Příklady

Odhad výrazů pomocí Taylorových polynomů

Př.1: Vypočítejte přibližně s přesností ϵ následující hodnoty:

$$e^{-1},\ \epsilon = 10^{-3} \qquad \cos(5^o),\ \epsilon = 10^{-3} \qquad \sqrt[4]{83},\ \epsilon = 10^{-6}$$

Řešení:
Zadané hodnoty budeme přibližně počítat pomocí Taylorova rozvoje příslušných funkcí. Taylorův rozvoj funkce f stupně n v bodě $x_0 \in D(f)$ budeme značit:

$$\begin{aligned} T_n^{f,x_0}(x) &= \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \end{aligned}$$

kde $f^{(k)}(x_0)$ značí k-tou derivaci funkce f v bodě x_0, přičemž $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$. Bude-li v textu uvedena funkce f i bod x_0, pak pro zkrácení zápisu budeme značit Taylorův polynom pouze $T_n(x)$. Přesnost aproximace funkční hodnoty $f(x)$ Taylorovým polynomem n-tého stupně lze odhadnout pomocí Lagrangeova tvaru zbytku $R_{n+1}(x)$, kde:

$$\left|T_n^{f,x_0}(x) - f(x)\right| = \left|R_{n+1}^{f,x_0}(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|$$

kde bod ξ leží mezi body x a x_0.

Ze zadaní úlohy vyplývá, že budeme muset nejdříve pomocí Lagrangeova tvaru zbytku odhadnout jaký stupeň (n) Taylorova polynomu postačí pro splnění dané chyby (ϵ).

Pro e^{-1} využijeme Taylorův rozvoj funkce $f(x) = e^x$ v bodě $x_0 = 0$. Rozvoj exponenciály snadno zapíšeme rovnou pro obecný stupeň polynomu T_n:

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Pro Lagrangeův tvar zbytku máme:

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \xi \in (0, x)$$

Protože

$$f^{(n+1)}(\xi) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^x)|_{x=\xi} = (e^x)|_{x=\xi} = e^\xi$$

Nyní provedeme odhad zbytku v bodě $x = -1$ (protože $f(-1) = e^{-1}$), tak by byla splněna zadaná chyba:

$$|R_{n+1}(-1)| \le \epsilon$$

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\right|_{\xi\in(-1,0)} \le \frac{1}{(n+1)!} \le 10^{-3}$$

Pomocí výpočtu zjistíme, že:

$$\frac{1}{7!} < 10^{-3} < \frac{1}{6!}$$

a tedy volíme $n + 1 = 7$, tj. $n = 6$. Aproximovaná hodnota e^{-1} je potom:

$$e^{-1} \approx T_6(-1) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = \frac{266}{720} \doteq 0.3681$$

Pro $\cos(5^0)$ využijeme Taylorův rozvoj funkce $f(x) = \cos(x)$ v bodě $x_0 = 0$.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad m = \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor$$

Kde $\lfloor\ \rfloor$ značí dolní celou část čísla, tj. například $\lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$. Pro další výpočty bude nutné převést 5^o na radiány. Tedy $5^o = \frac{5}{180}\pi$ rad. Pro Lagrangeův tvar zbytku máme:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{m+1}\cos(\xi)}{(2m+2)!}x^{2m+2} \qquad m = \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor \qquad \xi \in (0, x)$$

Nyní odhadneme zbytek pro $x = \frac{5}{180}\pi$:

$$\left|R_{n+1}(\tfrac{5}{180}\pi)\right| \le \epsilon$$

$$\left|(-1)^{m+1}\frac{\cos(\xi)}{(2m+2)!}(\tfrac{5}{180}\pi)^{(2m+2)}\right|_{\xi\in\left(0,\frac{5}{180}\pi\right)} \le \frac{1}{(2m+2)!}(\tfrac{5}{180}\pi)^{(2m+2)} \le 10^{-3}$$

