Označení

V následujícím textu bude užito toto značení:

- $\hat{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$;
- vektory značíme tučnými malými latinskými písmeny: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (se složkami x_i, $i \in \hat{n}$), speciálně nulový vektor (odpovídající dimenze) budeme značit symbolem $\mathbf{0}$;
- matice značíme tučnými velkými latinskými písmeny: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ (její prvky pak označíme $a_{i,j}$, $i \in \hat{m}$, $i \in \hat{n}$), speciálně jednotkovou matici (odpovídající dimenze) budeme značit $\mathbf{E}$.

1 Normy vektorů a matic, vlastnosti matic

Pojmy:

- Normy vektorů a matic.
- Matice ostře diagonálně dominantní (ODD) a symetrická pozitivně definitní (SPD).
- Vlastní čísla a vektory matice, spektrální poloměr.

1.1 Normy vektorů a matic

1.1.1 Normy vektorů

Pro vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ budeme používat normy typu

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

konkrétně tyto tři typy vektorových norem:

- „sloupcová“ norma
$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$
- (již známá) euklidovská norma
$$\|\mathbf{x}\|_E = \|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$
- „řádková“ norma
$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i \in \hat{n}} |x_i|.$$

Pro vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ zapsaný jako $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tedy máme:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3|,$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}.$$

1.1.2 Normy matic

Pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ budeme používat normy, které jsou odvozeny ze stejně označených vektorových norem pro vektory z $\mathbb{R}^n$:

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x}, \|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Konkrétně budeme užívat tyto tři typy matiových norem:

- sloupcová norma
$$\|\mathbf{A}\|_1 = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1} = \max_{j\in\hat{n}} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|,$$
- Frobeniova norma (Pozor – nejedná se o euklidovskou normu!)
$$\|\mathbf{A}\|_E = \left(\sum_{i,j\in\hat{n}} |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \overset{!}{\neq} \|\mathbf{A}\|_2 = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2},$$
- řádková norma
$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = \max_{i\in\hat{n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$ zapsanou jako $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ tedy máme:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max \{|a_{1,1}| + |a_{2,1}| + |a_{3,1}|, |a_{1,2}| + |a_{2,2}| + |a_{3,2}|, |a_{1,3}| + |a_{2,3}| + |a_{3,3}|\},$$
$$\|\mathbf{A}\|_E = \sqrt{a_{1,1}^2 + a_{1,2}^2 + a_{1,3}^2 + a_{2,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{2,3}^2 + a_{3,1}^2 + a_{3,2}^2 + a_{3,3}^2},$$
$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max \{|a_{1,1}| + |a_{1,2}| + |a_{1,3}|, |a_{2,1}| + |a_{2,2}| + |a_{2,3}|, |a_{3,1}| + |a_{3,2}| + |a_{3,3}|\}.$$

1.2 Matice ODD a SPD

U matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ budeme určovat dvě užitečné vlastnosti – zda jsou ODD (ostře diagonálně dominantní) či SPD (symetrické a pozitivně definitní).

1.2.1 ODD

Ostře diagonálně dominantní matice je taková, která je ostře diagonálně dominantní řádkově *nebo* sloupcově, tedy platí *alespoň jedna* z následujících *ostrých* nerovností:

$$\text{řádkově} \;\; (\forall i \in \hat{n}) \left(|a_{i,i}| > \sum_{j\in\hat{n}, j\neq i} |a_{i,j}| \right) \vee \text{sloupcově} \;\; (\forall i \in \hat{n}) \left(|a_{i,i}| > \sum_{i\in\hat{n}, i\neq j} |a_{i,j}| \right).$$

Pro ODD matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3,3}$ tedy musí platit:

$$[(|a_{1,1}| > |a_{1,2}| + |a_{1,3}|) \wedge (|a_{2,2}| > |a_{2,1}| + |a_{2,3}|) \wedge (|a_{3,3}| > |a_{3,1}| + |a_{3,2}|)] \;\; \text{(řádkově ODD)} \vee$$
$$[(|a_{1,1}| > |a_{2,1}| + |a_{3,1}|) \wedge (|a_{2,2}| > |a_{1,2}| + |a_{3,2}|) \wedge (|a_{3,3}| > |a_{1,3}| + |a_{2,3}|)] \;\; \text{(sloupcově ODD)}.$$

1.2.2 SPD

Symetrická a pozitivně definitní je taková matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, která je symetrická *a zároveň* pozitivně definitní:

- $\mathbf{A}$ je symetrická, pokud platí $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, tj. $(\forall i, j \in \hat{n})(a_{i,j} = a_{j,i})$,
- $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní, pokud pro libovolný nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$.

Postup pro určení, zda je matice $\mathbf{A}$ SPD, je tedy následující:

1. *Určíme, zda je matice symetrická.* Tímto krokem začínáme proto, že určení symetrie je mnohem jednodušší než určení pozitivní definitnosti. Navíc pouze za tohoto předpokladu lze případně přejít ke kroku 2. Nyní máme dvě možnosti:
   (a) Matice $\mathbf{A}$ není symetrická, protože alespoň pro jednu dvojici indexů $i, j \in \hat{n}$ platí $a_{i,j} \neq a_{j,i}$. V takovém případě jsme hotovi a naší odpovědí je: „Matice $\mathbf{A}$ není SPD, protože není symetrická, jelikož $a_{i,j} \neq a_{j,i}$."
   (b) Matice $\mathbf{A}$ je symetrická. V tomto případě tedy pokračujeme v následujícím kroku.

2. Určíme pozitivní definitnost reálné *symetrické* matice $\mathbf{A}$. Speciálně pro takovýto případ slouží Sylvesterovo kritérium – všechny hlavní minory $\mathbf{A}$ musí být kladné (nikoli nezáporné, tj. *ostře* větší než 0). Postupně tedy určujeme (pokud kterákoliv z následujících podmínek neplatí, končíme se závěrem, že není SPD, protože není pozitivně definitní):
   (a) $|a_{1,1}| > 0$,
   (b) $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} > 0$,
   (c) $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} > 0$.

   Pokud jsou i tyto podmínky splněny, tak je matice pozitivně definitní. Z předchozího kroku také víme, že je i symetrická, tedy je SPD.

1.3 Vlastní čísla a vektory, spektrální poloměr

Vlastní čísla i vektory známe z prvního ročníku, proto jen ve zkratce – pro vlastní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ a k němu příslušející vlastní vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $x \neq \mathbf{0}$ matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ platí z definice vztah $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ (nebo také $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{E}\mathbf{x}$).

Po převedení obou výrazů na jednu stranu rovnice (tj. $\mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{0}$) a vytknutí $\mathbf{x}$ dostáváme rovnici $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Pokud by byla matice soustavy $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ regulární, měla by tato homogenní soustava právě jedno řešení ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$), které ovšem z definice není vlastním vektorem. Bude nás tedy zajímat případ, kdy budou existovat i jiná řešení (tedy musí jich být nutně nekonečně mnoho) a soustava bude singulární: $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$.

