odevzdání je možné osobně na samostatném, podepsaném papíře s připraveným skriptem k nahlédnutí; nebo emailem, ke kterému přiložíte vytvořený skript v Matlabu.

PS. Úkoly, které jsem vymyslel sám, jsou značené * a **. Jedna hvězdička znamená vesměs témata ze skript nepokrytá cvičeními, dvě hvězdičky pak rozšíření nad rámec probírané látky. Toto bych doporučil hlavně zájemcům o další studium u nás na katedře matematiky. Pokud jste nenašli to, co by Vás zajímalo, rozhodně se ale nebráním doplnění :).
PPS. Prosím o dodržování nějaké štábní kultury v matlabích skriptech, tj. rozumné značení proměnných, komentáře, co která znamená a odsazení pro přehlednost kódu.
PPPS. Vesměs se jedná o příklady na Matlab ze Sbírky úloh. Proto jestli nevíte, jak začít, vyplatí se začít kontrolou stránek předmětu ⇒ Praktická cvičení v Matlabu.

Úlohy na výběr

1 A - Soustavy lineárních rovnic

1.1 xA1 Podmíněnost matice -Kettner

Semestrální práce A– 1 a) Definujte pozitivně definitní matice.

b) Uveďte jak je definován pojem podmínněnosti matice obecné matice $\mathbb{A}$. Jak lze zjednodušit pro symetrickou matici?

c) **Jsou dány matice a vektory pravých stran**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1.001 & -1 \\ -1 & 1.001 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}^* = \mathbf{b} + (10^{-5}) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Rozhodněte, zda matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou ODD nebo SPD ?

e) Spočtěte číslo podmíněnnosti $\kappa = \lambda_{max}/\lambda_{min}$ pro matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$.

f) Spočtete řešení soustavy rovnic $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\boldsymbol{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$, $\boldsymbol{B}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}$ a $\boldsymbol{B}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_1$. Srovnejte rozdíl $\mathbf{b} - \mathbf{b}_1$ oproti $\mathbf{x} - \mathbf{x}_1$ respektive $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3$. Jak ho lze vysvětlit?

Bonus 1) Zakreslete množinu $\mathcal{M} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{y} = \boldsymbol{A}\mathbf{x}, \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\}$ (bez a s užitím MATLABu). Návod: Pro přibližné vyjádření užijte bázi složenou z normovaných vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$, tj $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2$, $\|\mathbf{u}_i\| = 1$. Vyjádřete vektor $\boldsymbol{A}\mathbf{x}$ v souřadném systému vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$, tj. $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2$. Ukažte, jaká nerovnost platí pro β_i.
MATLAB: Užijte polární souřadnice pro parametrizaci jednotkové kružnice, násobení maticí $\boldsymbol{A}$ a užijte příkaz `plot`.

Bonus 2) Zakreslete množinu $\mathcal{M}_1 = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{y} = \boldsymbol{B}\mathbf{x}, \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\}$.

1.2 xA2 Spektrální poloměr - Hencl

Semestrální práce A– 2

a) Zapište, jak je definována řádková, sloupcová a Euklidovská norma vektoru

b) Zapište, jak je definována řádková, sloupcová a Frobeniova norma matice.

c) Zapište jaký vztah je mezi příslušnou vektorovou a maticovou normou.

d) Uveďte definici pojmu vlastní číslo a vlastní vektor matice. Uveďte definici spektrálního poloměru matice.
Je dána matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n = 10, 50, 100)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

e) Určete řádkovou, sloupcovou i Frobeniovu normu dané matice. Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory. Spočtěte spektrální poloměr.

f) Rozhodněte zda daná matice je ODD nebo SPD. Zdůvodněte.

g) Příkazem `eig` určete vlastní vektory matice. Vyberte vlastní vektory příslušné 2 největším a 2 nejmenším vlastním číslům dané matice. Pro tyto vektory $\mathbf{u} = (u_i)$ zobrazte jejich složky jako graf $[i, u_i]$, tj. např. příkazem `plot(u)`.

h) Spočtěte číslo podmíněnnosti $\kappa(\boldsymbol{A}) = \lambda_{max}/\lambda_{min}$.

1.3 xA3 Spektrální poloměr - Krajník

Semestrální práce A– 3

a) Zapište, jak je definována řádková, sloupcová a Euklidovská norma vektoru

b) Zapište, jak je definována řádková, sloupcová a Frobeniova norma matice.

c) Zapište jaký vztah je mezi příslušnou vektorovou a maticovou normou.

d) Uveďte Sylvestrovo kritérium užívané pro symetrické matice při ověření pozitivní definitnosti.

e) **Je dána matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$**, kde ($n = m^2$, $m = 5, 20$) jako blokově třídiagonální matice ($\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{E} & 0 & & \dots & 0 \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{E} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{E} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}, \text{ kde } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

f) Určete řádkovou, sloupcovou i Frobeniovu normu dané matice.

g) Rozhodněte zda daná matice je ODD nebo SPD. Zdůvodněte.

h) Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory. Spočtěte spektrální poloměr.

i) Příkazem `eig` určete vlastní vektory matice. Vyberte vlastní vektory příslušné 2 největším a 2 nejmenším vlastním číslům dané matice.

j) Spočtěte číslo podmíněnnosti $\kappa(\boldsymbol{A}) = \lambda_{max}/\lambda_{min}$.

