# Domácí úkol č. 1.

1. Řešte pro $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x) + \ln(x^2) + \ln(x^3) = 6 \quad *$$

Řešení: Využijeme vlastností logaritmických funkcí, tj. např. $\log_a(b) + \log_a(c) = \log_a(b \cdot c)$. Tedy $*$

$$\ln\left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot x \cdot x^2 \cdot x^3\right) = 6 \quad ; \quad \ln(x^3) = 6 \quad ; \quad **$$

Dále $\log_a(b^c) = \log_a(b) \cdot c$. Tedy $**$ $\quad 3\ln(x) = 6; \quad \ln(x) = 2$

$$\Rightarrow \boxed{e^2 = x}$$

2. Řešte pro $x \in \mathbb{R}$:

$$\log_x(16) - \frac{1}{2} = \log_x(8)$$

$$\log_x(16) - \log_x(8) = \log_x\left(\frac{16}{8}\right) = \log_x(2) = \frac{1}{2}$$

$$x^{\log_x(2)} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2 = \sqrt{x} \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

3. Jsou dány vektory z $E_4$.

a) Zjistěte zda jsou dané vektory lineárně závislé/nezávislé.

b) Jaká je dimenze vektorového prostoru, který je nad danými vektory generován?

c) Které vektory tvoří bázi tohoto vektorového prostoru?

Řešení:

**3. a)** Dle definice jsou vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ lineárně závislé / nezávislé pokud:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} = \vec{o}$$ má netriviální / pouze triviální řešení $(\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0)$

$\boxed{\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow$ Řešíme tedy rovnici (maticově): $\left(\vec{a} \,|\, \vec{b} \,|\, \vec{c} \,|\, \vec{d}\right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \vec{o}$

kde $\vec{a}, \dots, \vec{d}$ jsou sloupcové vektory a

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)^T$ je vektor neznámých. Tedy

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim \Rightarrow$$

(−3) (−2) + (1) + (2)

Gaussova eliminace

Už na tomto místě lze „tušit" LZ vektorů (samé 0 na 4. pozici)

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & -5 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

(3) + (1)

$\Rightarrow$ Soustava má $\infty$ mnoho řešení ve tvaru:

- $\boxed{\delta = t} \rightarrow$ parametr
- $\gamma = -\frac{5}{18}t$
- $\beta = -2t + \frac{25}{18}t = \cancel{\frac{61}{18}t} = -\frac{11}{18}t$
- $\alpha = \left[-t - 3\cdot\left(-\frac{5}{18}t\right) - 1\cdot\left(-\frac{11}{18}t\right)\right] / 2 = \dfrac{\frac{-18+15+11}{18}}{2} \cdot t = \frac{8}{36}t = \frac{4}{18}t$

Tedy vektory jsou lineárně závislé a dimenze vektorového prostoru, nad nimi generovaným je $\underline{3.}$ * (Hodnost matice A)...

**3. b.**

* Věta I. 3.4. (Matematika I.) Ker (A)

Množina všech řešení homogenní soustavy (tj: $A\vec{x} = \vec{o}$) je podprostor aritmetického $n$-rozměrného prostoru $\mathbb{R}^n$ resp. $(E_n)$, který má dimenzi rovnou: $n - h(A)$.

Tedy jinými slovy: (v rovnici)

$\boxed{\cancel{\mathrm{Ker}(A) = n - h(A)}}$

$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - h(A)$

. V našem případě je dimenze $\mathrm{Ker}(A) = 1$ (máme 1 parametr $t$. !)

Takže: $\left.\begin{array}{l} n = 4 \\ \dim(\ker(A)) = 1 \end{array}\right\}$ $h(A) = n - \dim(\ker A) = 4 - 1 = \underline{\underline{3}}.$

3.c) Víme, že vektory tvořící bázi vektorového prostoru musí být lineárně nezávislé a navíc přidáním dalšího vektoru bychom už dostali množinu vektorů LZ.

Víme, že dimenze našeho vekt. prostoru generovaného nad $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ je rovna 3. (4. složka vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ je stále 0, tu můžeme vypustit!)

Zkusme tedy vzít trojice z $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ (je jich 4) a zjistit, zda jsou LZ/LN → například pomocí determinantu.

Ozn.: $\vec{a}_3 = (a_1, a_2, a_3)^T$
$\vec{b}_3 = \dots$
(vynecháme 4. složku z $\vec{a}, \vec{b}, \dots$)

$$\left.\begin{array}{l}
\cdot \det(\vec{a}_3|\vec{b}_3|\vec{c}_3) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \dots = -12 \\
\cdot \det(\vec{a}_3|\vec{b}_3|\vec{d}_3) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \dots = -7 \\
\cdot \det(\vec{a}_3|\vec{c}_3|\vec{d}_3) = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \dots = -11 \\
\cdot \det(\vec{b}_3|\vec{c}_3|\vec{d}_3) = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \dots = -1
\end{array}\right\} \neq 0$$

⇒ libovolná trojice vektorů z $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ tvoří bázi vekt. prostoru dimenze 3.