Řešením této tzv. charakteristické rovnice (či také charakteristického polynomu) dostáváme vlastní čísla λ. K vlastnímu číslu λ dostaneme vlastní vektory zpětným dosazením. Připomeňme, že po dosazení musí řádky v matici soustavy vycházet lineárně závislé a pro nalezení všech příslušných vlastních vektorů bude dobré použít parametrizaci, kde parametr $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pokud vychází právě jedno řešení této soustavy, pak je zřejmě chyba ve výpočtu λ.
Připomeňme si ještě častou chybu v označení:

$$\mathbf{A} \overset{!}{\neq} \begin{pmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} - \lambda \end{pmatrix} \overset{!}{\neq} (a_{1,1} - \lambda)(a_{2,2} - \lambda)(a_{3,3} - \lambda) + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + \dots$$

Správně bychom měli psát:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{1,1} - \lambda)(a_{2,2} - \lambda)(a_{3,3} - \lambda) + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + \dots$$

Jako *spektrální poloměr* matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ pak označujeme maximum absolutních hodnot vlastních čísel:

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{i \in \hat{n}} |\lambda_i| \,.$$

Poznamenejme, že pro horní odhad spektrálního poloměru můžeme použít libovolnou maticovou normu:

$$\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\| \,.$$

2 Prostá iterační metoda (PIM)

Pojmy:

- Prostá iterační metoda
- Konvergence, odhad chyby řešení, rychlost konvergence.

2.1 Úvod do iteračních metod

Metody přibližného řešení soustavy lineárních rovnic se využívají tehdy, když je přesné řešení soustavy výpočetně příliš náročné. To nastává v případech, kdy je soustava příliš "velká", tj. matice soustavy je řádově $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ kde $n \sim (10^4$ až $10^6)$. Připomeňme, že Gaussova eliminace (přímý výpočet) vyžaduje přibližně n^3 operací.
Iterační metodou v obecném smyslu slova se rozumí proces, kdy máme k dispozici odhad výsledného řešení a tento odhad dále zpřesňujeme dle předem sestrojeného předpisu/algoritmu.
Jedním krokem iteračního procesu/metody rozumíme přechod (získání výsledku) od nějakého stávajícího přibližného řešení (ozn. $\mathbf{x}^{(k)}$) ke zpřesněnému řešení (ozn. $\mathbf{x}^{(k+1)}$).

- Formální zápis iteračního kroku: $\mathbf{x}^{(k)} \xrightarrow{\text{iterace}} \mathbf{x}^{(k+1)}$

Zde $\mathbf{x}^{(k)}$ značí přibližné řešení daného problému po provedení $k-$iterací. (Symbol $\mathbf{x}$ zde v závislosti na typu řešeného problému může reprezentovat skalár či vektor, nebo dokonce obecnější entitu)

- Přesné řešení daného problému (které neznáme) je formálně značeno jako: $\mathbf{x}^*$

Tvorbu obecného předpisu pro prostou iterační metodu můžeme přiblížit na následujícím případě. Máme za úkol vyřešit (velkou) soustavu lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Tuto soustavu je možné formálně přepsat do tvaru:

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{Ex} - \mathbf{Ex} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Pokud za $\mathbf{x}$ na pravé straně dosadíme nějakou přibližnou hodnotu řešení, tak na levé straně dostaneme "novou"hodnotu $\mathbf{x}$. V jazyce iteračního procesu, můžeme tento proces modelovat takto:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

Nyní ovšem záleží na tom, zda jsme na levé straně získali "lepší"odhad přesného řešení. Nebo-li, zda pro nějakou normu platí:

$$\left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^*\right\| < \left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\|$$

Hlavním z úkolů numerické matematiky je tedy sestavení nejrůznějších iteračních metod následované analýzou jejich kvalit.

Poznámka: Pro rovnici $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ můžeme iterační metodu sestavit například (trochu obecněji) i takto $(\omega \neq 0)$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} + \omega(\mathbf{b} - \mathbf{Ax})$$
$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{E} - \omega\mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \omega\mathbf{b}$$

2.2 Prostá iterační metoda

Je-li soustava lineárních rovnic zapsána ve tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{Ux} + \mathbf{v}$, pak prostá iterační metoda (PIM) je dána předpisem:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{v}$$

Definice: Říkáme, že iterační metoda pro danou soustavu lineárních rovnic konverguje, pokud pro libovolné $\mathbf{x}^{(0)}$ posloupnost $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}$ získaná předpisem této iterační metody konverguje k přesnému řešení této soustavy rovnic.

- Nutná a postačující podmínka pro konvergenci PIM: $\rho(\mathbf{U}) \leq \|\mathbf{U}\| < 1$
- Je-li $\|\mathbf{U}\| < 1$, pak je PIM konvergentní.
- Platí následující odhad chyby:

$$\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\| \leq \frac{\|\mathbf{U}\|}{1 - \|\mathbf{U}\|}\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\|, \quad \left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\| \leq \frac{\|\mathbf{U}\|^k}{1 - \|\mathbf{U}\|}\left\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^0\right\|$$

2.3 Příklady ze cvičení

2.3.1 Příklad

Je dána soustava rovnic $\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{v}$, kde

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.0 \\ 0.0 & 0.9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Určete vlastní čísla maticer $\mathbf{U}$ a její spektrální poloměr.

b) Volte počáteční přiblížení $\mathbf{x}^{(0)} = (10, 1)^T$ a spočtěte $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{x}^3$ prostou iterační metodou.

c) Určete přesné řešení dané soustavy $\mathbf{x}^*$ a spočtěte chybu $\mathbf{e}^j = \mathbf{x}^j - \mathbf{x}^*$ pro $j = 0, 1, 2, 3$.

d) Určete $n-$tou iteraci $\mathbf{x}^n$ prosté iterační metody a spočtěte chybu $\mathbf{e}^n = \mathbf{x}^n - \mathbf{x}^*$

Řešení:

a) $\lambda_1 = 0.4,\ \mathbf{u}_{\lambda_1} = (1, 0)^T, \quad \lambda_2 = 0.9,\ \mathbf{u}_{\lambda_1} = (0, 1)^T, \quad \rho(\mathbf{U}) = 0.9$

b) $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.0 \\ 0.0 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0.9 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.0 \\ 0.0 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0.9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 0.81 \end{pmatrix}$

$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.0 \\ 0.0 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.6 \\ 0.81 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.64 \\ 0.729 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{e}^n = \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 4 \cdot 0.4^{n-1} \\ 0.9^n \end{pmatrix}$

```
U = [0.4,0;0,0.9]
[u,lambda] = eig(U)
rho = max(abs(eig(U)))
n = 1000
v = [0;0]
x0 = [10;1]
```

```
x = x0
for i=1:n
 x = U*x+v
end
```

3 Jacobiova a Gaussova-Seidelova iterační metoda

Jacobiova a Gaussova-Seidelova iterační metoda jsou speciálním případem převodu soustavy rovnic z tvaru

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Algoritmus pro obě iterační metody se většinou zapisuje v tzv. složkovém tvaru. Pro maticový zápis u Gaussovy metody je potřeba spočítat inverzní matici $(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}$, což by pro “velké” matice vyžadovao řádově $\mathcal{O}(n^3)$ operací.