1.4 xA4 Maticové normy - Kubrová

Semestrální práce A– 4 Je dána soustava ve tvaru $X = \boldsymbol{U}X + V$.

a) Zapište, jak je definován spektrální poloměr matice $\boldsymbol{U}$.

b) Jak se počítají aproximace řešení pomocí prosté iterační metody?

c) Definujte, co znamená, že prostá iterační metoda je pro danou soustavu rovnic konvergentní!

d) Jaká je nutná a postačující podmínka konvergence této metody?

e) Uveďte v jakém případě není metoda konvergentní.

Je dána matice typu $n \times n$ $(n = 10, 100, 500)$

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

f) Určete řádkovou, sloupcovou i Frobeniovu normu dané matice. Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory. Spočtěte spektrální poloměr.

g) Rozhodněte zda daná matice je ODD nebo SPD.

h) Užijte vzorce pro odhad chyby pro prostou iterační metodu ze Skript a odhadněte kolik je potřeba iterací prosté iterační metody pro dosažení přesnosti $\varepsilon = 10^{-6}$ pro zadané matice $\boldsymbol{U}$. V odhadu místo normy užijte spektrální poloměr, a uvažte uvodní velikost chyby $\|e^0\| = \|u^1 - u^0\| = 1$.

i) Vyřešte soustavu $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$, kde je zádáno $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{U}$ pomocí metody prosté iterace, tj. využijte vzoreček $\vec{x} = \vec{x} + \omega(\vec{b} - \boldsymbol{A}\vec{x})$ a upravte danou soustavu do tvaru $\vec{x}^{k+1} = \boldsymbol{V}\vec{x}^k + \vec{v}$. Zvolte $\omega = 1$ a spočítejte, čemu se rovná $\boldsymbol{V}$ a $\vec{v}$. Pak proveďte k iterací, tj. počet, který jste získali v bodě h) a vypište velikost rezidua $rez = \|\vec{b} - \boldsymbol{A}\vec{x}^k\|$ např. v eukleidovské normě.

1.5 xA5 Maticové normy - Klárová

Semestrální práce A– 5 Je dána soustava ve tvaru $X = \boldsymbol{U}X + V$.

a) Zapište, jak je definován spektrální poloměr matice $\boldsymbol{U}$.

b) Jak se počítají aproximace řešení pomocí prosté iterační metody?

c) Definujte, co znamená, že prostá iterační metoda je pro danou soustavu rovnic konvergentní!

d) Jaká je nutná a postačující podmínka konvergence této metody?

e) **Je dána matice** $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde ($n = m^2$, $m = 10, 100$) jako blokově třídiagonální matice ($\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & -\frac{1}{4}\boldsymbol{E} & 0 & & \dots & 0 \\ -\frac{1}{4}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} & -\frac{1}{4}\boldsymbol{E} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{4}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} & -\frac{1}{4}\boldsymbol{E} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{4}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}, \text{ kde } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 & & \dots & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

f) Určete řádkovou, sloupcovou i Frobeniovu normu dané matice. Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory. Spočtěte spektrální poloměr.

g) Rozhodněte zda daná matice je ODD nebo SPD. Zdůvodněte.

h) Příkazem `eig` určete vlastní vektory matice. Vyberte vlastní vektory příslušné 2 největším a 2 nejmenším vlastním číslům dané matice. Pro tyto vektory $\mathbf{u} = (u_i)$ zobrazte jejich složky jako graf $[i, u_i]$, tj. např. příkazem `plot(u)`.

i) Spočtěte číslo podmíněnnosti $\kappa(\boldsymbol{A}) = \lambda_{max}/\lambda_{min}$.

1.6 xA6 Gauss-Seidel - Hubáček

Semestrální práce A– 6 a) Jakým iteračním postupem se počítají aproximace řešení dané soustavy rovnic pomocí Jacobiho iterační metody?

b) Jakým iteračním postupem se počítají aproximace řešení dané soustavy rovnic pomocí Gaussovy-Seidelovy iterační metody?

c) Uveďte jaké vlastnosti matice $\boldsymbol{A}$ jsou postačující k tomu, aby byla Jacobiova iterační metoda konvergentní.

d) Uveďte jaké vlastnosti matice $\boldsymbol{A}$ jsou postačující k tomu, aby byla Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní.

e) Jaká je nutná a postačující podmínka konvergence Jacobiovy metody?

f) Jaká je nutná a postačující podmínka konvergence Gaussovy-Seidelovy metody?

Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\text{(i) } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{nebo} \qquad \text{(ii) } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

g) Ověřte, zda pro danou matici $\boldsymbol{A}$ je Gauss-Seidelova iterační metoda konvergetní.

h) Ověřte, zda pro danou matici $\boldsymbol{A}$ je Jacobiova iterační metoda konvergetní.

i) Pro oba případy spočítejte pomocí vlastního programu v MATLABu a vypište řešení při zadané toleranci $\varepsilon = 10^{-6}$. Kolik iterací bylo potřeba pro dosažení zadané přesnosti?

1.7 xA7 Gauss-Seidel - Minka

Semestrální práce A– 7 a) Jakým iteračním postupem se počítají aproximace řešení dané soustavy rovnic pomocí Jacobiho iterační metody?

b) Jakým iteračním postupem se počítají aproximace řešení dané soustavy rovnic pomocí Gaussovy-Seidelovy iterační metody?

c) Uveďte jaké vlastnosti matice $\boldsymbol{A}$ jsou postačující k tomu, aby byla Jacobiova iterační metoda konvergentní.

d) Uveďte jaké vlastnosti matice $\boldsymbol{A}$ jsou postačující k tomu, aby byla Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní.

e) Jaká je nutná a postačující podmínka konvergence Jacobiovy metody?

f) Jaká je nutná a postačující podmínka konvergence Gaussovy-Seidelovy metody?