Pokud nyní zkusíme dosadit např. $n = 0, 1$, dostaneme $m = \lfloor \frac{0}{2} \rfloor = \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$ a odhad vyjde:

$$\frac{1}{(2\cdot 0+2)!}(\tfrac{5}{180}\pi)^{(2\cdot 0+2)} = 0.0037 > \epsilon$$

pokud ale dosadíme $n = 2$, dostaneme $m = \lfloor \frac{2}{2} \rfloor = 1$ a odhad vyjde:

$$\frac{1}{(2\cdot 1+2)!}(\tfrac{5}{180}\pi)^{(2\cdot 1+2)} = 2.31 \cdot 10^{-6} < \epsilon$$

Pro splnění odhadu stačí tedy vzít Taylorův polynom stupně $n = 2$:

$$\cos(5^o) = \cos\left(\tfrac{5}{180}\pi\right) \approx T_2(\tfrac{5}{180}\pi) = 1 - \frac{\left(\frac{5}{180}\pi\right)^2}{2!} = 1 - \frac{\pi^2}{2592} \doteq 0.99619$$

Pro hodnotu ln(1.2) využijeme Taylorův rozvoj funkce $f(x) = \ln(1+x)$ v bodě $x_0 = 0$. Zkusme tento rozvoj odvodit pro $n = 3$:

$$f(x_0) = \ln(1+x)|_{x=x_0} = 0$$

$$f'(x_0) = (\ln(1+x))'\,|_{x=x_0} = \left.\frac{1}{1+x}\right|_{x=x_0} = 1$$

$$f''(x_0) = \left.\left(\frac{1}{1+x}\right)'\right|_{x=x_0} = \left.\frac{-1}{(1+x)^2}\right|_{x=x_0} = -1$$

$$f'''(x_0) = \left.\left(\frac{-1}{(1+x)^2}\right)'\right|_{x=x_0} = \left.\frac{2}{(1+x)^3}\right|_{x=x_0} = 2$$

Taylorův polynom $T_3(x)$ je tedy:

$$T_3(x) = \frac{0}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Pro Lagrangeův tvar zbytku budeme potřebovat $f^{(4)}(\xi)$:

$$f^{(4)}(\xi) = \left(\frac{2}{(1+\xi)^3}\right)' = \frac{-6}{(1+\xi)^4}$$

Tím dostaneme:

$$R_4(x) = \frac{\left(\frac{-6}{(1+\xi)^4}\right)}{4!}x^4 \qquad \xi \in (0, x)$$

Zkusme nyní odhadnout chybu pro $R_4(0.2)$. Chceme aby, byla splněna následující nerovnost

$$|R_4(0.2)| \le \epsilon = 10^{-3}$$

Máme

$$|R_4(0.2)| = \left|\frac{\left(\frac{-6}{(1+\xi)^4}\right)}{4!} \cdot 0.2^4\right|_{\xi\in(0,0.2)} \le \frac{0.2^4}{4} = 0.0004 < \epsilon = 10^{-3}$$

Vidíme tedy, že Taylorův rozvoj funkce $\ln(1+x)$ stačí pro zadanou přesnost ϵ provést jen do 3. řádu ($n = 3$). Odhad ln(1.2) získáme dosazením $x = 0.2$ do příslušného polynomu:

$$\ln(1.2) \approx T_3(0.2) = 0.2 - \frac{0.2^2}{2} + \frac{0.2^3}{3} \doteq 0.1826$$

Pozn: Správně bychom měli ještě ověřit, pomocí Lagrangeova tvaru zbytku, zda by nestačilo provést rozvoj pouze do 2.řádu, nebo dokonce pouze 1.řádu (nestačilo). Z tvaru derivací funkce f lze také "uhodnout" tvar n-té derivace: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. Toho bychom mohli využít pro zápis zbytku $R_{n+1}(0.2)$ a nejdříve tak skutečně najít nejmenší řád polynomu, n, pro který by byla splněna zadaná přesnost.