3.1 Jacobiova metoda

Složkový zápis Jacobiovy iterační metody
Pro řešení soustavy rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ je Jacobiova metoda dána předpisem pro výpočet složek vektoru $\mathbf{x}^{(k+1)}$ z ppředchozí iterace $\mathbf{x}^{(k)}$ dle vzorce

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Maticový zápis Jacobiovy iterační metody
Nechť $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{P}$ je matice původní soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ rozštěpená na dolní trojúhleníkovou ($\mathbf{L}$), diagonální ($\mathbf{D}$) a horní trojúhelníkovou ($\mathbf{P}$) matici. Pak lze přepsat složkový zápis iterační metody do rovnice

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{U}_J \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{v}_J$$

kde $\mathbf{U}_J = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{P})$ a $\mathbf{v}_J = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$

Důležité vlastnosti

- Je-li matice $\mathbf{A}$ ODD, pak je Jacobiova metoda konvergentní.
- Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vl. číslo matice $\mathbf{U}_J$ pávě když je kořenem rovnice $det(\mathbf{L} + \lambda\mathbf{D} + \mathbf{P}) = 0$
- Jacobiova iterační metoda je konvergentní právě když $\rho(\mathbf{U}_J) < 1$

3.2 Gauss-Seidelova metoda

Složkový zápis Gauss-Seidelovy iterační metody
Pro řešení soustavy rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ je Gauss-Seidelova metoda dána předpisem pro výpočet složek vektoru $\mathbf{x}^{(k+1)}$ z ppředchozí iterace $\mathbf{x}^{(k)}$ dle vzorce

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Maticový zápis Gauss-Seidelovy iterační metody
Nechť $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{P}$ je matice původní soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ rozštěpená na dolní trojúhleníkovou ($\mathbf{L}$), diagonální ($\mathbf{D}$) a horní trojúhelníkovou ($\mathbf{P}$) matici. Pak lze přepsat složkový zápis iterační metody do rovnice

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{U}_{GS} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{v}_{GS}$$

kde $\mathbf{U}_{GS} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{P}$ a $\mathbf{v}_{GS} = (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$

Důležité vlastnosti

- Je-li matice $\mathbf{A}$ ODD, nebo SPD pak je Gauss-Seidelova metoda konvergentní.
- Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vl. číslo matice $\mathbf{U}_{GS}$ pávě když je kořenem rovnice $det(\lambda\mathbf{L} + \lambda\mathbf{D} + \mathbf{P}) = 0$.
- Gauss-Seidelova iterační metoda je konvergentní právě když $\rho(\mathbf{U}_{GS}) < 1$.

3.3 Příklady ze cvičení

3.3.1 Příklad

Je dána soustava lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Rozhodněte, zda je pro danou soustavu rovnic Jacobiova iterační metoda konvergentní.

b) Volte $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ a spočtěte $\mathbf{x}^{(1)}$ touto metodou.

Řešení:

a)

Matice $\mathbf{A}$ není ODD. Pro maticové normy platí: $\|\mathbf{A}\|_1 = 15$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = 13$, $\|\mathbf{A}\|_E = 11.79$, $\|\mathbf{A}\|_2 = 11.402$. Je tedy potřeba spočítat spektrální poloměr:

$$\det(\mathbf{U}_J - \lambda\mathbf{E}) = 0 \Leftrightarrow 0 = \det(\mathbf{L} + \lambda\mathbf{D} + \mathbf{P}) = \begin{vmatrix} \lambda & -10 & -2 \\ -1 & 5\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 10\lambda^3 = 0 \quad \Rightarrow$$

$\rho(\mathbf{U}_J) = 0 < 1 \Rightarrow$ Jacobiova iterační metoda je konvergentní

b)

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{a_{11}}\Big(b_1 - (a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)})\Big) = \frac{1}{1}\Big[-1 - \Big((-1)(-10) + (-2)(4)\Big)\Big] = -3 \\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{a_{22}}\Big(b_2 - (a_{21}x_1^{(0)} + a_{23}x_3^{(0)})\Big) = \frac{1}{5}\Big[-1 - \Big((-1)(-1) + (0)(4)\Big)\Big] = -2/5 \\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{a_{33}}\Big(b_3 - (a_{31}x_1^{(0)} + a_{32}x_2^{(0)})\Big) = \frac{1}{2}\Big[4 - \Big((2)(-1) + (0)(-1)\Big)\Big] = 3
\end{aligned}$$

3.3.2 Příklad

Je dána soustava lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Rozhodněte, zda je pro danou soustavu rovnic Jacobiova iterační metoda konvergentní.

b) Volte $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ a spočtěte $\mathbf{x}^{(1)}$ touto metodou.

Řešení:

a)

Matice $\mathbf{A}$ není ODD. Pro maticové normy platí: $\|\mathbf{A}\|_1 = 6$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = 6$, $\|\mathbf{A}\|_E = 6.7823$, $\|\mathbf{A}\|_2 = 5.0909$. Je tedy potřeba spočítat spektrální poloměr:

$$\det(\mathbf{U}_J - \lambda\mathbf{E}) = 0 \Leftrightarrow 0 = \det(\mathbf{L} + \lambda\mathbf{D} + \mathbf{P}) = \begin{vmatrix} 4\lambda & -2 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 4\lambda \end{vmatrix} = 32\lambda^3 = 0 \quad \Rightarrow$$

$\rho(\mathbf{U}_J) = 0 < 1 \Rightarrow$ Jacobiova iterační metoda je konvergentní

b)

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{a_{11}}\Big(b_1 - (a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)})\Big) = \frac{1}{4}\Big[2 - \Big((-2)(-2) + (0)(1)\Big)\Big] = -1/2 \\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{a_{22}}\Big(b_2 - (a_{21}x_1^{(0)} + a_{23}x_3^{(0)})\Big) = \frac{1}{2}\Big[-2 - \Big((1)(2) + (1)(1)\Big)\Big] = -5/2 \\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{a_{33}}\Big(b_3 - (a_{31}x_1^{(0)} + a_{32}x_2^{(0)})\Big) = \frac{1}{4}\Big[1 - \Big((0)(2) + (2)(-2)\Big)\Big] = 5/4
\end{aligned}$$

3.3.3 Příklad

Nechť matice $\mathbf{A} = \mathbf{L}+\mathbf{D}+\mathbf{P}$ je ODD v řádcích. Označíme $\mathbf{U}_J = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{P})$ iterační matici Jacobiovy metody. Ukažte, že pak paltí $\|\mathbf{U}_J\|_\infty < 1$.