Je dána matice typu $n \times n$ $(n = 10, 100, 1000)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

g) Rozhodněte, zda pro danou matici je Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní.

h) Rozhodněte, zda pro danou matici je Jacobiova iterační metoda konvergentní.

i) Volte $\mathbf{b} = (1, \dots, 1)^T$. Řešte soustavu rovnic s maticí $\boldsymbol{A}$ pomocí Jacobiova iterační metody. Spočtěte n iterací a určete reziduum.

j) Proveďte totéž užitím Gaussovy-Seidelovy iterační metody. Srovnejte rychlost konvergence.

1.8 xA8 Gauss-Seidel - Vychopeň

Semestrální práce A– 8 a) Jakým iteračním postupem se počítají aproximace řešení dané soustavy rovnic pomocí Jacobiho iterační metody?

b) Jakým iteračním postupem se počítají aproximace řešení dané soustavy rovnic pomocí Gaussovy-Seidelovy iterační metody?

c) Uveďte jaké vlastnosti matice $\boldsymbol{A}$ jsou postačující k tomu, aby byla Jacobiova iterační metoda konvergentní.

d) Uveďte jaké vlastnosti matice $\boldsymbol{A}$ jsou postačující k tomu, aby byla Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní.

e) Jaká je nutná a postačující podmínka konvergence Jacobiovy metody?

f) Jaká je nutná a postačující podmínka konvergence Gaussovy-Seidelovy metody?

Je dána matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde ($n = m^2$, $m = 5, 50$) jako blokově třídiagonální matice ($\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{E} & 0 & & \dots & 0 \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{E} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{E} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}, \text{ kde } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

g) Rozhodněte, zda pro danou matici je Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní.

h) Rozhodněte, zda pro danou matici je Jacobiova iterační metoda konvergentní.

i) Volte $\mathbf{b} = (1, \dots, 1)^T$. Řešte soustavu rovnic s maticí $\boldsymbol{A}$ pomocí Jacobiova iterační metody. Spočtěte 1000 iterací a určete reziduum.

1.9 A9** Řídké matice

Semestrální práce A– 9

1. Vysvětlete, co je to řídká matice.
2. Jak se taková matice ukladá, uveďte alespoň jeden formát uložení, např. Matrix Market.
3. Jako příklad vezměte následující matici:
   Je dána matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde $(n = 10, 100, 1000)$, jako třídiagonální matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Pomocí příkazu *whos* určete velikost spotřebované paměti pro uložení v řídkém a plném formátu.
5. Zobrazte strukturu matice, příkaz *spy*.
6. Jak lze matici uložit na disk, tj. vypsat?
7. Spočítejte 10 největších vlastních čísel.
8. Pomocí Gaussovy-Seidelovy iterační metody spočítejte řešení $\boldsymbol{A}x = b$, kde $b = (1 \dots 1)^T$ a zobrazte ho.

1.10 A10* Superrelaxační metoda

Semestrální práce A– 10

1. Rozepište vztahy pro Jacobiho a Gaussovu-Seidelovu metodu.
2. Co je superrelaxační metoda? Jak spočítat další iteraci přibližného řešení?
3. Jak volit parameter relaxace?
4. Řešte soustavu $\boldsymbol{A}x = b$, kde $b = (1 \dots 1)^T$ a matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kde $(n = 10, 100, 1000)$, je třídiagonální matice
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
5. Srovnejte rychlost konvergence vůči GS a v závislosti na parametru relaxace.

1.11 A11** Konjugované gradienty

Semestrální práce A– 11

1. Vysvětlete myšlenku metody konjugovaných gradientů.
2. Zapište kroky algoritmu a naprogramujte ho.
3. Řešte soustavu $\boldsymbol{A}x = b$, kde $b = (1 \dots 1)^T$ a matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kde $(n = 10, 100, 1000)$, je třídiagonální matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Vypište řešení, určete počet potřebných iterací a spotřebovaný čas pomocí příkazu *tic, toc*.

1.12 A12* Srovnání iteračních metod

Semestrální práce A– 12 1. Rozepište vztahy pro Jacobiho a Gaussovu-Seidelovu metodu.

2. Řešte soustavu $\boldsymbol{A}x = b$, kde $b = (1 \dots 1)^T$ a matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kde $(n = 100)$, je třídiagonální matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Srovnejte rychlosti konvergence prosté iterace, Jacobiho, GS a superrelaxační metody (nebo prosté iterace pro různé volby parametru ω viz Skripta). Nejlépe pomocí příkazu *tic, toc.*

2 B - LSQ, nelineární rovnice

2.1 xB1 Metoda nejmenších čtverců - Kopecký

Semestrální práce B– 1 Je dána tabulka hodnot x_i, y_i, $i = 1, \ldots n$.

a) Vysvětlete princip metody nejmenších čtverců při aproximaci dané tabulkou hodnot polynomem nejvýše 1. stupně.

b) Zapište kvadratickou odchylku $\delta^2(p(x))$ polynomu $p(x)$ nejvýše prvního stupně od dané tabulky hodnot.

