PŘÍPRAVNÝ KURZ NA MATURITU Z MATEMATIKY

Fakulta strojní

ČVUT v Praze

Předpokládaný přehled lekcí

11.2. Množiny, algebraické výrazy a jejich úpravy

18.2. Lineární a kvadratické funkce a rovnice

25.2. Logaritmus, exponenciela - funkce, výrazy, rovnice

4.3. Goniometrické funkce

11.3. Nerovnice

18.3. Posloupnosti a finanční matematika

25.3. Geometrie v rovině

1.4. Geometrie v prostoru

8.4. Analytická geometrie

15.4. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika

Dnešní lektor

Jan Valášek (jan.valasek@fs.cvut.cz)

Videa z lekcí najdete na

https://fs.cvut.cz/pripravny-kurz-z-matematiky/

Dotazy, názory, připomínky, přání pište na

ludek.benes@fs.cvut.cz

Lekce 6

Posloupnosti a finanční matematika

Posloupnosti (obecně)

- Posloupnost čísel zadaná analytickým předpisem pro n-tý člen
  $a_n = (\,a(n)\,)_{n=1}^{\infty}$ pro $n \in \mathbb{N}$
- Rekurentní zadání - pomocí předcházejících členů (např. $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$)
- Příklady posloupností:
  - Posl. lichých čísel: $a_n = (\,2n-1\,)_{n=1}^{\infty} = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$
  - Posl. čísel dělitelných 7: $a_n = (\,7n\,)_{n=3}^{\infty} = 21, 28, 35, 42, \ldots$
  - Posl. mocnin 2: $a_n = (\,2^n\,)_{n=1}^{\infty} = 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$
  - Fibonacciho posl.: $F_n = F(n-1) + F(n-2)$

  $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$ $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$
- k-tý (částečný) součet prvků posloupnosti:

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

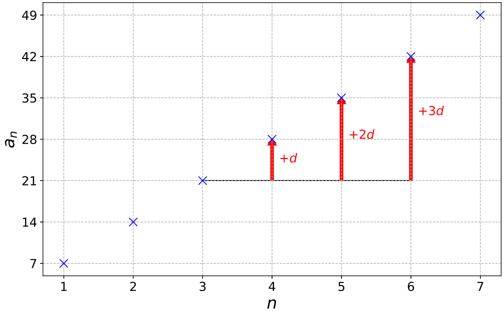
př.: součet prvních 4 lichých čísel $s_4 = \sum_{n=1}^{4} (2n-1) = 16$

Aritmetická posloupnost

$a_n = a_1 + (n-1)d$
d je diference

$a_n = a_{n-1} + d$

$s_k = \frac{k}{2}(a_1 + a_k)$



Příklad 1 - FS

V aritmetické posloupnosti je třetí člen $a_3 = 5$ a součet jejích šesti členů je $s_6 = 39$. Určete první člen posloupnosti a_1 a diferenci d.
$[a_1 = -1, \quad d = 3]$

příklady I

Příklad 2 - FS

Pátý člen aritmetické posloupnosti je $a_5 = 23$ a desátý je $a_{10} = 48$. Určete kolik je součet všech členů dané posloupnosti mezi dvacátým a třicátým členem $(a_{20} + a_{21} + ... + a_{30} =?)$. $[1353]$

Příklad 3

Trubky téhož průměru se pokládají do vrstev tak, že trubky každé horní vrstvy zapadají do mezer dolní vrstvy. Do kolika vrstev se uloží 75 trubek, má-li nejvyšší vrstva mít 3 trubky? [Do 10 vrstev.]