4. Pro zadanou matici $A$ vypočítejte: $AA^TA - A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: $AA^TA - A = A \cdot (A^TA - I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 17 & 23 & 1 \\ 103 & 29 & -73 \\ 1 & 17 & 12 \end{pmatrix}}}$$

5. Spočítejte inverzní matici k: $\begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$ (Matice rotace)

$$\Rightarrow \cancel{\left(\begin{array}{cc|cc} \cos(x) & -\sin(x) & 1 & 0 \\ \sin(x) & \cos(x) & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot\cos(x) \\ \sim \\ \cdot\sin(x) \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\sin(x)\cdot\cos(x) & \cos(x) & 0 \\ \sin(x) & \cos(x) & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot(-\sin(x)) \\ \sim \\ \cdot 1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\sin(x)\cos(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & \cos(x)-\sin^2(x)\cdot\cos(x) & -\sin(x)\cdot\cos(x) & 1 \end{array}\right)}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} \cos(x) & -\sin(x) & 1 & 0 \\ \sin(x) & \cos(x) & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\cdot tg(x)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -tg(x) & \frac{1}{\cos(x)} & 0 \\ tg(x) & 1 & 0 & \frac{1}{\cos(x)} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -tg(x) & \frac{1}{\cos(x)} & 0 \\ 0 & 1+tg^2(x) & \frac{-tg(x)}{\cos(x)} & \frac{1}{\cos(x)} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -tg(x) & \frac{1}{\cos(x)} & 0 \\ 0 & 1 & -\sin(x) & \cos(x) \end{array}\right) \overset{(+)}{\sim}$$

$(\cos^2(x))\cdot$ $\qquad$ $\cdot tg(x)$

$$\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{\cos(x)} + (-\sin(x))\cdot tg(x) & \cos(x)\cdot tg(x) \\ 0 & 1 & -\sin(x) & \cos(x) \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1-\sin^2(x)}{\cos(x)} & \sin(x) \\ 0 & 1 & -\sin(x) & \cos(x) \end{array}\right)$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}}$$

# Domácí úkol č. 2

**1.** Bez kompletního počítání determinantu najděte koeficienty u $x^4$ a $x^3$ v determinantu reálné matice:

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & \pi \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & -2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix} = \det(A)$$

Řešení: Nejdříve rozvineme determinant podle 1. sloupce, tj.:

$$\det(A) = \underbrace{5x\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ -2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}}_{\text{I.}} \underbrace{-\,x\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & \pi \\ -2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}}_{\text{II.}}$$

$$\underbrace{+\,1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & \pi \\ x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}}_{\text{III.}} \underbrace{-\,x\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & \pi \\ x & 1 & 2 \\ -2 & x & 3 \end{vmatrix}}_{\text{IV.}}$$

- Uvážíme-li nejdříve koeficient u $x^4$, tak: 4-tá mocnina se vyskytuje pouze v I. členu při počítání Sarrusovým pravidlem při rozvoji na hl. diagonále:

$$5x\cdot(2x^3+\dots-\dots) = \boxed{10}\,x^4+\dots-\dots$$

$\Rightarrow$ Celkem: $x^4$: $10$

- Pro koeficient u $x^3$ je zde více možností (více sčítanců): ~~1. Mimodiagonální prvky v I.~~

II. $-x\cdot(1\cdot x\cdot 2x+\dots-\dots) = \boxed{-2}\,x^3+\dots-\dots$

IV. $-x\cdot(x\cdot x\cdot\pi+\dots-\dots) = \boxed{-\pi}\,x^3+\dots-\dots$

Celkem: $x^3$: $-2-\pi$

**2.** Vypočítejte součin zadaných matic po blocích:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M$$

Řešení:

$$\begin{array}{ccc} & A & D \\ & \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) & \\ & D^T & I \end{array} \cdot \begin{array}{ccc} & B & C \\ & \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) & \\ & C^T & I \end{array}$$

"po blocích"

$$= \left(\begin{array}{c|c} A\cdot B + D\cdot C^T & A\cdot C + D\cdot I \\ \hline D^T B + I C^T & D^T C + I^2 \end{array}\right) =$$

"vztahy"

$$= \left| \begin{array}{l} D\cdot I = D \quad I^2 = I \\ I\cdot C^T = C^T;\ \cancel{(DC^T)^T = D^T C} \end{array} \right| \Rightarrow$$

Vypočtené pouze: $\boxed{A\cdot B,\ D\cdot C^T,\ D^T\cdot B,\ A\cdot C,\ D^T\cdot C}$

- $A\cdot B = \begin{pmatrix}3&6\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12&33\\4&11\end{pmatrix}$
- $D^T\cdot C = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3&3&3\end{pmatrix}$
- $D\cdot C^T = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$
- $D^T\cdot B = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\\4&11\end{pmatrix}$
- $A\cdot C = \begin{pmatrix}3&6\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9&9&9\\3&3&3\end{pmatrix}$

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix}12&33\\4&11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}9&9&9\\3&3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}0&0\\0&0\\4&11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3&3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\right) = \underline{\underline{\begin{pmatrix}13&34&9&9&10\\6&13&3&3&5\\1&1&1&0&0\\1&1&0&1&0\\5&12&3&3&4\end{pmatrix}}}$$

3. Najděte vlastní čísla a odpovídající vl. vektory zadaných matic:

I. $A = \begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}$ Vl. čísla: $A-\lambda I = \begin{pmatrix}3-\lambda&4\\5&2-\lambda\end{pmatrix}$; $\det(A-\lambda I) = (3-\lambda)\cdot(2-\lambda)-20$

$\det(A-\lambda I)=0 \iff \lambda^2-5\lambda-14=0 \implies \lambda_{1,2} = \dfrac{5\pm\sqrt{25-4\cdot(-14)}}{2} = \begin{cases}-2\\+7\end{cases}$

char. polynom $\implies \boxed{\begin{array}{l}\lambda_1=+7\\ \lambda_2=-2\end{array}}$;

Vlastní vektory: $\vec{v}_{\lambda_1}: \left(\begin{array}{cc|c}-4&4&0\\ \cancel{5}&\cancel{-5}&\cancel{0}\end{array}\right) = t_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad t_1\in\mathbb{C}$

$\vec{v}_{\lambda_2}: \left(\begin{array}{cc|c}5&4&0\\ \cancel{5}&\cancel{4}&\cancel{0}\end{array}\right) = t_2\cdot\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}\quad t_2\in\mathbb{C}$

II.