c) Uveďte jaká podmínka má platit pro kvadratickou odchylku polynomu nejvýše 1. stupně $p^*(x)$, který danou tabulku hodnot aproximuje nejlépe ve smyslu nejmenších čtverců.

d) Zdůvodněte, jak se z části c) odvodí soustava normálních rovnic. Odvoďte soustavu normálních rovnic pro daný případ.

e) Vysvětlete princip metody nejmenších čtverců při aproximaci dané tabulkou hodnot polynomem nejvýše 2. stupně. Odvoďte soustavu normálních rovnic pro daný případ.

f) Odvodte soustavu normálních rovnic pro tento případ.

g) Vyberte si jednu z datových sad:

- Růst globální teploty
- Vývoj českého HDP
- Koeficient teplotní roztažnosti mědi

Sestavte soustavu normálních rovnic pro zvolenou tabulku dat a to pro 4 případy $n = 1, 2, 3, 4$.

h) Příkazem `plot` zobrazte data z tabulky hodnot, a zobrazte všechny 4 interpolační polynomy. Polynom jakého řádu odpovídá/aproximuje data nejlépe?

2.2 xB2 Newtonova metoda - Paťha

Semestrální práce B– 2 Dána rovnice

$$f(x) = 0$$

a) Zapište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_n.

b) Graficky znázorněte graf funkce $f(x)$ a tečnu ke grafu funkce v bodě x_n. Zakreslete průsečík této tečny s osou x (tj. $y = 0$), označte ho jako $[x_{n+1}, 0]$.

c) Z rovnice tečny a) vyjádřete x_{n+1}.

Uvažujme funkci

$$f(x) = x^5 + 3x^2 - cos(x).$$

d) Ukažte, že v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ existuje alespoň jeden kořen rovnice $f(x) = 0$. Zdůvodněte.

e) Naprogramujte Newtonovou iterační metodu a použijte $x_0 = 0$.

f) Zkuste totéž pro $x_0 = \pi$ (nebo jakou lepší volbu navrhujete?) a okomentujte výsledek.

2.3 xB3 Newtonova metoda - Zemánek

Semestrální práce B– 3 Dány rovnice

$$f(x,y) = 0, \qquad g(x,y) = 0$$

a) Zapište rovnici tečné roviny $\mathcal{T}_1$ ke grafu funkce $f(x,y)$ v bodě $X^{(n)} = (x_n, y_n)^T$.

b) Zapište rovnici tečné roviny $\mathcal{T}_2$ ke grafu funkce $g(x,y)$ v bodě $X^{(n)} = (x_n, y_n)^T$.

c) Sestavte soustavu lineárních rovnic pro společný průsečík P rovin $z = 0$ a rovin $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$.

d) Označme $X^{(n+1)} = (x^{(n+1)}, y^{(n+1)})^T = P$ a z předchozí rovnice vyjádřete $X^{(n+1)}$.

e) Určete graficky přibližnou polohu kořenů soustavy

$$\frac{1}{x} - 10y = 0, \qquad x^2 + 16y^2 = 4.$$

f) Naprogramujte Newtonovu iterační metodu a spočítejte jeden z kořenů soustavy pro volbu $X^{(0)} = (1;1)^T$. Kolik iterací je potřeba při zadané přesnosti řešení $\varepsilon = 10^{-5}$?

2.4 xB4* Upravená metoda nejmenších čtverců - Koktan

Semestrální práce B– 4 Je dána tabulka hodnot x_i, y_i, $i = 1, \dots n$.

a) Očekáváme závislost $y(x) = Ce^x$. Jak použít metodu nejmenších čtverců (s polynomem 1. stupně) pro tento případ?

b) Odvoďte upravenou metodu = vypište rovnice.

c) Naprogramujte ji.

d) Vykreslete do grafu zadané body, získanou interpolaci a případ, kdy jste použili klasickou metodu nejmenších čtverců pro lineární polynom.

e) Jako tabulku hodnot použijte například zdroj http://www.worldometers.info/world-population/world-population-by-year/.

f) Jak se změní chování, když si do tabulky vyberu jen data z 20. století?

3 C - Obyčejné diferenciální rovnice

3.1 xC1 Eulerova metoda - Novotný

Semestrální práce C– 1 a) Uveďte postačující předpoklady pro existenci a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

b) Napište vzorec pro Eulerovu explicitní metodu. Jakého řádu přesnosti je? (Vyplývá z náhrady derivace přibližnou diferencí a vlastností Taylorůva polynomu..)

Je dána Cauchyova úloha

$$X' = \begin{pmatrix} -0.5 & 20 \\ -20 & -0.5 \end{pmatrix} X, \qquad X(0) = (1, 0)^T$$

Numericky dále řešte:

c) Užijte krok $h = 0.1$ a spočtěte aproximaci řešení $X(0.5)$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

d) Užijte krok $h = 0.5$ a spočtěte aproximaci řešení $X(0.5)$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

e) Užijte krok $h = 0.01$ a spočtěte aproximaci řešení na $\langle 0, 2\rangle$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

f) Užijte krok $h = 0.01$ a spočtěte aproximaci řešení na $\langle 0, 2\rangle$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

g) Příkazem plot zobrazte graf 1. a 2. složky přibližného řešení z c), d).

h) Užijte krok $h = 0.005$ a spočtěte aproximaci řešení na $\langle 0, 2\rangle$ pomocí explicitní Eulerovy metody. Srovnejte s výsledkem c).

Bonus) Výsledky z c) a d) srovnejte s přesným řešením.