Řešení:
Jestliže je matice $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ ODD v řádcích, tak platí:

$$|a_{ii}| > \sum_{j,j\neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i = 1, ..., n$$

tedy platí

$$1 > \max_i \left(\sum_{j,j\neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right)$$

Pro matici $\mathbf{U}_J$ platí

$$\mathbf{U}_J = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad i = j \\ \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{pro} \quad i \neq j \end{cases} \quad \text{tedy } \|\mathbf{U}_J\|_\infty = \sum_{j,j\neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$

A tedy máme $\|\mathbf{U}_J\|_\infty < 1$. Tím je tvrzení dokázáno.

3.3.4 Příklad

Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5/2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5/2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ -2 \end{pmatrix}$$

Určete, zda je pro danou soustavu rovnic je Gauss-Seidelova iterační metoda konvergentní.

Řešení:
Matice $\mathbf{A}$ není ODD. Pro hlavní minory matice $\mathbf{A}$ platí $A_1 = 2$, $A_2 = 8$, $A_3 = 13$, tedy je dle Sylvestrova kriteria SPD, což je postačující podmínka pro konvergenci Gauss-Seidelovy metody.

4 Metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců se zabývá problémem aproximace dané tabulky hodnot pomocí funkce zvoleného typu, např. polynomu. Nechť je dána tabulka 2D dat x_i, y_i pro $i = 1, ...n$. Kvadratickou odchylkou polynomu $p(x)$ rozumíme

$$\delta^2(p(x)) = \sum_{i=1}^{n} (p(x_i) - y_i)^2$$

Říkáme, že polynom $p^*(x)$ stupně nejvýše q aproximuje danou tabulku dat ve smyslu nejmenších čtverců, pokud

$$\delta^2(p^*(x)) \leq \delta^2(p(x)) \quad \text{pro } p(x) \text{ libovolný polynom stupně nejvýše } q$$

4.1 Odvození soustavy normálních rovnic

Mějme polynom $q-$tého stupně, kde $q > 0$ ve tvaru

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_q x^q = \sum_{i=1}^{q} a_i x^i$$

Pokud nyní uvažujeme zadanou tabulku dat x_i, y_i pro $i = 1, ...n$, můžeme setavit n rovnic

$$\mathbf{A}\alpha = \mathbf{y}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^q \\ 1 & x_2 & x_2^2 & 0\dots & x_2^q \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & 0\dots & x_n^q \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Kvadratickou odchylku nyní můžeme zapsat v kompaktním tvaru

$$\delta^2 = \|\mathbf{A}\alpha - \mathbf{y}\|_E^2$$

Kvadratická odchylka nabývá minima pro nezávislý vektor parametrů α, pokud

$$0 = \frac{\partial \delta^2}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} \left((\mathbf{A}\alpha - \mathbf{y})^T (\mathbf{A}\alpha - \mathbf{y}) \right) = \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\mathbf{y}^T \mathbf{y} \alpha^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\alpha - 2\mathbf{y}^T \mathbf{A}\alpha \right) =$$
$$= 2\mathbf{e}_i \mathbf{A}^T \mathbf{A}\alpha - 2\mathbf{e}_i \mathbf{A}^T \mathbf{y} = 2\mathbf{e}_i (\mathbf{A}^T \mathbf{A}\alpha - \mathbf{A}^T \mathbf{y})$$

Tedy můžeme soustavu normálních rovnic psát ve tvaru

$$\boxed{\mathbf{A}^T \mathbf{A}\alpha = \mathbf{A}^T \mathbf{b}}$$

kde $\alpha = (a_0, a_1, ..., a_q)^T$ a $b_i = y_i$.

Pozn.: Kvadratická odchylka zde vznikla na základě použití Eukleidovské normy, $\|\cdot\|_2$. Obecně lze také použít i jinou normu.

4.2 Příklady ze cvičení

4.2.1 Příklad

Je zadána následující tabulka hodnot

x_i	-2	-1	0	0	1	2
y_i	2.9	0.2	-1.1	-0.9	-0.2	3.1

a) Určete polynomem nejvýše 2. stupně, který ve smyslu nejmenších čtverců aproximuje zadanou tabulku hodnot

b) Stavonve odpovídající kadratickou chybu

Řešení:

a) Pro aproximaci polynomem 2. stupně máme soustavu v normálním tvaru

$$\begin{pmatrix} n & \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 \\ \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i y_i x_i \\ \sum_i y_i x_i^2 \end{pmatrix}$$

tedy

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Řešením soustavy je $\alpha = (c, b, a)^T = (-1, 0, 1)^T$ Hledaný polynom je tedy $y(x) = x^2 - 1$.

b) Kvadratická odchylka je

$$\delta^2 = \|\mathbf{A}\alpha - \mathbf{y}\|_E^2$$

tedy

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.9 \\ 0.2 \\ -1.1 \\ -0.9 \\ -0.2 \\ 3.1 \end{pmatrix} \right\|_E = \left\| \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.2 \\ 0.1 \\ -0.1 \\ 0.2 \\ -0.1 \end{pmatrix} \right\|_E = 0.3464$$

5 Nelineární rovnice a Newtonova metoda

5.1 Newtonova metoda pro soustavu n-rovnic o n-neznámých

Uvažujme rovnici

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Tato rovnice je v řadě případů značně nelineární a nalezení jejíhjo řešení vyžaduje použití iterativního procesu zpřesňování, dokud není splněna požadovaná přesnost.
Označme nyní Jacobiho matici zobrazení $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jako

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Nyní zapišme Taylorův rozvoj 1.řádu pro přírustek funkce $\mathbf{F}$. Máme

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}'(\mathbf{x})\,(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})$$

Označme nyní původní libovolný bod $\mathbf{x}$ jako $\mathbf{x}^{(k)}$ a bodem $\mathbf{x}^*$ budeme rozumět přesné řešení, tj. $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.
Dosazením získáme

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}) \left(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)}\right)$$

Tedy

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(k)} - \left(\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})\right)^{-1} \cdot F(\mathbf{x}^{(k)})$$

Jelikož jsme ale původní rovnici nahradili jejím Taylorovým polynomem 1.stupně dostaneme pouze přibližné řešení a tedy bod $\mathbf{x}^*$ není naším přesným řešením, ale pouze 'o něco přesnějším'. Označíme-li ho jako $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(k+1)}$ dostaneme finální tvar pro Newtonovu iterační metodu, podle které je možné sestavit posloupnost aproximací konvergující k přesnému řešení $\mathbf{x}^*$. Tato iterační metoda je dána předpisem

$$\boxed{\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left(\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})\right)^{-1} \cdot F(\mathbf{x}^{(k)})}$$

Nechť

- $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kde D je oblast (neprázdná, souvislá, otevřená množina)
- $F \in \mathcal{C}^2(D)$
- $F(x^*) = 0$ pro $x^* \in D$
- $J = \det(F'(x)) \neq 0$

Potom existuje okolí bodu x^*, takové že Newtonova metoda je konvergentní pro libovolné $x^{(0)}$ z tohoto okolí.