Příklad 4

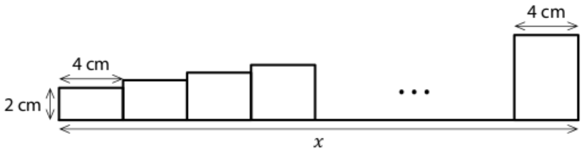
Prize money pro vítěze závodu tvoří aritmetickou posloupnost, první cena byla 15000 Kč a poslední 9000 Kč. Kolik bylo uděleno cen, když bylo dohromady vyplaceno vítězům 60 000 Kč? $[n = 5, d = -1500]$

Příklad 5

Rovinný obrazec se skládá z pravoúhelníků (obdélníků a jednoho čtverce).

První pravoúhelník je obdélník s rozměry 4 cm a 2 cm. První rozměr (4 cm) je stejný i u všech následujících pravoúhelníků, druhý rozměr (délka svislé strany) je u každého dalšího pravoúhelníku o 0,2 cm větší než u předchozího pravoúhelníku.

Obsah posledního pravoúhelníku je 20 cm^2.



Vypočtěte:

1. pořadí pravoúhelníku, který je čtverec, [11. pravoúhelník]
2. v cm délku x celého obrazce, [$x = 64$ cm]
3. v cm^2 obsah celého obrazce. [224 cm^2]

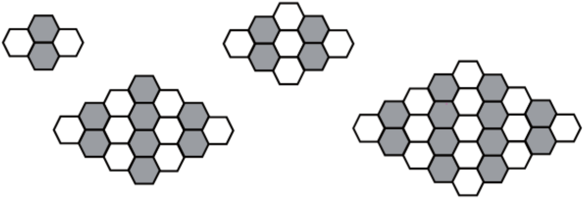
příklady III

Příklad 6

Obrazce jsou tvořeny bílými a tmavými šestiúhelníky uspořádanými do sloupců.

Počet šestiúhelníků ve sloupcích se postupně zvětšuje, a to od levého, resp. pravého okraje obrazce směrem ke středu.

Každý obrazec vždy začíná a končí sloupcem s jediným bílým šestiúhelníkem.



V jednom z dalších orazců je v nejdelším sloupci 59 šestiúhelníků (nad sebou). Určete v tomto obrazci:

1. počet všech tmavých sloupců. [58]
2. počet všech bílých šestiúhelníků [1741]

Geometrická posloupnost

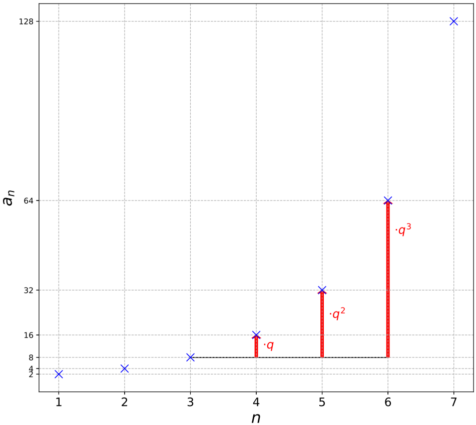
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

q je kvocient

$(a_n = a_0 \cdot q^n)$

$a_n = a_{n-1} \cdot q$

$s_k = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1}$



Příklad 1 - FS

V geometrické posloupnosti je první člen $a_1 = 3$ a součet čtyř prvních členů je $s_4 = 45$. Určete kvocient q a 5.člen posloupnosti a_5.
$[q = 2,\ a_5 = 48]$

příklady I

Příklad 2

Vytváříme dvě posloupnosti $\left(a(n) \right)_{n=1}^{\infty}$ a $\left(b(n) \right)_{n=1}^{\infty}$. První člen je v obou posloupnostech stejný: $a_1 = b_1$. V posloupnosti $\left(a(n) \right)_{n=1}^{\infty}$ je druhý a každý další člen větší než předchozí člen vždy o 25 % prvního členu. V posloupnosti $\left(b(n) \right)_{n=1}^{\infty}$ je druhý a každý další člen větší než předchozí člen vždy o 25 % předchozího členu.
Jaký je poměr členů b_{33} a a_{33}? $[\frac{b_{33}}{a_{33}} \doteq 140.242]$