3.2 C2 Eulerova metoda teorie

Semestrální práce C– 2 a) Definujte, co znamená zápis $\eta(h) = \mathcal{O}(h^p)$.

b) Ukažte, že pro dostatečně hladkou funkci $y(x)$ platí oba následující vztahy

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = y'(x) + \mathcal{O}(h), \qquad \frac{y(x) - y(x-h)}{h} = y'(x) + \mathcal{O}(h).$$

Upřesněte, co v tomto případě znamená dostatečně hladká funkce.

c) Užijte 2. vztah a odvoďte vztah pro implicitní Eulerovu metodu.

d) Ukažte, že pro dostatečně hladkou funkci $y(x)$ platí

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = y'(x + h/2) + \mathcal{O}(h^2).$$

Upřesněte, co v tomto případě znamená dostatečně hladká funkce.

e) Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ je vlastní vektor matice $\boldsymbol{A}$ příslušný reálnému vlastnímu číslu $\lambda < 0$. Je dána Cauchyova úloha

$$Y' = \boldsymbol{A}Y, Y(0) = \mathbf{u},$$

f) Určete řešení Cauchyovy úlohy a ukažte, že platí $|Y(x)| \leq |Y(0)|$ pro $x > 0$.

g) Je dáno $h > 0$. Určete aproximaci řešení $Y^{(j)}$ v bodech $x_j = jh$ pomocí explicitní Eulerovy metody. Určete jaká podmínka musí platit pro h tak, aby platilo $|Y^{(j)}| \leq |Y^{(0)}|$ pro $j \geq 0$.

h) Je dáno $h > 0$. Určete aproximaci řešení $Y^{(j)}$ v bodech $x_j = jh$ pomocí implicitní Eulerovy metody. Určete jaká podmínka musí platit pro h tak, aby platilo $|Y^{(j)}| \leq |Y^{(0)}|$ pro $j \geq 0$.

i) Jak se podmínka (pro λh) z části b) nebo c) změní v případě, že vlastní číslo λ a vlastní vektor $\mathbf{u}$ budou komplexní, $\operatorname{Re}\lambda < 0$? Zakreslete oblasti v komplexní rovině, v kterých číslo $z = \lambda h$ musí v těchto případech ležet.

3.3 xC3 Eulerova metoda - Janů

Semestrální práce C– 3 a) Popište explicitní a implicitní Eulerovu metodu. Jakého řádu přesnosti jsou?

b) Spočítejte přesná řešení

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \qquad y' = 1, \quad y(0) = D > 0,\\
&\text{b)} \qquad y' = y, \quad y(0) = D > 0,\\
&\text{c)} \qquad y' = -4y, \quad y(0) = D > 0,\\
&{}^{*}\text{d)} \qquad y' = y(1-y), \quad y(0) = 0.05.
\end{aligned}
$$

c) Užijte explicitní a implicitní Eulerovu metodu s krokem $h = 0.1$ a určete přibližné řešení úlohy Y^j v bodech $x_j = jh$ pro $j = 1, 2, 3 \dots 10 \dots n$. Vykreslete je do jednoho obrázku s přesnými. Byl krok h zvolen dobře?

3.4 xC4 Collatzova metoda - Jiroudová

Semestrální práce C– 4

a) Čím se liší Collatzova metoda a explicitní Eulerova metoda? (Popište Collatze a pak shrňte rozdíly).

b) **Je dána Cauchyova úloha**

$$y' = 100y(1-y), \quad y(0) = 0.5$$

c) Ověřte, zda a v jaké oblasti má daná úloha má právě jedno řešení.

d) Ukažte, že pro řešení dané úlohy platí $0 \leq y(x) \leq 1$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.

e) Volte $h = 0.1$ a určete přibližné řešení $y(1.0)$ explicitní Eulerovou metodou.

f) Volte $h = 0.1$ a určete přibližné řešení $y(1.0)$ Collatzovou metodou.

3.5 xC5 Oscilátor - Krubner

Semestrální práce C– 5 a) Zapište vzorce pro Collatzovu metodu a metodu Runge-Kutta 4. řádu.

b) Transformujte soustavu obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu na soustavu 1.řádu

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = \frac{1}{10t+1}\sin(50\pi t), \qquad x(0) = 0.05, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

kde $m = 0.1$, $k = 4.2$. Tato rovnice popisuje výchylku mechanického oscilátoru $x(t)$.

c) Určete obecný fundamentální systém řešení homogenní rovnice a speciálně určete frekvenci jeho kmitů pro netlumený případ ($d = 0$).

d) Pro $d = 0.001$ určete přibližně kořeny charakteristické rovnice. Na základě výsledků z předchozího bodu a kořenů charakteristické rovnice rozhodněte, zda volba kroku $h = 0.2$ je vhodná pro Eulerovu explicitní metodu.

e) Volte krok h vhodně a užijte Collatzovu metodu pro určení hodnot řešení tlumené nehomogenní rovnice v intervalu $[0, 3]$. Vykreslete řešení.

Bonus) Volte krok h vhodně a užijte RK4 pro určení hodnot řešení v intervalu $[0, 3]$. Vykreslete řešení.

