Domácí úkol č. 3

Příklady

1. (5 bodů)
Najděte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (5 bodů)
Vypočítejte následující limity posloupností reálných čísel (i s postupem):

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[2]{5+8n^2} - 2n \right) \tag{1b}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+2n}{\sqrt{9n^4+1}} \tag{1b}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{n} - \frac{5n}{2n^2+1} \right) \tag{1b}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}} - \sqrt{n} \tag{2b}$$

Hint: V poslední limitě využijte vztahu: $A - B = \frac{A^2-B^2}{A+B}$

BONUS (4 body)
Jako Fibonacciho posloupnost se v matematice označuje posloupnost reálných čísel daná tzv. rekurzivním vzorcem:

$$n \in \mathbb{N},\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \qquad \boxed{a_{n+1} = a_n + a_{n-1}} \qquad \text{kde} \qquad \boxed{a_0 = a_1 = 1}$$

Tedy každý prvek posloupnosti je dán součtem dvou předchozích prvků $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 35, ...)$.

Výše zmíněný rekurzivní vzorec lze zapsat i maticově:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

Pokud nyní aplikujeme rekurzivní vzorec v maticové podobě $n-$krát na počáteční prvky a_0, a_1 dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \tag{*}$$

Otázkou je nyní, jak efektivně umocnit matici $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ na $n-$tou?

Mocnění matic lze efektivně provést pomocí vlastních čísel a příslušných vlastních vektorů. Pokud pro danou matici $A_{m\times m}, m \in \mathbb{N}$ nalezneme m vlastních čísel a příslušných vl. vektorů, pak máme m rovnic:

$$\begin{aligned} A\vec{v}_1 &= \lambda_1\vec{v}_1 \\ A\vec{v}_2 &= \lambda_2\vec{v}_2 \\ &\vdots \\ A\vec{v}_m &= \lambda_m\vec{v}_m \end{aligned}$$

Tyto rovnice lze zapsat i v maticové podobě (můžete si zkusit např. pro matici typu 2×2 pro některý z příkladů ve skriptech):

$$AR = RD$$

kde $R = (\vec{v}_1|\vec{v}_2|...|\vec{v}_m)$ je matice sestavená ze vlastních vektorů (**ve sloupcích**) a $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ je diagonální matice sestavená z vl. čísel. (vl. čísla jsou na hlavní diagonále, mimo diagonálu jsou nuly). Vlastní vektory jsou určeny až na násobek libovolým $p \in \mathbb{C}, |p| \neq 0$, takže do sloupců matice R je možné dát libovolné, nenulové násobky vl. vektorů (stejné vektory ale pak musíme použít i pro výpočet R^{-1})!

Pokud výše uvedený vztah přepíšeme, dostaneme:

$$AR = RD \quad \Longrightarrow \quad \boxed{A = RDR^{-1}}$$

Pokud nyní umocníme matici A na $n-$tou, máme:

$$A^n = \underbrace{RDR^{-1}RDR^{-1}\cdots RDR^{-1}}_{n-\text{krát}} = RD^nR^{-1}$$

jelikož se matice RR^{-1} vždy "zkrátí". Výhodou je tedy, že se mocnění původní matice A "převede" na mocnění diagonální matice D, což je snadné, stačí umocnit každý prvek na diagonále.

V našem případě, pro matici $A_{2\times2}$ se dvěma vlastními čísly a příslušnými vl. vektory máme:

$$A^n = \Big(\vec{v}_1|\vec{v}_2\Big)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}^n\Big(\vec{v}_1|\vec{v}_2\Big)^{-1} = \boxed{\Big(\vec{v}_1|\vec{v}_2\Big)\begin{pmatrix}(\lambda_1)^n & 0\\ 0 & (\lambda_2)^n\end{pmatrix}\Big(\vec{v}_1|\vec{v}_2\Big)^{-1}}$$

Vaším úkolem je tedy najít vl. čísla, λ_1, λ_2 a příslušné vl. vektory, $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ matice $A = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ a dosadit je do vzorce pro A^n a následně do rovnice (*) a spočítat vektor $\left(\begin{smallmatrix}a_{n+1}\\ a_n\end{smallmatrix}\right)$ a tím pádem nalézt vzorec pro a_n (resp. a_{n+1}).

Hint: Označte si $\lambda_1 = \varphi$, potom bude $\lambda_2 = 1 - \varphi$ a bude platit $\varphi(1-\varphi) = -1$. Pracujte při výpočtech s φ, vyhnete se tak odmocninám apod.