Příklad 3

Robůtek se pohybuje po spirále. Nejkratší dobu stráví na prvním oblouku spirály. Časy strávené na dalších obloucích se postupně prodlužují. Podíl časů strávených na kterýchkoli dvou po sobě jdoucích obloucích je konstantní. První dva oblouky překoná robůtek za 1 s, samotný třetí oblouk za 4 s. Vypočtěte čas, který robůtek stráví na čtvrtém oblouku (počítejte s přesností na desetiny). $[19.3\ \text{s}]$

příklady II

Příklad 4

Délky hran kvádru mají tvořit tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Délky dvou hran kvádru jsou 5 cm a 8 cm.
Jaký je největší možný objem kvádru? $[512\ \text{cm}^3]$

Příklad 5

V kocourkovské firmě má na počátku každý pracovník stejnou základní hodinovou mzdu. Ke zvýšení hodinové mzdy může dojít během kariéry nejvýše 4krát. Po každém zvýšení je poměr zvýšené mzdy ku předchozí mzdě $3:2$. Pan Kočka má po dvojím zvýšení hodinovou mzdu o 200 korun vyšší než na počátku. Vypočtěte, kolik korun činí v kocourkovské firmě

1. základní hodinová mzda, $[160\ \text{Kč}]$
2. nejvyšší možná hodinová mzda. $[810\ \text{Kč}]$

příklady III

Příklad 6

Za pět let se počet obyvatel města zvýšil o 12 %. Jaký byl roční přírůstek? (počítejte s přesností na desetiny) [2.3 %]

Příklad 7

Při průchodu skleněnou deskou ztrácí světlo 5% své instenzity.Kolik desek je potřeba dát na sebe, aby se intenzita světla při průchodu snížila aspoň na polovinu původní hodnoty? [14]

Příklad 8

Úvěr s 10% roční úrokovou mírou pan Novák splatí po dvou letech jednorázovou částkou 72 600 Kč. (Jedná se o složené úrokování, tedy na konci každého roku se aktuální dlužná částka zvýší o 10 %.)
Kolik korun banka panu Novákovi půjčila? [60 000 Kč]

Finanční matematika tj. užití geometrické posl.

Příklad 1

V Kocourkově si klient založil účet a vložil na něj 2 000 zlaťáků. Po uplynutí každého roku se aktuální částka na jeho účtu zvětší o polovinu. Klient na účet žádné další peníze nevkládá, ani je z účtu nevybírá.

1. Vypočtěte kolik zlaťáků bude mít klient na účtu po dvou letech od jeho založení. $[4500$ zl.$]$
2. Po kolika letech od založení účtu bude mít klient poprvé na účtu přes 1 milion zlaťáků? [Po 16 letech]

Příklad 2

Banka u hypotečních úvěrů používá složené úročení s ročním úrokovacím obdobím a připisováním úroků na konci roku. Banka poskytla klientovi na počátku roku hypoteční úvěr, který klient začal splácet až po uplynutí tří let. Za tuto dobu úroky navýšily dlužnou částku o 9,3 %.
Jaká je roční úroková míra hypotečního úvěru? $[3\%]$

Příklady

Příklad 3

Banka poskytla podnikateli počátkem roku úvěr ve výši 1.5 milionu Kč na dobu pěti let s roční úrokovou mírou 5 % p.a. Podnikatel bude půjčku splácet v pěti stejných ročních splátkách, s nimiž začne po jednom roce od poskytnutí úvěru. Kolik korun bude činit jedna splátka? [346 462 Kč]

Příklad 4 - zjednodušený model inflace

Předpokládejte, že meziroční (míra) inflace je konstatní. Jaká byla meziroční (míra) inflace, když rohlík za 5 let zdvojnásobil svoji cenu? (Počítejte s přesností na setiny) $[14.87\%]$

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~portal/fin_mat/?page=vliv_inf_dane

Děkuji za pozornost

A přeji hodně štěstí :-)