3.6 xC6 Kyvadlo - Kalombo

Semestrální práce C– 6 a) Zapište vzorce pro Collatzovu metodu a metodu Runge-Kutta 4. řádu.

b) Transformujte soustavu obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu na soustavu 1.řádu

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0, \qquad \varphi(0) = \frac{\pi}{3}, \dot{\varphi} = 0.$$

která popisuje kmity fyzikálního kyvadla ($g = 9.81$, $l = 50$).

c) Volte krok $h = 0.01$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou hodnotu φ v čase $t = 0.1$.

d) Na základě odhadu vlastní frekvence dané rovnice rozhodněte, zda je volba kroku h pro danou rovnici vhodná?

e) Zvolte krok h vhodně. Nalezněte přibližné řešení s krokem h v intervalu $< 0, 5 >$. Užijte Collatzovu metodu nebo RK4. Výsledné hodnoty zobrazte příkazem `plot` a srovnejte s explicitní Eulerovou metodou.

f) Řešte numericky linearizovnou rovnici $\sin\varphi \approx \varphi$, tzv. rovnici matematického kyvadla. Volte krok $h = 0.01$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou hodnotu φ v čase $t = 0.1$.

g) Vyřešte totéž metodou RK4 nebo Collatzem a srovnejte s explicitní Eulerovou metodou.

h) Srovnejte výsledky metod vyššího řádu pro linearizovanou rovnici ($\sin\varphi \approx \alpha$) a rovnici fyzikálního kyvadla.

3.7 xC7 Křídlo letadla - Přibyl

Semestrální práce C– 7 Uvažujme tuhé (rovinné) těleso o hmotnosti $m = 0.2$, momentu setrvačnosti $I_\alpha = 0.001$ a statickém momentu $S_\alpha = me$, $e = 0.0001$ (vše vztaženo k ose rotace). Tuhosti pružin jsou dány $k_h = 0.105$, $k_\alpha = 103$. Deformace (pohyb) tělesa je popsána pomocí rotace α a výchylky h rovnicí

$$\begin{pmatrix} m & S_\alpha \\ S_\alpha & I_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05 \sin(100\pi t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{ll} h(0) = 0.01, & \dot{h}(0) = 0, \\ \alpha(0) = 0.01, & \dot{\alpha}(0) = 0, \end{array}$$

a) Užijte explicitní Eulerovu metodu s krokem $\tau = 0.01$ a určete přibližnou hodnotu natočení α a výchylky h v čase $t = 0.01$. (Pozn. Pozor na výpočet hodnot funkce sinus, argument udáván v rad).

b) Zopakujte totéž pomocí Collatzovy metody, $\alpha(0.01), h(0.01) \approx ?$.

c) Nalezněte přibližné řešení Collatzovou metodou (nebo RK4) s krokem $\tau = 0.001$ v intervalu $< 0, 5 >$.

Bonus) Volte poloviční krok $\tau/2$ a srovnejte výsledky. Grafy řešení zobrazte.

3.8 xC8 Volný pád - Kolouch

Semestrální práce C– 8 a) Zapište vzorce pro Collatzovu metodu a metodu Runge-Kutta 4. řádu.

b) Transformujte soustavu obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu na soustavu 1.řádu

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \qquad m\ddot{y} = -mg - k\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \qquad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = A,\ y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 4,$$

kde $m = 0.1$, $g = 9.81$. Tato soustava ODR popisuje poloha hmotného bodu ($[x(t), y(t)]$) o hmotnosti m v rovinném gravitačním poli s koeficientem odporu prostředí $k = 0.01$.

c) Pro $A = 0$ volte krok $h = 0.05$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou polohu hmotného bodu v čase $t = 0.1$.

d) Pro $A = 0$ volte krok $h = 0.05$, užijte Collatzovu metodu a určete přibližnou polohu hmotného bodu v čase $t = 0.1$.

e) Volte $A = 3$. Určete přibližně čas, místo a rychlost dopadu pomocí Collatzovy metody. Nakreslete trajektorii.

3.9 xC9 Okrajová úloha - Špaček

Semestrální práce C– 9 Je dána Dirichletova okrajová úloha pro obyčejnou diferenciální rovnici v samoadjungovaném tvaru

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x) \qquad y(a) = A, y(b) = B.$$

a) Zapište podmínky, které jsou postačující pro existenci a jednoznačnost řešení této okrajové úlohy.

b) Užitím Taylorova rozvoje určete koeficienty α, β, δ a neznámou funkci $\eta(x^*, h)$ tak aby platilo

$$g(x^* + h) - g(x^* - h) = \alpha h g'(x^*) + \beta h^2 g''(x^*) + \eta(x^*, h) h^\delta$$

c) Užitím Taylorova rozvoje ukažte, že (uveďte za jakých předpokladů na funkci g)

$$g(x^* + h) - 2g(x^*) + g(x^* - h) = h^2 g''(x^*) + O(h^4).$$

d) Odvoďte náhradu v uzlu $x = x_i$ výrazu $-(p(x)y')'$ a určete jaké chyby se dopustíte.

$$-(p(x)y')'|_{x=x_i} \approx$$

e) Odvoďte náhradu rovnice v uzlu $x = x_i$.

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x).$$

Je dána Dirichletova okrajová úloha

$$-y'' = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad y(-4) = -3, y(4) = 2.$$

f) Volte krok $h = 0.2$, sestavte soustavu rovnic a nalezněte přibližné řešení.

g) Volte krok $h = 0.1$, sestavte soustavu rovnic a nalezněte přibližné řešení.

h) Volte krok $h = 0.05$, sestavte soustavu rovnic a nalezněte přibližné řešení.

i) Volte krok $h = 0.005$, sestavte soustavu rovnic a nalezněte přibližné řešení.

j) Srovnejte předchozí řešení s řešením přesným. Zobrazte chybu.