$B=\begin{pmatrix}0&5\\-5&0\end{pmatrix}$; Vl. čísla: $\det(B-\lambda I) = (-\lambda)\cdot(-\lambda)-(-5)\cdot(5) = \lambda^2+25$

$\det(B-\lambda I)=0 \iff \lambda^2+25=0 \iff \lambda_{1,2}=\pm 5i \implies \boxed{\begin{array}{l}\lambda_1=5i\\ \lambda_2=-5i\end{array}}$

char. polynom

Vlastní vektory:

$\vec{v}_{\lambda_1}: \left(\begin{array}{cc|c}-5i&5&0\\-5&-5i&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}-5i&5&0\\ \cancel{-5i}&\cancel{5}&\cancel{0}\end{array}\right) = t_1\cdot\begin{pmatrix}5\\5i\end{pmatrix} = \boxed{t_2\cdot\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}}\quad t_1,t_2\in\mathbb{C}$

$\vec{v}_{\lambda_2}: \left(\begin{array}{cc|c}5i&5&0\\-5&5i&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}5i&5&0\\ \cancel{5i}&\cancel{5}&\cancel{0}\end{array}\right) = t_3\cdot\begin{pmatrix}5\\-5i\end{pmatrix} = \boxed{t_4\cdot\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}}\quad t_3,t_4\in\mathbb{C}$

# Domácí úkol č. 3

**1.** Kolik řešení (v závislosti na parametru $b$) má následující soustava lin. algeb. rovnic? (Užijte Frobeniovu větu).

Dopočítejte řešení pro $b=1$.

$$x+2y+2z=3$$
$$x+y+(b+2)z=3$$
$$by-2bz=2$$

Řešení: Soustavu nejprve zapíšeme maticově:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \underbrace{\begin{matrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & b+2\\ 0 & b & -2b\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}3\\3\\2\end{matrix}\end{array}\right)}_{A|\vec{b}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & -1 & b & 0\\ 0 & b & -2b & 2\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & -1 & b & 0\\ 0 & 0 & b^2-2b & 2\end{array}\right)$$

Frobeniova věta:

→ počet neznámých: $(x,y,z)^T$

⇒ $\boxed{3=n}$

→ pokud $h(A)=h(A|\vec{b})=n$ ⇒ 1 řešení

→ pokud $h(A)=h(A|\vec{b})<n$ ⇒ $\infty$ řešení (závislé na 1 nebo více parametrech)

→ pokud $h(A)\neq h(A|\vec{b})$ → řešení neexistuje!

Zde pro (*) $b^2-2b\neq 0$ má soustava 1 řešení (tj. $h(A)=h(A|\vec{b})=3=n$)

pro $b^2-2b$ řešení neexistuje. Jiný případ nenastane.

(Tj. $b\neq 0$ a $b\neq 2$)(*).

Pro $\boxed{b=1}$ má soustava následující řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} z&=-2\\ y&=-2\\ x&=3-2\cdot(-2)-2\cdot(-2)=\\ &=11\end{aligned}$$

**2.** Vypočítejte následující limity posloupností reálných čísel (i s postupem).

**I.**

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{5+8n^2}-\sqrt[3]{8n^3}\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{Platí algebraický vztah: } \dfrac{a^r-b^r}{a-b}=a^{r-1}+a^{r-2}\cdot b^1+a^{r-3}\cdot b^2+\dots+a\cdot b^{r-2}+b^{r-1} \\ \text{pro } r>0,\ a\neq b;\ \text{zde substituujeme } \begin{array}{l} a\to a^{1/r} \\ b\to b^{1/r}\end{array}\Bigg\}\Rightarrow \dfrac{a-b}{a^{\frac{r-1}{r}}+a^{\frac{r-2}{r}}\cdot b^{1/r}+\dots+b^{\frac{r-1}{r}}}=a^{1/r}-b^{1/r} \\ \text{a položíme } \boxed{r=3}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{5+8n^3}\right)^3-\left(\sqrt[3]{8n^2}\right)^3}{(5+8n^3)^{2/3}+(5+8n^3)^{1/3}\cdot(8n^3)^{1/3}+(8n^3)^{2/3}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{\sqrt[3]{(5+8n^3)^2}+\sqrt[3]{5+8n^3}\cdot\sqrt[3]{8n^3}+\sqrt[3]{(8n^3)^2}}=$$ | Všechny členy ve jmenovateli jdou pro $n\to+\infty$ k $\infty$ ~~nule~~. |

$$=\underline{\underline{0}}$$

**II.**

→ Vzorec pro součet aritmetické řady s diferencí 1.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+\dots+n}{\sqrt{9n^4+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\frac{n}{2}\cdot(n+1)}{n^2}}{\sqrt{9+\frac{1}{n^4}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{2n}}_{\to 0}}{\sqrt{9+\underbrace{\frac{1}{n^4}}_{\to 0}}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{3}=\underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

**III.**

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{n}-\frac{3n}{n^2+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2+4-3n^2}{n\cdot(n^2+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+4}{n^3+n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{4}{n^3}}_{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}=\frac{0}{1}=\underline{\underline{0}}$$

IV.

*

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\left(1 + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{\sqrt{n^2+1}}}_{a_n}$$

Pozn.: $\log \equiv \ln$

Řešení:

- Označme posloupnost uvnitř limity jako $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pro určení limity $\lim_{n\to+\infty} a_n$ použijeme větu o limitě sevřené posloupnosti.

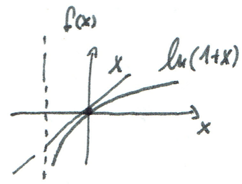
Věta: Nechť $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí: $b_n \leq a_n \leq c_n$

b) $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou konvergentní a platí $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n$.

Potom je $\{a_n\}$ konvergentní a platí: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n$.