Pozn.: Výše uvedený iterační předpis Newtonovy metody platí samozřejmě i pro funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tedy funkci jedné reálné proměnné. Jacobiho matice potom přejde na obyčejnou derivaci
$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) \to \frac{df(x)}{dx}$.

5.2 Příklady ze cvičení

5.2.1 Příklad

Je dána následující soustava rovnic

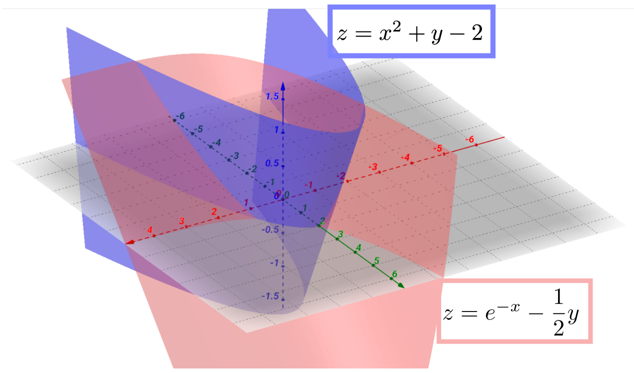
$$f_1(x, y) = x^2 + y - 2 = 0 \qquad f_2(x, y) = e^{-x} - \frac{1}{2}y = 0$$

a) Určete graficky přibližnou polohu kořenů soustavy

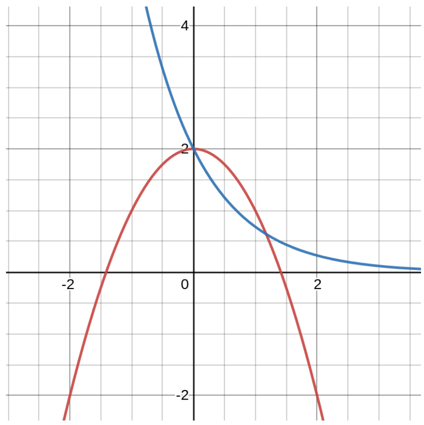
b) Stanovte aproximaci $\mathbf{X}^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)})^T$ jednoho z kořenů soustavy Newtonovou metodou při volbě $\mathbf{X}^{(0)} = (0, 1)^T$.

Řešení:

a)



Grafy funkcí f_1 a f_2, 3D



Grafy funkcí f_1 a f_2, rovina $x - y$

Z obrázků vidíme, že úloha má 2 řešení, ležící v 1. kvadrantu. To, které řešení iteračním postupem získáme, bude záviset na volbě počáteční aproximace řešení.

b) Zde označme $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$. Newtonova metoda pro soustavu dvo rovnic o dvou neznámých má tvar

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(0)} - \left(\mathbf{F}'\left(\mathbf{X}^{(0)}\right)\right)^{-1} \cdot \mathbf{F}\left(\mathbf{X}^{(0)}\right)$$

nebo také můžeme psát

$$\mathbf{F}'\left(\mathbf{X}^{(0)}\right)\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{F}'\left(\mathbf{X}^{(0)}\right)\mathbf{X}^{(0)} - \mathbf{F}\left(\mathbf{X}^{(0)}\right)$$

tedy, po vyjádření Jacobiovy matice máme

$$\begin{pmatrix} 2x & 1 \\ -e^{-x} & -1/2 \end{pmatrix}_{(x,y)=(0,1)} \mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ -e^{-x} & -1/2 \end{pmatrix}_{(x,y)=(0,1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^2 + y - 2 \\ e^{-x} - 1/2y \end{pmatrix}_{(x,y)=(0,1)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} \mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Řešení této soustavy vede na

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6 Obyčejné diferenciální rovnice, Cauchyova úloha

6.1 Cauchyova úloha

Existence a jednoznačnost
Postačující podmínkou existence a jednoznačnosti úlohy

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

je spojitost funkce f a spojitost jejíparciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}$. Pokud pro funkce $\mathbf{f} = (f_1(x), ..., f_n(x))^T : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{y} = (y_1(x), ..., y_n(x))^T : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ uvažujeme úlohu

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}(x), x), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0}$$

potom je pro existenci a jednoznačnost Cauchyovy úlohy potřeba spojitost funkce f a dále všech parciálních derivací $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $\forall i, j = 1, ..., n$.

Převod rovnice vyššího řádu
Každá obyčejná diferenciální rovnice $k-$tého řádu ($k > 1$) lze převést do tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}(x), x), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0}$$

.
Například pro rovnici druhého řádu $y'' = G(x, y, y')$ můžeme po substituci $z_1 = y$, $z_2 = y'$ psát

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ G(x, z_1, z_2) \end{pmatrix}$$

6.2 Numerické řešení Cauchyovy úlohy

Náhrady 1. derivace
Nechť je funkce $f \in \mathcal{C}^2(I)$, interval $I = \langle a, b\rangle$ a body $x, x+h \in I$, potom platí

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \qquad a \qquad f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

Numerické řešení
Zaveďme nyní následující označení. Přesné řešení $y = y(x)$ pro $x \in \langle a, b\rangle$ Cauchyovy úlohy nyní budeme hledat v bodech $x_n = a + nh$, kde $h > 0$ je tzv. krok numerické metody. Hodnoty přesného řešení v bodech x_n zde tedy aproximujeme jako $y(x_n) \approx y_n$.

6.3 Explicitní Eulerova metoda

Je dána Cauchyva úloha $y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$ (pro vektorové funkce je výsledný vzorec analogický). Volíme $y_0 = y(x_0)$ a krok $h > 0$. Hodnoty přibližného řešení vypočteme předpisem

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Říkáme, že hodnoty y_n jsou vypočtené explicitně (explicitní Eulerova metoda).

6.4 Implicitní Eulerova metoda

Je dána Cauchyva úloha $y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$ (pro vektorové funkce je výsledný vzorec analogický). Volíme $y_0 = y(x_0)$ a krok $h > 0$. Hodnoty přibližného řešení vypočteme předpisem

$$y_{n+1} - hf(x_n, y_{n+1}) = y_n$$

Říkáme, že hodnoty y_n jsou vypočtené užitím implicitní Eulerovy metody.