3.10 xC10* RK metody - Sieratovský

Semestrální práce C– 10

a) Zapište Runge-Kutta metody pro 2. a 3. řád.

b) V čem se liší od více-krokových metod?

c) Naprogramujte je.

d) Řešte pomoci nich rovnici $y' = x\sqrt[3]{y}, \quad y(0) = 1$. Určete přibližné řešení úlohy $y(0.5)$ pro zvolený krok $h = 0.1, 0.05$ a 0.01.

e) Srovnejte dané výsledky s analytickým řešením a vykreslete.

3.11 xC11** Metoda prediktor-korektor - Dolejšová

Semestrální práce C– 11

a) Vysvětlete metodu prediktor-korektor popsanou v dalších zdrojích, viz např `http://physics.ujep.cz/~jskvor/NME/DalsiSkripta/Numerika.pdf` nebo wikipedie.

b) V čem se liší od klasických RK metod?

c) Naprogramujte ji.

d) Řešte pomoci ní rovnici $y' = x\sqrt[3]{y}, \quad y(0) = 1$. Určete přibližné řešení úlohy $y_{num}(0.5)$ pro zvolený krok $h = 0.1$ a 0.01.

e) Srovnejte dané výsledky s analytickým řešením a vykreslete.

3.12 C12** Řízení délky kroku

Semestrální práce C– 12 a) Jak odhadnout velikost chyby? Vysvětlete metodu půlení kroku. Viz např. `http://physics.ujep.cz/~jskvor/NME/DalsiSkripta/Numerika.pdf`.

b) Uveďte vzoreček.

c) Naprogramujte explicitní Eulerovu metodu s řízením délky kroku.

d) Řešte pomoci ní rovnici $y' = x\sqrt[3]{y}, \quad y(0) = 1$. Určete přibližné řešení úlohy $y_{num}(0.6)$ pro zvolený počáteční krok $h = 0.2$.

e) Srovnejte dané výsledky s Collatzovou metodou s $h = 0.2$ a také analytickým řešením a vykreslete je.

3.13 xC13* Řád konvergence - Vacek

Semestrální práce C– 13 a) Je zadána rovnice $y' = x\sqrt[3]{y}, \quad y(0) = 1$. Spočítejte analytické řešení.

b) Naprogramujte metody: explicitní Euler, Collatz (a případně RK3). Nejlépe jako samostatné funkce, kterým předáte funkci pravé strany, počáteční podmínku, časový krok a konečný čas, tj. např. `EEuler(@(x,y) cos(x)+5*y, y0, h, T)`.

c) Určete přibližné řešení úlohy $y_{num}(0.5)$ pomocí Eulerovy a Collatzovy metody s použitím kroků $h = 0.1, 0.05$, 0.025 a 0.0125.

d) Spočítejte relativní chybu podle vzorečku při zvoleném kroku h jako

$$E_h = \frac{|y_{num,h}(0.5) - y(0.5)|}{|y(0.5)|},$$

kde $y(x)$ značí analytické řešení. Následně určete experimentální řád konvergence α

$$\alpha = \frac{\log\left(\frac{E_{h1}}{E_{h2}}\right)}{\log\left(\frac{h1}{h2}\right)}$$

kde E_h označuje velikost chyby při použití kroku h.

e) Spočítejte α mezi $h1$ a $h2$, $h2$ a $h3$ a pak mezi $h3$ a $h4$ pro obě dvě naprogramované metody a vyneste do tabulky. Shoduje se s očekávaným řádem zvolené metody?

3.14 xC14** Newmarkova metoda - Bartoš

Semestrální práce C– 14 a) Popište Newmarkovu metodu popsanou v dalších zdrojích, viz např. `https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/61344/RPTX_2011_2_11320_0_387332_0_127003.pdf?` str. 46, vztahy (3.47); nebo jinde.

b) Jaké má výhody a nevýhody?

c) Řešte pomocí ní buď úlohu mechanického oscilátoru pro neznámou výchylku $x(t)$ ve tvaru

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = \frac{1}{10t+1}\sin(50\pi t), \qquad x(0) = 0.05, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

kde $m = 0.1$, $k = 4.2$, $d = 0.001$.

d) Vykreslete a popište přibližné řešení pro $t \in [0, 3]$, udejte hodnotu všech zvolených parametrů, tj. β, γ, h.

3.15 C15* Implicitní Eulerova metoda

Semestrální práce C– 15 a) Popište implicitní Eulerovu metodu.

b) Jaké má výhody a nevýhody?

c) Řešte pomocí ní buď úlohu

$$y' = e^{-x} - y^2, \qquad y(0) = 1.$$

Pro vyřešení vzniklé diferenční rovnice použijte Newtonovu metodu. Volte krok $h = 0.5$.

d) Vykreslete a popište přibližné řešení pro $x \in [0, 3]$. Srovnejte ho řešení s jemnějším krokem $h = 0.1$ a následně ještě řešením získaným pomocí explicitní Eulerovy metody a jemným krokem.