$\boxed{\text{I.}}$ Nejdříve posloupnost odhadneme zeshora:




- Použijeme nerovnost: $\boxed{\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Máme:

$$\left[1+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{\sqrt{n^2+1}} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n^2+1}} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{(n+1)^2}} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = c_n. \quad \text{Kde } \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \boxed{e}$$

$\boxed{\text{II.}}$ Nyní spodní odhad:

- Použijeme nerovnost: $\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

$$\left[1+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{\sqrt{n^2+1}} \geq \left[1+\log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{n+1}}\right)\right]^n \geq \left[1+\frac{1}{n+1}\log\big(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}_{\geq e}\big)\right]^n \geq$$

$$\geq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = b_n. \quad \text{Kde } \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \Big|\, n+1 = m \,\Big| = \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{m}} = \boxed{e}$$

Tedy celkem: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = e}$

# Domácí úkol č. 4

## 1. Stanovte definiční obory následujících funkcí:

$$f_1(x) = y = \frac{x+\sqrt{x}}{2x^2-7x+6}$$

Řešení: $\sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0$

$2x^2-7x+6 \Rightarrow x \neq \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$

Celkem: $D(f_1) = \langle 0; \tfrac{3}{2}) \cup (\tfrac{3}{2}; 2) \cup (2; \infty)$

$$f_2(x) = y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}}$$

Řešení: $\frac{x-2}{x+2} \geq 0$ ; $x+2 \neq 0$, $\boxed{x \neq -2}$

Pro $(x+2) > 0$ máme: $x-2 \geq 0$, tj. $x \geq 2$ $\Rightarrow \boxed{x \geq 2}$

Pro $(x+2) < 0$ máme: $x-2 \leq 0$, tj. $x \leq 2$ $\Rightarrow \boxed{x < -2}$

Celkem: $D(f_2) = (-\infty; -2) \cup \langle 2; \infty)$

## 2. Vypočítejte následující limity funkcí (i s postupem):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} = \underset{\text{l'Hospital}}{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x))}{2x} = \underset{\text{l'Hospital}}{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{\cos^2(x)}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to \pi/4} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\ln(tg(x))} = \underset{\text{l'Hospital}}{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}} = \lim_{x\to\pi/4} \frac{\overset{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\cos(x)} + \overset{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sin(x)}}{\underset{\frac{1}{1}}{\frac{1}{tg(x)}} \cdot \underset{\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\frac{1}{\cos^2(x)}}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to\pi/4} tg(x)^{tg(2x)} = \lim_{x\to\pi/4} e^{\ln\left(tg(x)^{tg(2x)}\right)} = \lim_{x\to\pi/4} \exp\left(tg(2x) \cdot \ln(tg(x))\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\pi/4} \frac{\cancel{tg(2x)}\,\ln(tg(x))}{\frac{1}{tg(2x)}}\right) = \underset{\text{l'Hospital}}{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}} = \exp\left(\lim_{x\to\pi/4} \frac{\frac{1}{tg(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}}{-\frac{1}{tg^2(2x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(2x)} \cdot 2}\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\pi/4} \frac{\frac{1}{\overset{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin(x)} \cdot \overset{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos(x)}}}{-2 \cdot \frac{\cancel{\cos(2x)}\,1}{\sin^2(2x)}}\right) = \cancel{\exp\left(\lim_{x\to\pi/4} \frac{2}{\sin(2x)}\right)} = \exp(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

# Domácí úkol č. 5

**1.** V jakých maximálních intervalech jsou dané funkce spojité:

$f_1(x) = y = \sqrt{\dfrac{1-\cos(\pi x)}{4-x^2}}$    <u>Řešení</u>: $\dfrac{1-\cos(\pi x)}{4-x^2} \geq 0$ ; $1-\cos(\pi x) \geq 4-x^2$ pro $4-x^2 \geq 0$

Zde $1-\cos(\pi x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
$4-x^2 \geq 0 \ \forall x \in (-2,2)$ $\Bigg\}$ $\boxed{D(f_1) = (-2;2)}$

$f_2(x) = y = \dfrac{1}{\ln(x)}$    <u>Řešení</u>: $\ln(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$
$x > 0$ $\Big\}$ Celkem: $\boxed{D(f_2) = (0;1) \cup (1;+\infty)}$

$f_3(x) = y = e^{x+\frac{1}{x}}$    <u>Řešení</u>: $x \neq 0$, Tedy: $D(f_3) = (-\infty,0) \cup (0;+\infty)$

**2.** Vypočítejte derivace následujících funkcí:

$y = \sqrt{\dfrac{x^2+x-1}{2x^2-x+3}}$    $y = \sqrt{1-e^{-x^2}}$    (*) $y = \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$

<u>Řešení</u>: Viz např. WolframAlpha,

u (*) derivovat jako: $e^{\ln\left(\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}}\right)} = e^{\frac{1}{1-\cos(x)}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}$ !

# Domácí úkol č. 6

Vyšetřete průběh funkce: $f_1(x) = y = \ln(x) + \frac{1}{2x-2}$

Řešení:

1. $D(f_1) = (0,1) \cup (1,+\infty)$
2. limity v krajních bodech def. oboru: $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) + \frac{1}{2x-2} = -\infty$ ; $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{2x-2} + \ln(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 1^+} \ln(x) + \frac{1}{2x-2} = +\infty$ ; $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) + \frac{1}{2x-2} = +\infty$.