6.5 Příklady ze cvičení

6.5.1 Příklad(Opakování)

Určete přesné řešení úlohy s počáteční podmínkou $y(0) = D > 0$. Načrtněte graf.

a) $y' = 1$

b) $y' = y$

c) $y' = 4y$

Řešení:

a) $y = x + D$

b) $y = De^x$

c) $y = De^{4x}$

6.5.2 Příklad(Opakování)

Zopakujte si postup řešení

a) $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

b) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x(0) = A,\ \dot{x}(0) = 0,\ \omega > 0$

c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = f(t), \quad x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$

Pozn.: Pro lineární diferenciální rovnici 2. řádu v obecném tvaru

$$y''(x) + 2by'(x) + c^2 y(x) = 0$$

hledáme řešení ve tvaru

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

po dosazení máme

$$\big(\lambda^2 + 2b\lambda + c^2\big)e^{\lambda x} = 0$$

Tedy

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$$

Řešení je potom dáno vztahem

$$y(x) = e^{-bx}\Big(C_1 e^{x\sqrt{b^2-c^2}} + C_2 e^{-x\sqrt{b^2-c^2}}\Big)$$

kde konstanty C_1 a C_2 určíme z počátečních podmínek. Dále využijeme známého Eulerova vzorce

$$e^{\alpha + i\beta} = e^{a}\big(\cos(\beta) + i\sin(\beta)\big),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Pokud navíc $\lambda_1 = \lambda_2 = -b$, tak musíme upravit obecný tvar řešení, aby byl tzv. funkcionálně nezávislý

$$y(x) = C_1 e^{-bx} + C_2 x e^{-bx}$$

Řešení:

a) Zde $b = -3/2$ a $c = \sqrt{2}$, máme tedy

$$y(x) = C_1 \exp\left[x\left(\tfrac{3}{2} + \sqrt{\tfrac{9}{4} - 2}\right)\right] + C_2 \exp\left[x\left(\tfrac{3}{2} - \sqrt{\tfrac{9}{4} - 2}\right)\right]$$

$$y(x) = C_1 \exp(2x) + C_2 \exp(1x)$$

Z počátečních podmínek máme

$$1 = C_1 + C_2$$
$$-1 = 2C_1 + C_2$$

Tedy

$$y(x) = -2\exp(2x) + 3\exp(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

b) Zde $b = 0$ a $c^2 = \omega^2$, máme tedy

$$x(t) = C_1 \exp\big(-i\omega t\big) + C_2 \exp\big(+i\omega t\big)$$

$$x(t) = C_1\big[\cos(-\omega t) + i\sin(-\omega t)\big] + C_2\big[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\big]$$
$$x(t) = \bar{C_1}\cos(\omega t) + \bar{C_2}\sin(\omega t)$$

Z počátečních podmínek máme

$$A = \bar{C_1}$$
$$0 = \omega\bar{C_2}$$

Tedy

$$x(t) = A\cos(\omega t) \quad t \in \mathbb{R}$$

c) Zde řešíme nehomogenní diferenciální rovnici 2.řádu s konstantními koeficienty. Můžeme využít poznatku, že celkové řešení dané rovnice lze napsat jako součet řešení rovnice homogenní a libovolného partikulárního řešení

$$x(t) = x(t)_H + x(t)_P$$

Nyní jde o to jak nalézt partikulární řešení pro obecnou funkci $f(t)$. Pokud je funkce pravé strany $f(t)$ ve speciálním tvaru

$$f(t) = e^{rt}\big(P_k(t)\cos(st) + Q_{\tilde{k}}(t)\sin(st)\big)$$

pak můžeme partikulární řešení hledat v obdobném tvaru

$$x(t) = t^l e^{rt}\big(\tilde{P}_m(t)\cos(st) + \tilde{Q}_m(t)\sin(st)\big)$$

kde $\tilde{P}_m$ a $\tilde{Q}_m$ jsou polynomy m-tého stupně, $m = \max k, \tilde{k}$ a l je násobnost čísla $r + is$ jako kořene charaktreristické rovnice. Rovnici s obecno pravou strano lze řešit např. pomocí Laplaceovy transormace, nebo pomocí variace konstant pro tvar převedený na soustavu 1.řádu. Tento postup zde ukážeme.

Nejprve převedeme rovnici na soustavu 1.řádu

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Kde jsme použili značení $x_1(t) = x(t)$ a $x_2(t) = \dot{x}_1$. Jedná se o soustavu lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Tvar homogenního řešení získáme pomocí charakteristického polynomu (všimněte si, že polynom je až na znaménko stejný jako u rovnice 2. řádu)

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0, \quad \lambda_1 = -1 + i, \ \lambda_2 = -1 - i$$

$$\mathbf{V}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{V}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - i \end{pmatrix}$$

Homogení část řešení je tedy

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}_H = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

nebo-li

$$X_H(t) = \begin{pmatrix} e^{(-1+i)t} & e^{(-1-i)t} \\ (-1+i)e^{(-1+i)t} & (-1-i)e^{(-1-i)t} \end{pmatrix} C$$

kde $X = (x_1, x_2)^T$ a $C = (C_1, C_2)^T$. Homogenní řešení lze dále (s využitím Eulerova vzorce) upravit na

$$X_H(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ (-\cos(t) - \sin(t)) & (-\sin(t) + \cos(t)) \end{pmatrix} C$$

kde C je nyní obecně jiný vektor konstant. Pokud nyní označíme matici soustavy jako $\Phi(t)$ můžeme psát ještě kompaktněji

$$X_H = \Phi(t)C$$

Pro celkové řešení potom, s využitím linearity máme

$$X = \Phi(t)C + X_P$$

kde X_P je partikulární řešení.

Podtata metody variace konstant spočívá v tom, že partikulární řešení soustavy hledáme ve tvaru

$$X_P = \Phi(t)C(t)$$

kde $C(t) = (C_1(t), ..., C_n(t))^T$ jsou funkce proměnné t, které máme určit. Dosazením dostaneme

$$\dot{X}_P = \dot{\Phi}(t)C(t) + \Phi(t)\dot{C}(t)$$

Pokud původní tvar soustavy napíšeme maticově, ve tvaru

$$\dot{X} = A(t)X + B(t)$$

máme po dosazení partikulárního řešení (s přihlédnutí k faktu $\dot{\Phi(t)} = A(t)\Phi(t)$) a úpravách

$$\Phi(t)\dot{C} = B$$

A tedy finální tvar partikulárního řešení je

$$X_P(t) = \Phi(t) \int \Phi(t)^{-1} B(t) dt$$

Naše řešení jde tedy (pouze formálně - neznáme konkrétní tvar funkce $f(t)$) napsat jako

$$X(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ (-\cos(t) - \sin(t)) & (-\sin(t) + \cos(t)) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \int e^{-t} f(t) \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix} dt \right]$$

Zde, konstanty C_1 a C_2 bychom určili z počátečních podmínek.

7 Numerické řešení Cauchyovy úlohy. Eulerova a Collatzova metoda

Uvažujme následující Taylorůvovy rozvoje funkce f

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

Jejich odečtením získáme

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \mathcal{O}(h^3)$$

Odtud lze vyjádřit 1.derivaci pomocí tzv. centrální diference

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Pokud nyní použijeme tento vztah a nahradíme 1.derivaci v Eulerově metodě v bodě $x_{n+1/2} = x_n + \frac{h}{2}$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} \approx y'(x_{n+1/2}) = f(x_{n+1/2}, y(x_{n+1/2}))$$

kde na pravé straně užijeme aproximaci Taylorovým polynomem

$$y(x_n + h/2) = y(x_n) + \frac{h}{2}y'(x_n) + \mathcal{O}(h^2) \approx y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)$$

Celkem dostaneme tzv. Colltzovu metodu.