4 D - Parciální diferenciální rovnice

4.1 D1 Poissonova úloha

Semestrální práce D– 1 Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\triangle u = f \text{ v oblasti } \Omega.$$

a) Uveďte o jaký typ rovnice se jedná a pomocí parciálních derivací rozepište symbol $\triangle u$.

b) Zapište Dirichletovu okrajovou podmínku.

c) Vysvětlete princip metody sítí.

d) Vysvětlete pojem regulární, neregulární a hraniční uzel sítě.

e) Jak nahradíte $y'(x_i)$ tak, aby aproximace byla 2.řádu přesnosti?

f) Jak nahradíte $y''(x_i)$ tak, aby aproximace byla 2.řádu přesnosti?

g) Zapište, jak se v regulárním uzlu $P_{i,j} = [x_i, y_j]$ nahradí parciální derivace uvedené v části a). Odvoďte rovnici pro náhradu dané Poissonovy rovnice metodou sítí v regulárním uzlu $P_{i,j}$.

h) Odvoďte náhradu v neregulárním uzlu Q pomocí lineární interpolace.

Je dána Dirichletova úloha

$$-\Delta u = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

v oblasti $\Omega =< 0, 1 >^2$ s okrajovou podmínkou $u(x, y) = xy$ na hranici $\partial\Omega$.

a) Volte $h = \frac{1}{n+1}$ pro $n = 10, 40, 160$.

b) Pomocí předchozích vztahů naprogramujte řešení dané Dirichletovy úlohy.

c) Vzniklou soustavu lineárních rovnic řešte pomocí Gaussovy-Seidelovy iterační metody.

4.2 xD2 Rovnice vedení tepla - Novák

Semestrální práce D– 2 Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla ($x \in [0, L]$, $t \geq 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(x,0) = \varphi(x), \quad u(0,t) = \alpha(t), \quad u(L,t) = \beta(t).$$

a) Zapište podmínky souhlasu pro danou úlohu a zdůvodněte, proč mají platit.

b) Pomocí Taylorova rozvoje ukažte, že výraz $\frac{1}{\tau}(U_i^{(k+1)} - U_i^{(k)})$ je aproximací $\frac{\partial u}{\partial t}$ v uzlu $P_i^{(k)}$ řádu $\mathcal{O}(\tau)$ pro $u \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$

c) Pomocí Taylorova rozvoje ukažte, že výraz $\frac{1}{h^2}(U_{i+1}^{(k)} - 2U_i^{(k)} + U_{i-1}^{(k)})$ je aproximací $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v uzlu $P_i^{(k)}$ řádu $\mathcal{O}(h^2)$ pro $u \in C^{(4)}(\bar{\Omega})$

d) Odvoďte explicitní schéma pro řešení smíšené úlohy. Zapište podmínku stability schématu.

e) Odvoďte implicitní schéma pro řešení smíšené úlohy (jak nahradíte $\frac{\partial u}{\partial t}$ v uzlu $P_i^{(k+1)}$?). Zapište podmínku stability schématu.

Je dána smíšená úloha $\frac{\partial u}{\partial t} = 0.5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t}$ s počáteční podmínkou $u(x,0) = \sin(\pi x)$ pro $x \in \langle 0; 1\rangle$, a okrajovými podmínkami

$$u(0,t) = 0 \qquad u(1,t) = 0 \qquad \text{pro } t \geq 0$$

Následně řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0,1) \times (0,1)$ a rozhodněte, jestli je splněna podmínka stability. Výsledek zobrazte.

- Volte krok $h = 0.2$ a $\tau = 0.05$.
- Volte krok $h = 0.2$ a $\tau = 0.025$.
- Volte krok $h = 0.1$ a $\tau = 0.01$.
- Volte krok $h = 0.05$ a $\tau = 0.01$.

f) Pro volbu $h = 0.2$ a $\tau = 0.025$ řešte implicitním schematem.

4.3 D3 Vlnová rovnice

Semestrální práce D– 3 a) Zapište podmínky souhlasu pro smíšenou úlohu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad \text{v oblasti } Q_T = (a;b) \times (0;\infty) \\ u(x,0) &= \varphi(x)\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \qquad \text{pro } x \in \langle a;b \rangle \\ u(a,t) &= \alpha(t)\ , \quad u(b,t) = \beta(t) \qquad \text{pro } t \in \langle 0;\infty) \end{aligned}$$

b) Užijte počáteční podmínky, Taylorův rozvoj a určete hodnoty přibližných řešení na první časové vrstvě. Členy druhého a vyšších řádů zanedbejte.

c) Odvoďte soustavu síťových rovnic pro určení přibližných hodnot řešení $(k+1)$-ní časové vrstvě $(k \geq 1)$ explicitní metodou.

d) Odvoďte soustavu síťových rovnic pro určení přibližných hodnot řešení $(k+1)$-ní časové vrstvě $(k \geq 1)$ implicitní metodou.

Je dána smíšená úloha $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t}$ s počáteční podmínkou $u(x,0) = \sin(\pi x)$, $u_t(x,0) = 0$ pro $x \in \langle 0;1 \rangle$, a okrajovými podmínkami

$$u(0,t) = 0 \qquad u(1,t) = 0 \qquad \text{pro } t \geq 0$$

Následně řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0,1) \times (0,1)$ a rozhodněte, jestli je splněna podmínka stability. Výsledek zobrazte.

- Volte krok $h = 0.05$ a $\tau = 0.05$.
- Volte krok $h = 0.05$ a $\tau = 0.025$.
- Volte krok $h = 0.01$ a $\tau = 0.01$.
- Volte krok $h = 0.01$ a $\tau = 0.004$.

e) Pro volbu $h = 0.05$ a $\tau = 0.025$ řešte schematem implicitním.