3. Lokální extrémy: $f_1'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{(2x-2)^2} \cdot 2$ ; $f_1'(x) = 0 \iff \boxed{\frac{1}{x} - \frac{1}{2\cdot(x-1)^2} = 0}$

$\iff 2(x-1)^2 = x \iff 2x^2 - 4x + 2 = x \iff 2x^2 - 5x + 2 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ 1/2 \end{cases}$$

| | $x \in (0, 1/2)$ | $x \in (1/2, 1)$ | $x \in (1,2)$ | $x \in (2; +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | + | − | − | + |

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ ... lokální maximum

$x = 2$ ... lokální minimum

(Vzhledem k limitám v krajních bodech intervalů $D(f_1)$ : globální extrémy neex.)
$(\pm\infty)$

4. Inflexní body / konvexnost / konkávnost:

$f_1''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^3}$ ; $f_1''(x) = 0 \iff \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{x^2} = 0$

Tedy: $\boxed{x^2 = (x-1)^3}$ $\rightarrow$ Pro $x \in (0;1)$ je $x^2 > 0$ ale $(x-1)^3 < 0 \Rightarrow$ řešení neex.

Pro $x \in (1;+\infty)$ je ~~...~~ . Pro $x = 4$ máme $f_1''(x) < 0$

Pro $x = 3$ máme $f_1''(x) > 0$

$\Rightarrow$ kořen bude tedy ležet někde v $x \in (3,4)$

označme ho $\xi$ (dopočet: Jedině numericky...)

$\Rightarrow$ ~~Pro $x \in (0;1) \cup (1;\xi)$ je $f_1''$~~

- Pro $x \in (0,1)$ je $f_1''(x) < 0 \Rightarrow$ konkávní $f(x)$
- Pro $x \in (1;\xi)$ je $f_1''(x) > 0 \Rightarrow$ konvexní $f(x)$
- Pro $x \in (\xi; +\infty)$ je $f''(x) < 0 \Rightarrow$ konkávní $f_1(x)$

5. Asymptoty: V bodech $x=0$ a $x=1$ má funkce $f_1(x)$ svislé asymptoty. Žádné jiné asymptoty nemá.

6. Průsečíky s osami $x, y$:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1(x) = -\infty \Rightarrow$ průsečík s osou $y$ <u>neexistuje</u>!

- Jelikož pro $x \in (0;1)$ máme lokální <u>maximum</u> fce $f_1(x)$ rovno:

$$\max_{x\in(0,1)} f_1(x) = f_1\left(\tfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) + \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}-2} = \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) - 1 < 0 \Rightarrow \text{graf zde osu } \underline{x}$$

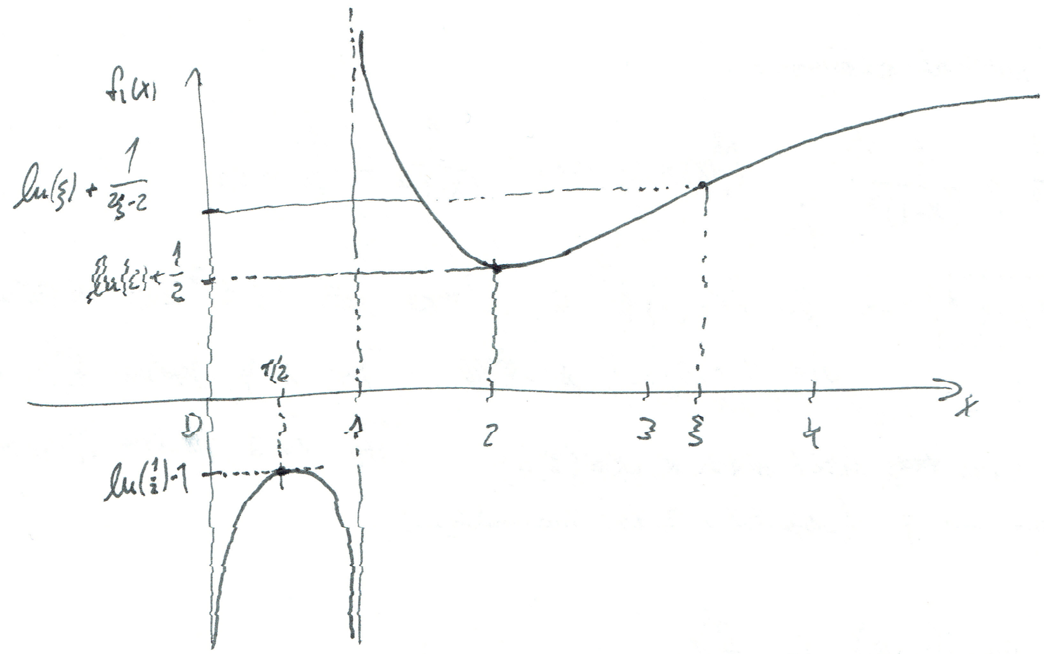
<u>neprotne</u>, jelikož: $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1(x) = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$. Tedy celkem $f_1(x) < 0$ $\forall x \in (0,1)$.

Pro $x \in (1;+\infty)$ máme obdobně lokální <u>minimum</u> v bodě:

$\min\limits_{x\in(1;+\infty)} f_1(x) = f_1(2) = \ln(2) + \frac{1}{2} > 0$. A navíc $\lim\limits_{x\to 1^+} f_1(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f_1(x) = +\infty$

$\Rightarrow f_1(x) > 0$ $\forall x \in (1;+\infty)$. Graf fce $f_1$ zde osu $x$ také <u>neprotne</u>.