Colltzova metoda
Je dána Cauchyova úloha $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(0) = y_0$. Zvolíme-li krok $h > 0$, počáteční aproximaci dle počáteční podmínky úlohy (y_0) a vypočteme hodnoty aproximací y_n předpisem

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right)$$

Říkáme, že přibližné hodnoty y_n jsou vypočtené užitím Colltzovy metody.

Algoritmus Collatzovy metody

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ y_{pom} &= y_n + \frac{h}{2} \cdot k_1 \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_{pom}\right) \\ y_{n+1} &= y_n + h \cdot k_2 \end{aligned}}$$

7.1 Příklady ze cvičení

7.1.1 Příklad

Je dána Cauchyova úloha

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Užijte krok $h = 0.2$ a spočítejte aproximaci řešení $X(0.2)$ pomocí explcitní Eulerovy metody.

b) Užijte krok $h = 0.2$ a spočítejte aproximaci řešení $X(0.2)$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

Řešení:

a) Pro úlohu

$$\dot{X} = AX + B,$$

kde A je matice s konstantními koeficienty a B je vektor pravé strany, máme Eulerovu metodu v následujícím tvaru

$$\begin{aligned} X^{(n+1)} &= X^{(n)} + hAX^{(n)} + hB &&\longrightarrow X^{(n+1)} = (E + hA)X^{(n)} + hB &&\text{(explicit.)} \\ X^{(n+1)} &= X^{(n)} + hAX^{(n+1)} + hB &&\longrightarrow X^{(n+1)} = (E - hA)^{-1}(X^{(n)} + hB) &&\text{(implicit.)} \end{aligned}$$

tedy

$$X(0.2) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.4 \\ 0 \\ 1.8 \end{pmatrix}$$

b)

$$X(0.2) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 0.2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} -55 \\ -23 \\ 40 \end{pmatrix}$$

8 Numerické řešení Cauchyovy úlohy, metody Runge-Kutty (MATLAB)

- **Obecná jednokroková metoda**
  Je dána Cauchyova úloha
  $$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$
  Volíme krok $h > 0$ a počáteční aproximaci $y_0 = y(x_0)$. Říkáme, že hodnoty aproximací y_n jsou dány obecnou jednokrokovou metodou, pokud platí:
  $$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h)$$

- **Konzistentní metoda**
  Říkáme, že jednokroková metoda je konzistentní s Cauchyovou úlohou, pokud
  $$\Phi(x,y,0) = f(x,y) \qquad \forall x \in \langle a,b\rangle, \quad y \in \mathbb{R}$$
  a funkce $\Phi = \Phi(x,y,h)$ je spojitá.

- **L-lipschitzovská funkce**
  O funkci $\Phi(x,y,h)$ řekneme, že je L-lipschitzovská v argumentu y, jestliže existuje $C_L > 0$ takové, že
  $$|\Phi(x,y_1,h) - \Phi(x,y_2,h)| \leq C_L|y_1 - y_2|$$

- **Konvergence metody**
  Řekneme, že obecná jednokroková metoda je konvergentní, pokud pro libovolné $x \in \langle a,b\rangle$
  $$\lim_{h\to 0^+, x=x_n} y_n = y(x)$$
  kde y_n je přibližné řešení v uzlu $x_n = x$ a $y(x)$ je přesné řešení.

- **Řád numerické metody**
  Říkáme, že obecná jednokroková metoda je řádu p, pokud existuje konstanta $C > 0$, taková, že pro libovolné $x \in \langle a,b\rangle$, $y \in \mathbb{R}$ a $h \in (0,h_0)$:
  $$|\delta(x,y,h)| = |\Phi(x,y,h) - \Delta(x,y,h)| \leq Ch^p$$

- **Metody typu Runge-Kutta (RK)**
  Metody Runge-Kutta jsou jednokrokové metody, kde přírůstkovou funkci hledáme ve tvaru
  $$\Phi(x,y,h) = \sum_{i=1}^{M} \omega_j k_i, \qquad \text{kde} k_i = f(x + \alpha_i h, y + h\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j)$$
  Koeficienty ω_i, α_i, $\beta_i j$ hledáme tak, aby metoda byla co nejpřesnější.

- **RK4**
  Je dána Cauchyova úloha. Volíme $y_0 = y(x_0)$, krok $h > 0$ a vypočteme posloupnost aproximací $\{y_n\}$ předpisem

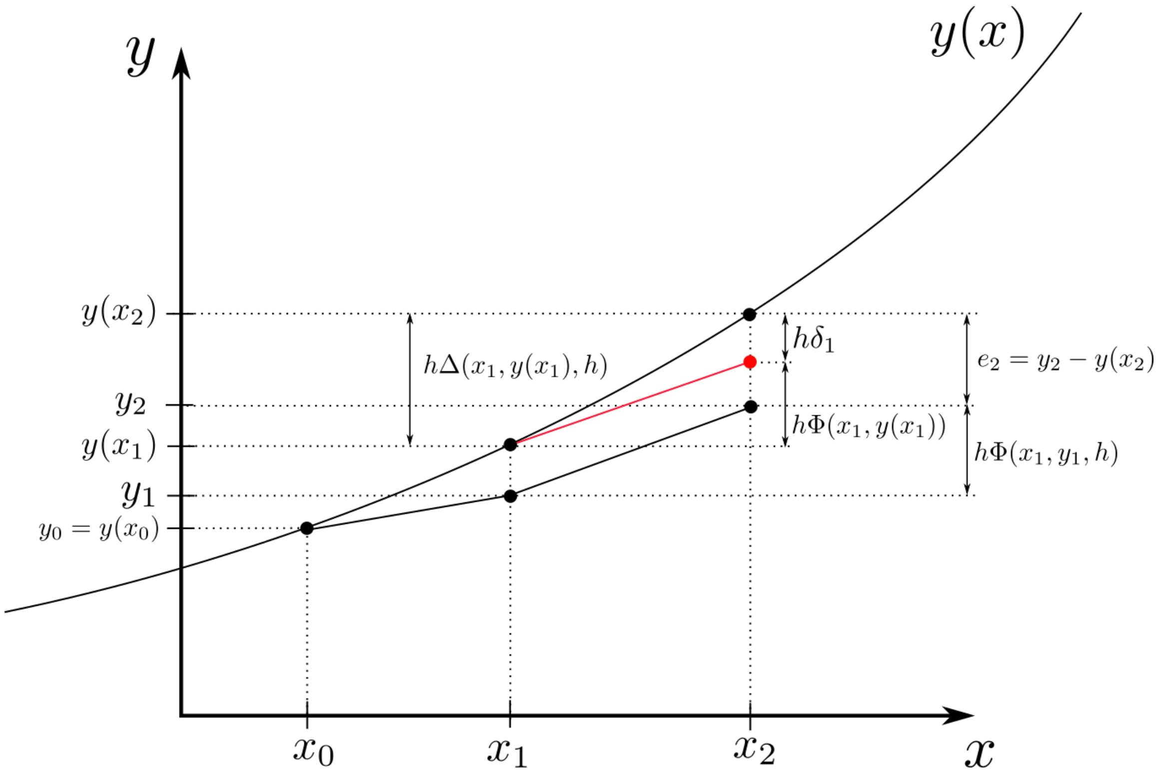
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

  kde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, yn), \\ k_2 &= f(x_n + h/2, y_n + k_1h/2), \\ k_3 &= f(x_n + h/2, y_n + k_2h/2), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + k_3h) \end{aligned}$$

  Pak říkáme, že hodnoty aproximací y_n jsou vypočteny pomocí Rungeovy-Kuttovy metody 4. řádu. Lokální relativní aproximační chyba je 4. řádu, tj. $\mathcal{O}(h4)$.

