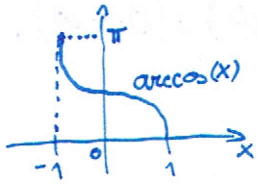
Vyšetření průběhu funkce

$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

Řešení:

- $D(f) = \Big|\; D(\arccos) = \langle -1, 1 \rangle$;



$\boxed{x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$?

$\Rightarrow -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow -(1+x^2) \leq 1-x^2 \Rightarrow -1 \leq 1 \rightarrow$ platí $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow 1-x^2 \leq 1+x^2 \rightarrow -x^2 \leq x^2 \rightarrow$ platí $\forall x \in \mathbb{R} \;\Big| =$

$= \mathbb{R}$

- Limity v krajních bodech $D(f)$:

$\lim_{x \to +\infty} \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \left| \begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = -1 \\ \text{arccos je spojitá fce na svém } D(f) \end{array} \right| = \arccos(-1) = \pi$

$\lim_{x \to -\infty} \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \pi$ ($f(x)$ ... sudá fce)

- $f(x)$ je sudá fce ($f(-x) = \arccos\left(\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}\right) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = f(x)$)

- Průnik s osou x: $f(x) = 0 \longrightarrow \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 0$ $\quad (\arccos(1) = 0)$

$1 = \frac{1-x^2}{1+x^2} \rightarrow 1+x^2 = 1-x^2$

$x^2 = -x^2$

platí pouze pro $x = 0$

  - celkem: f protíná osu x v bodě $[0,0]$

- Průnik s osou y:

$f(0) = \ldots$ viz průnik s osou x $= 0$

Celkem: Bod $[0,0]$ je bodem průniku fce f s osou x i osou y.

- $\forall x \in (-\infty;0): f(x) > 0$ $\quad$ (Např. $\arccos\left(\frac{1-(-1)^2}{1+(-1)^2}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} > 0$)
- $\forall x \in (0;+\infty): f(x) > 0$ $\quad$ (... analogicky, např. zvolíme $x=1$)

$\Rightarrow$ Funkce f je kladná na $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. Fce f nabývá hodnoty 0 v $x=0$.

- ~~Jelikož je fce f spojitá na D(f), tj~~ $\cancel{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \ \forall x_0 \in D(f)}$

- Vyšetření monotonie funkce:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right] = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2x\cdot(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

Pozn.: $(1+x^2) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-2x\cdot(1+x^2+1-x^2)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{4x\cdot(1+x^2)}{\sqrt{(1+2x^2+x^4)-(1-2x^2+x^4)}} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{x^2}}$$

Pozor! $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$

Platí: $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{x^2}}\right) = +2$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{x^2}}\right) = -2$

$f'(x)$ v bodě $x=0$ neexistuje

Tedy $D(f') = (-\infty,0)\cup(0;+\infty)$

Pro $x \in (-\infty,0): f'(x) < 0 \Rightarrow f$ je klesající

$x \in (0;+\infty): f'(x) > 0 \Rightarrow f$ je rostoucí

$\Rightarrow$ Bod $x=0$ (podezřelý z lokálního extrému) je tedy bodem ostrého lokálního minima funkce f.

Jiné extrémy fce f nemá, a tedy $[0; f(0)]$ je globálním minimem fce f.

Funkce f je tedy omezená ~~shora~~ z dola hodnotou $f(0)=0$.

Shora je omezená hodnotou $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pi$ (supremum fce f)

∘ Konvexnost / konkávnost

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{x^2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2\cdot\operatorname{sgn}(x)}{1+x^2}\right) = \frac{-2\cdot\operatorname{sgn}(x)\cdot(2x)}{(1+x^2)^2} = \Big/\ \operatorname{sgn}(x)\cdot x = |x|\ \Big/ =$$

Pozn.: $\boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn}(x)}$

$(\operatorname{sgn}(x))' = 0 \quad \forall x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

$$\boxed{= \frac{-4|x|}{(1+x^2)^2} = f''(x)}$$

$f''(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty;0)\cup(0;+\infty) \implies$ Funkce f je konkávní na intervalech $(-\infty;0)$ a $(0;+\infty)$.