<u>Graf</u>:



Vyšetřete průběh funkce $f_2(x) = y = \arcsin\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)$

Řešení:

1. $D(f_2) = \left| \begin{array}{l} D(\arcsin(u)) = \langle -1;1 \rangle \\ H\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right) = \langle 0; \frac{\pi}{4} \rangle \quad \forall x \in \langle -1;1 \rangle \end{array} \right| = \langle -1;1 \rangle$

2. Funkce: $\sqrt{1-x^2}$; $\operatorname{arctg}(u)$; $\arcsin(v)$ jsou spojité pro: $x \in \langle -1,1 \rangle$, $u \in \langle 0,1 \rangle$, $v \in \langle 0,1 \rangle$

$\Rightarrow f_2(x)$ je spojitá na svém def. oboru

Limity v krajních bodech intervalu def. oboru:

$$\lim_{x \to -1^+} f_2(x) = 0 \; ; \; \lim_{x \to 1^-} f_2(x) = 0$$

Pozn.: $\operatorname{arctg}(0) = 0$ $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$; $\arcsin(0) = 0$ ; $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

3. Lokální extrémy:

$$f_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{16}{\pi^2}\operatorname{arctg}^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)}} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(1-x^2)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}^{*} \cdot (-2x)^{*}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f_2'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2-x^2} \cdot \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{16}{\pi^2}\operatorname{arctg}^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)}} =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{16}{\pi^2}\operatorname{arctg}^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)}} \underset{\text{l'Hospital}}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} -\frac{2}{\pi} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\dfrac{16x \tan^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}\,(2\pi - \pi x^2) \cdot \sqrt{\pi^2 - 16\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)^2}}} =$$

$$= \ldots = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f_2'(x) = \ldots = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

v bodě $x=0$ je nespojitá 1. derivace $f_2(x)$

$\Rightarrow$ navíc $f_2'(x) > 0 \quad \forall x \in (-1,0)$

$f_2'(x) < 0 \quad \forall x \in (0,1)$

Pozn.: Jelikož pod odmocninou jsou pouze nezáporná čísla a člen $\frac{1}{2-x^2} > 0 \;\; \forall x \in (-1,1)$, tak o znaménku $f_2'(x)$ rozhoduje pouze "poslední" člen: $(-2x)^{*}$

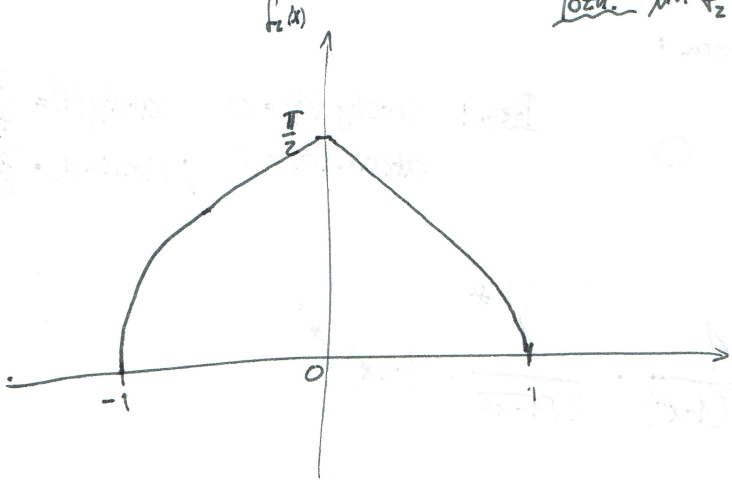
4. Konvexnost / konkávnost
( inflexní body )

$$f_2''(x) = \ldots \text{ WolframAlpha} \ldots = \frac{4\left(16\sqrt{1-x^2}\cdot x^2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right) + \pi^2\left(2x^4-x^2-2\right) + 16\left(-2x^4+x^2+2\right)\cdot\left(\operatorname{tg}^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)^2}{\left(x^2-2\right)^2\left(1-x^2\right)^{3/2}\left(\pi^2-16\operatorname{arctg}^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)^{3/2}}$$

$f_2''(x) < 0 \quad \forall x \in (-1,1)$

Asymptoty : nejsou

Graf
(sudá funkce




Pozn.: $\lim f_2'(x)\Big|_{x=\pm 1} = +\infty$ (rozhodne * člen)

# Domácí úkol č. 7

**1.** Napište Taylorův polynom 5. stupně v bodě $x=0$ pro funkci:

$$f(x) = e^{2x-x^2}$$

Řešení:

$$\boxed{T_5^{f,\,x=0}(x) = \sum_{i=0}^{5} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\, x^i}$$

$$f'(x) = (2-2x)\, e^{2x-x^2}$$

$$f''(x) = -2e^{2x-x^2} + (2-2x)^2 e^{2x-x^2}$$

$$f'''(x) = -2(2-2x)\, e^{2x-x^2} + 2\cdot(2-2x)\cdot(-2)\cdot e^{2x-x^2} + (2-2x)^3 e^{2x-x^2}$$

$$f^{IV}(x) = 4e^{2x-x^2} - 2(2-2x)^2 e^{2x-x^2} + 8e^{2x-x^2} - 4(2-2x)^2 e^{2x-x^2} + 3(2-2x)^2\cdot(-2)\, e^{2x-x^2}$$
$$+ (2-2x)^4 e^{2x-x^2} =$$

$$= 12e^{2x-x^2} - 12(2-2x)^2 e^{2x-x^2} + (2-2x)^4 e^{2x-x^2}$$

$$f^{V}(x) = 12(2x-x^2)e^{2x-x^2} + 48(2-2x)\, e^{2x-x^2} - 12(2-2x)^3 e^{2x-x^2} + 4\cdot(2-2x)^3\cdot(-2)\cdot e^{2x-x^2} +$$
$$+ (2-2x)^5 e^{2x-x^2}$$

Dále:

$f(0) = e^0 = 1$

$f'(0) = 2e^0 = 2$

$f''(0) = -2e^0 + 2^2 e^0 = 2$

$f'''(0) = -4$

$f^{IV}(0) = -20$

$f^{V}(0) = -8$

Celkem tedy:

$$\boxed{T_5^{f,\,x=0}(x) = 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{4}{3!}x^3 - \frac{20}{4!}x^4 - \frac{8}{5!}x^5}$$

Lze také spočítat jednodušeji: $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots$ subst.: $y = 2x - x^2$

$$\Rightarrow e^{2x-x^2} = 1 + (2x-x^2) + \frac{(2x-x^2)^2}{2!} + \frac{(2x-x^2)^3}{3!} + \frac{(2x-x^2)^4}{4!} + \frac{(2x-x^2)^5}{5!}$$

5-tá mocnina (poslední výskyt 5-té mocniny)

$\Rightarrow$ Toto roznásobit a upravit do tvaru Taylorovy řady ...