Pro hodnotu $\sqrt[4]{83}$ využijeme Taylorův rozvoj funkce $\sqrt[4]{x}$ v bodě $x_0 = 81$ (Jelikož víme, že $\sqrt[4]{81} = 3$). Zkusme tento rozvoj odvodit pro $n = 2$:

$$f(x_0) = (x)^{1/4}|_{x=x_0} = (81)^{1/4} = 3$$
$$f'(x_0) = \frac{1}{4}(x)^{-3/4}|_{x=x_0} = \frac{1}{4}(81)^{-3/4} = \frac{1}{4 \cdot 3^3}$$
$$f''(x_0) = \frac{-3}{4^2}(x)^{-7/4}|_{x=x_0} = \frac{-3}{4^2}(81)^{-7/4} = \frac{-3}{4^2 \cdot 3^7}$$

Taylorův polynom $T_2(x)$ je tedy:

$$T_2(x) = \frac{3}{0!}(x - x_0)^0 + \frac{\frac{1}{4\cdot 3^3}}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{\frac{-3}{4^2\cdot 3^7}}{2!}^{2}(x - x_0) = 3 + \frac{x - 81}{108} - \frac{(x - 81)^2}{23328}$$

Pro Lagrangeův tvar zbytku budeme potřebovat $f^{(3)}(\xi)$:

$$f^{(3)}(\xi) = \frac{-3 \cdot (-7)}{4^3}(\xi)^{-11/4}$$

Tím dostaneme:

$$R_3(x) = \frac{\frac{-3 \cdot (-7)}{4^3}(\xi)^{-11/4}}{3!}(x - 81)^3 \qquad \xi \in (0, x)$$

Zkusme nyní odhadnout chybu pro $R_3(83)$. Chceme aby, byla splněna následující nerovnost

$$|R_3(83)| \leq \epsilon = 10^{-6}$$

Máme

$$|R_3(83)| = \left| \frac{\frac{-3 \cdot (-7)}{4^3}(\xi)^{-11/4}}{3!} \cdot (83 - 81)^3 \right|_{\xi \in (81,83)} \leq \frac{21}{4^3 \cdot 6 \cdot 3^{11}} 2^3 = \frac{21}{8503056} > \epsilon = 10^{-6}$$

Vidíme, že pro $n = 2$ by dané kritérium pro chybu nebylo splněno. Musíme tedy zkusit (alespoň) $n = 3$. Pro Lagrangeův tvar zbytku $R_4(x)$ budeme potřebovat $f^{(4)}(\xi)$:

$$f^{(4)}(\xi) = \frac{-3 \cdot (-7) \cdot (-11)}{4^4}(\xi)^{-15/4}$$

Zbytek tedy je:

$$R_4(x) = \frac{\frac{-3 \cdot (-7) \cdot (-11)}{4^4}(\xi)^{-15/4}}{4!}(x - 81)^4 \qquad \xi \in (0, x)$$

Pro odhad nyní máme:

$$|R_4(83)| = \left| \frac{\frac{-3 \cdot (-7) \cdot (-11)}{4^4}(\xi)^{-15/4}}{4!}(83 - 81)^4 \right|_{\xi \in (81,83)} \leq \frac{231}{4^4 \cdot 24 \cdot 3^{15}} 2^4$$

$$\frac{231}{4^4 \cdot 24 \cdot 3^{15}} 2^4 = \frac{231}{5509980288} \approx 4 \cdot 10^{-8} < \epsilon = 10^{-6}$$

Pro zadanou přesnost je tedy třeba udělat Taylorův rozvoj do 3.řádu. Ten získáme přičtením členu $\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-81)^3$ k $T_2(x)$:

$$
\begin{aligned}
T_3(x) &= 3 + \frac{x-81}{108} - \frac{(x-81)^2}{23328} + \frac{\frac{-3\cdot(-7)}{4^3}(81)^{-11/4}}{3!}(x-81^3) \\
&= 3 + \frac{x-81}{108} - \frac{(x-81)^2}{23328} + \frac{7(x-81)^3}{22674816}
\end{aligned}
$$

Odhad $\sqrt[4]{83}$ potom získáme dosazením $x = 83$ do polynomu $T_3(x)$:

$$\sqrt[4]{83} \approx T_3(83) = 3 + \frac{2}{108} - \frac{4}{23328} + \frac{7\cdot 8}{22674816} \doteq 3.0183495$$

Pozn. Hodnota spočtená vyššímy řády aproximace vyjde $\sqrt[4]{83} = 3.018349479$ (pro 9 platných desetinných míst).