∘ Asymptoty : 1) svislé asymptoty fce f nemá (je spojitá v $\mathbb{R}$).

2) asymptoty typu $y = ax+b$:

$$a_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{\to\,\pi}{\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}}{\underset{\to\,+\infty}{x}} = 0$$

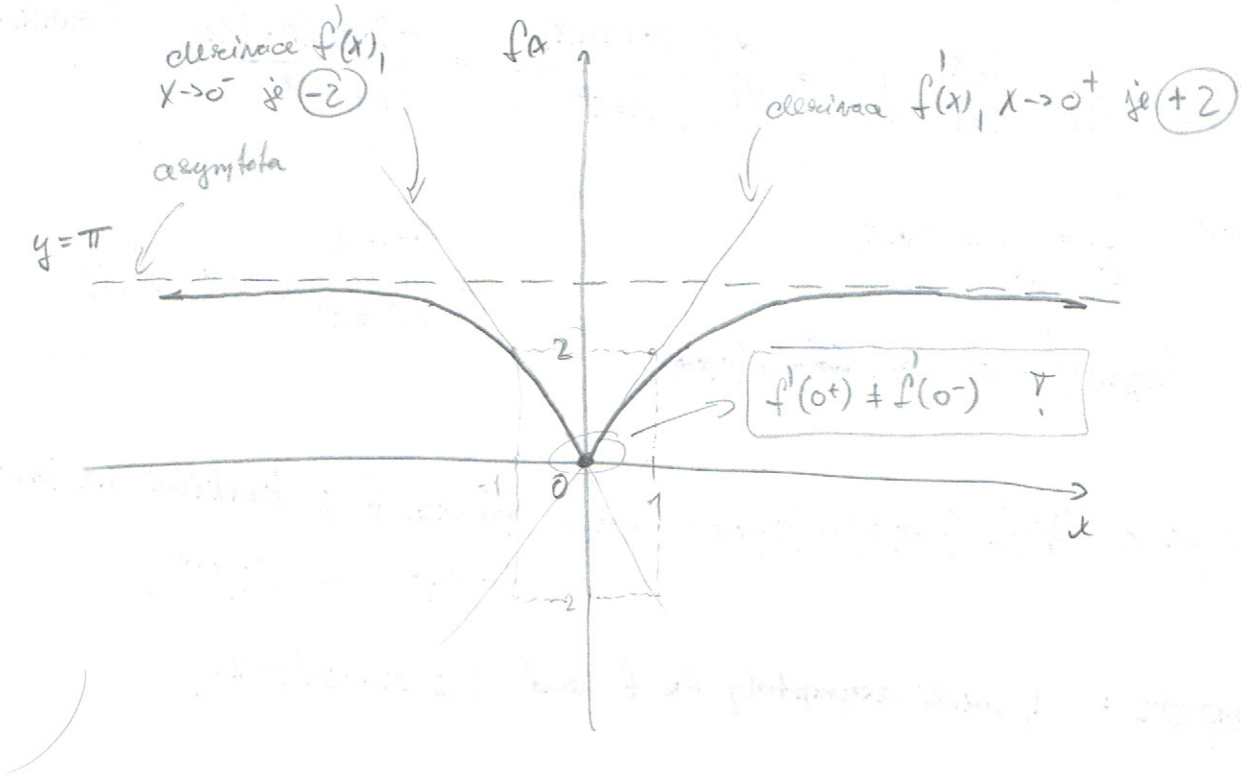
$$a_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{x} = 0$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - \underbrace{ax}_{=0}) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = /\dots \text{ viz dříve}/ = \pi$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x)-ax) = \dots = \pi$$

→ Pro $x \to \pm\infty$ má fce f vodorovnou asymptotu $\boxed{y = \pi}$
(rovnoběžnou s osou x)

Graf


derivace f'(x), x->0⁻ je -2
f(x)
derivace f'(x), x->0⁺ je +2
asymptota
y = π
2
f'(0⁺) ≠ f'(0⁻) !
-1
0
1
x
-2