2. Pomocí Taylorova polynomu vypočítejte přibližně hodnotu $\sqrt[5]{250}$ s přesností na 4 desetinná místa.

Řešení: $f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{1/5}$

$$\boxed{T_n^{f(x),x_0}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)}$$

Budeme se snažit najít nějaké číslo blízké 250, takové pro které známe hodnotu 5-té odmocniny.
⇒ ozn. $x_0$

⇒ Zkusme: $x_0 = 3^5 = 243 \rightarrow$ "blízko" 250
a navíc $\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$

⇒ uděláme Taylorův rozvoj funkce $f(x) = x^{1/5}$ v bodě $x_0 = 243$ a budeme zjišťovat dále jak máme přesnou aproximaci $\sqrt[5]{250}$.

Tedy:

$$f(x) = x^{1/5}$$
$$f'(x) = \frac{1}{5}x^{-4/5}$$
$$f''(x) = \frac{-4}{25}x^{-9/5}$$
$$f'''(x) = \frac{36}{125}x^{-14/5}$$
$$f^{IV}(x) = \frac{-14\cdot 36}{625}x^{-19/5}$$

zkusíme nejdříve např. 3. řád

$$T_3^{f(x),x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 =$$

$$= (3^{\cancel{5}})^{1/\cancel{5}} + \frac{\frac{1}{5}(3^{\cancel{5}})^{-4/\cancel{5}}}{1!}(x-3^5) + \frac{-\frac{4}{25}(3^{\cancel{5}})^{-9/\cancel{5}}}{2!}(x-3^5)^2 + \frac{\frac{36}{125}(3^{\cancel{5}})^{-14/\cancel{5}}}{3!}(x-3^5)^3 =$$

$$= \left|x = 250\right| = 3 + \frac{\frac{1}{5}3^{-4}}{1!}(250-243) + \frac{-\frac{4}{25}3^{-9}}{2!}(250-243)^2 + \frac{\frac{36}{125}3^{-14}}{3!}(250-243)^3 =$$

$$\doteq 3,\underline{0170}8824$$

Pokud uděláme Taylorův polynom pouze 2. řádu, tj. $T_2^{f(x),x_0}(x)$ a vyjádříme ho v bodě 250 dostaneme: $T_2^{f(x),3^5=x_0}(250) \doteq 3,\underline{0170}8479$. Vidíme, že pro přesnost na 4 desetinná místa by stačilo udělat pouze $T_2$.

# Domácí úkol č. 8

- $$\int \frac{\sin(\log(x))}{x}\,dx = \left| \begin{matrix} \text{sub.:} \\ \log(x) = y \\ \frac{1}{x}\,dx = dy \end{matrix} \right| = \int \sin(y)\,dy = -\cos(y) + C \overset{\text{zpět. sub.}}{=} \underline{\underline{-\cos(\log(x)) + C}}$$

- $$\int \frac{dx}{1+\cos(x)} = \left| \begin{matrix} \text{sub.:} \\ y = tg\left(\frac{x}{2}\right) & \Rightarrow 1+y^2 = 1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ & \Rightarrow 1-y^2 = 1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos(x)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \end{matrix} \right\} \frac{1-y^2}{1+y^2} = \cos(x)$$

$$\left. \begin{matrix} \frac{x}{2} = tg^{-1}(y) \\ \frac{dx}{2} = \frac{1}{1+y^2}\,dy \end{matrix} \right\} dx = \frac{2dy}{1+y^2} \Bigg| =$$

$$= \int \frac{1}{1+\frac{1-y^2}{1+y^2}} \cdot \frac{2}{1+y^2}\,dy = \int dy = y + C \overset{\text{zpět. sub.}}{=} \underline{\underline{tg\left(\frac{x}{2}\right) + C}}$$

- $$\int \frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{\sin^4(x) + x\cdot\cos^4(x)}\,dx =$$

Zde bude asi překlep

| Nejspíše chyba v zadání ze kterého jsem opisoval → nenašel jsem žádný postup, jak integrál vyjádřit pomocí elementárních funkcí |

$$\int \frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{\sin^4(x)+\cos^4(x)}\,dx = \left| \begin{matrix} \text{sub.:} \\ tg^2(x) = t \\ 2\,tg(x)\cdot\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{\cos^4(x)}}{tg^4(x)+1}\,dx \overset{\text{sub.}}{=}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\,arctg(t) + C \overset{\text{zpět. sub.}}{=} \frac{1}{2}\,arctg\left(tg^2(x)\right) + C$$

- $$\int \frac{dx}{\cos^4(x)} = \int \underset{f}{\frac{1}{\cos^2(x)}} \cdot \underset{G}{\frac{1}{\cos^2(x)}}\, dx \overset{\text{Per partes}}{=} tg(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} - \int tg(x) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{\cos^3(x)} \cdot (-\sin(x))\, dx$$

$$= \frac{tg(x)}{\cos^2(x)} - \int 2\, tg^2(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \left| \begin{array}{l} \text{subst.:} \\ tg(x) = y \\ \frac{1}{\cos^2(x)} dx = dy \end{array} \right| = \frac{tg(x)}{\cos^2(x)} - 2\int y^2\, dy =$$

$$= \frac{tg(x)}{\cos^2(x)} - \frac{2}{3}\, tg^3(x) + C$$

- $$\int \frac{\arcsin(x)}{x^2}\, dx \overset{\text{per-partes}}{=} \left| \begin{array}{ll} G = \arcsin(x) & g = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ f = \frac{1}{x^2} & F = \frac{-1}{x} \end{array} \right| = \frac{-\arcsin(x)}{x} + \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx = \Big\{$$

$$\Big\{ \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx = \left| \begin{array}{ll} \text{Sub.} & \\ \sqrt{1-x^2} = u & x^2 = 1-u^2 \\ \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx = du & \end{array} \right| = \int \frac{1}{u^2-1}\, du = \int \frac{1}{(u-1)\cdot(u+1)}\, du =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Parciální zlomky} \\ \frac{1}{(u-1)\cdot(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} \Rightarrow \begin{cases} A\cdot(u+1) + B(u-1) = 1 \\ A+B = 0 \\ A-B = 1 \end{cases} \Big\}\ A = \frac{1}{2};\ B = -\frac{1}{2} \end{array} \right| = \int \frac{-1/2}{u+1} + \frac{+1/2}{u-1}\, du =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(|u+1|) + \frac{1}{2} \ln|u-1| + C \underset{\text{zpět. sub.}}{=} \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{\sqrt{1-x^2} + 1}\right|\right) + C$$

Celkem: $$\int \frac{\arcsin(x)}{x^2}\, dx = \frac{-\arcsin(x)}{x} + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{\sqrt{1-x^2} + 1}\right| + C$$

$$\int \arctan(\sqrt{x})\,dx = \left| \begin{array}{ll} \overset{\text{sub.}}{\sqrt{x} = y} & dx = 2y\,dy \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dy \,; & \end{array} \right| = \int 2y \arctan(y)\,dy \overset{\text{Per-partes}}{=}$$

$$= \left| \begin{array}{ll} 2y = f & F = y^2 \\ \arctan(y) = G & g = \frac{1}{1+y^2} \end{array} \right| = y^2 \cdot \arctan(y) - \int \frac{y^2}{1+y^2}\,dy = y^2 \cdot \arctan(y) - \int 1 - \frac{1}{1+y^2}\,dy =$$

$$= y^2 \cdot \arctan(y) - y + \arctan(y) + C \overset{\text{zpět. sub.}}{=} \underline{\underline{(x+1)\arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + C}}$$

---

## Domácí úkol č. 9

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)}\,dx \overset{\text{parc. zlomky}}{=} {*} \left| \begin{array}{l} \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+5} = \frac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)} \\ \Rightarrow A(x^2+8x+15) + B(x^2+6x+5) + C(x^2+4x+3) = x \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 : A+B+C = 0 \\ x^1 : 8A + 6B + 4C = 1 \\ x^0 : 15A + 5B + 3D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 1 \\ 15 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -10 & -12 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -5 \end{array} \right) \Rightarrow C = -5/8 \,; \quad B = \frac{1 - 4 \cdot \frac{5}{8}}{-2} = \frac{6}{8} \,; \quad A = \frac{5}{8} - \frac{6}{8} = -\frac{1}{8} \Bigg| =$$

$${*} = \int \left( \frac{-1}{8(x+1)} + \frac{6}{8(x+3)} + \frac{-5}{8(x+5)} \right) dx = \frac{1}{8}\left( -\ln(|x+1|) + 6\ln|x+3| - 5\ln|x+5| \right) + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{8} \ln \left| \frac{(x+3)^6}{(x+1)(x+5)^5} \right| + C}}$$

- $$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dx}{\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{1+\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{sub.:} \\ \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = y \ ; \ \frac{2}{\sqrt{3}}\,dx = dy \end{array} \right| = \frac{4}{3}\int \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{dy}{1+y^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}(y) + C \overset{\text{zpět. sub.}}{=}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

- $$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+4x^2} = \left| \begin{array}{l} \text{sub.:} \\ 2x = t \\ 2dx = dt \\ x \to \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow t \to \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x \to \sqrt{3} \Rightarrow t \to 2\sqrt{3} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}\left(2\sqrt{3}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

$$\approx 0{,}121634$$

- $$\int_0^{\pi/2} \sin^3(t)\sqrt{\cos(t)}\,dt = \left| \begin{array}{l} \text{sub.:} \\ \cos(t) = x \\ -\sin(t)\,dt = dx \\ t \to 0 \Rightarrow x \to 1 \\ t \to \pi/2 \Rightarrow x \to 0 \end{array} \right| = \int_1^0 -(1-x^2)\sqrt{x} = \int_0^1 \sqrt{x} - x^{5/2}\,dx =$$

"prohození integračních mezí"

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = \left(\frac{2}{3}-\frac{2}{7}\right) - (0-0) = \frac{8}{21}$$

- $$\int_0^2 \frac{x^2}{(x+1)^4}\,dx = \left| \begin{array}{lll} \text{sub.:} & & \\ x+1 = y & x \to 0 & \Rightarrow y \to 1 \\ dx = dy \ ; & x \to 2 & \Rightarrow y \to 3 \end{array} \right| = \int_1^3 \frac{(y-1)^2}{y^4}\,dy =$$

$$= \int_1^3 y^{-2} - 2y^{-3} + y^{-4}\,dy = \left[-\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{3y^3}\right]_1^3 = \left(-\cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{9} - \frac{1}{81}\right) -$$

$$-\left(\cancel{-1+1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right) = \frac{9-1}{81} = \frac{8}{81}$$

$$\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} \text{sub.} & \\ \ln(x) = y & x \to 1 \Rightarrow y \to 0 \\ \frac{1}{x}dx = dy\,; & x \to e \Rightarrow y \to 1 \end{array} \right| = \int_0^1 y^2\,dy = \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$