- **Pozn.:**
  Collatzova metoda je vlastně Rungeova-Kuttova metoda 2.řádu



8.1 Příklady ze cvičení

8.1.1 Příklad

Výchylka mechanického oscilátoru $x(t)$ je v bezrozměrném tvaru popsána

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = \frac{1}{10t+1}\sin(50\pi t), \qquad x(0) = 0.05,\ \dot{x}(0) = 0$$

kde $m = 0.1$ a $k = 4.2$.

a) Určete fundamentální systém řešení homogenní rovnice a určete frekvenci jeho kmitů (pro tento účel položme $d = 0$).

b) Pro $d = 0.01$ určete přibližné kořeny charakteristické rovnice. Na základě výsledků a) a kořenů charakteristické rovnice rozhodněte, zda volba kroku $h = 0.2$ je vhodná pro Eulerovu explicitní metodu.

c) (MATLAB) Volte krok h vhodně a užijte Collatzovu metodu pro určení hodnot řešení v intervalu $[0, 3]$.

d) (MATLAB) Volte krok h vhodně a užijte RK4 pro určení hodnot řešení v intervalu $[0, 3]$.

Řešení:

a) Pro $d = 0$ určíme fundametální systém:

$$m\lambda^2 + k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = +i\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Homogenní část obecného řešení je tedy dána vztahem:

$$x_H(t) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

Fundamentální systém je tedy:

$$\Phi_1(t) = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right), \qquad \Phi_2(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

b) Pro $d = 0.01$ mmáme charakteristickou rovnici ve tvaru:

$$m\lambda^2 + 0.01\lambda + k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-0.01 \pm \sqrt{0.01^2 - 4mk}}{2m} \approx \lambda_{1,2} = \frac{-0.01}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Po dosazení zadaných parametrů máme:

$$\lambda_1 = -0.05 + i\sqrt{42} \qquad \lambda_2 = -0.05 - \sqrt{42}$$

Homogenní část obecného řešení bude ve tvaru:

$$x_H(t) = e^{-0.05t}\left[C_1 \sin\left(\sqrt{42} \cdot t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{42} \cdot t\right)\right]$$

Jelikož $\sqrt{42} \approx 2\pi$, tak při volbě kroku $h = 0.2$ bychom se trefili do intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ přibližně 5-krát v rámci jedné preriody sinusovky. Pro budící sílu

$$\frac{1}{10t+1}\sin(50\pi t)$$

by to potom bylo dokonce pouze 0.2-krát! Zkusme proto volit krok $h = \frac{1}{250}$. V tomto přípaě zachytíme průběh budící síly pomocí 10-ti hodnot (1 průběh sinusovky).

9 Okrajová úloha pro ODR, metoda sítí

- **Okrajová úloha**
  V technických problémech se často řeší úlohy zadané pomocí tzv. okrajových podmínek.
  Řešení hledáme na intervalu $I = (a, b)$ a v krajních bodech a a b jsou předepsány okrajové podmínky
- **Samoadjungovaný tvar úlohy**
  Existenci a jednoznačnost úloh lze dokázat např. pro rovnice zapsané v tzv. samoadjungovaném tvaru (tvar, v kterém jsou fyzikální úlohy často zapsány).
- **Okrajová úloha pro lineární ODR 2. řádu** Hledáme funkci $y = y(x)$ takovou, že platí:

  a)
  $$\boxed{-(p(x)y')' + q(x)y = f(x), \qquad \text{pro } x \in (a, b),}$$

  b)
  $$\alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y(a) = \alpha_3, \qquad \beta_1 y'(b) + \beta_2 y(b) = \beta_3$$

  kde $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$

  Klasickým řešením této úlohy rozumíme funkci $y \in \mathcal{C}^2(\langle a, b\rangle)$, která splňuje rovnici i okrajové podmínky.
- **Existence a jednoznačnost**
  Nechť $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $f(x)$ jsou spojité na $\langle a, b\rangle$ a navíc $\forall x \in \langle a, b\rangle : p(x) > 0, q(x) \geq 0$. Pak existuje právě jedno řešení $y(x)$ dané okrajové úlohy (s výjimkou případu $\alpha_2 = \beta_2 = 0, q(x) \equiv 0$)

9.1 Numerické řešení úlohy v samoadjungovaném tvaru pomocí metody sítí

- Řešení hledáme na intervalu $I = \langle a, b\rangle$.
- Volíme krok $h = (b - a)/n$ a síť v bodech $x_i = a + ih$
- Aproximace bodech $y(x_i) \approx y_i$

$$\begin{aligned} qy\big|_{x_i} &\approx q_i y_i \\ f\big|_{x_i} &\approx f_i \\ -(py')'\big|_{x_i} &\approx \frac{p_{i+1/2}y'(x_i + h/2) - p_{i-1/2}y'(x_i - h/2)}{h} \end{aligned}$$

kde
$$y'(x_i - h/2) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \qquad y'(x_i + h/2) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Po náhradě původní rovnice v uzlech výpočetní sítě dostaneme následující tvar

$$\boxed{-p_{i-1/2}y_{i-1} + (p_{i+1/2} + p_{i-1/2} + h^2 q_i)y_i - p_{i+1/2}y_{i+1} = h^2 f_i}$$

Což je $i-$tá rovnice výsledné soustavy

$$A_h Y = F_h$$

- Při náhradách derivací jsme se celkově dopustili chyby $\mathcal{O}(h^2)$
- Pro $p(x),\ q(x) \in \mathcal{C}(\langle a, b\rangle)$ a $p(x) > 0,\ q(x) \geq 0$ pro libovolné $x \in \langle a, b\rangle$. Pak matice A_h je
  - ODD
  - SPD
  - třídiagonální

9.2 Příklady ze cvičení

9.2.1 Příklad

Je dána Dirichletova okrajová úloha:

$$-y'' = 4 - x^2, \quad y(-2) = 2,\ y(2) = 0$$

a) Zapište postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny.

b) Určete přesné řešení dané úlohy. Návod: Užijte integraci a určete integrační konstanty.

c) Užitím Taylorova rozvoje odvoďte náhradu $y''(x)$ pomocí hodnot funkce $y(x)$, $y(x \pm h)$.

d) Volte krok $h = 1$ a zapište síťové rovnice pro aproximaci dané úlohy. Proveďte jeden krok Gaussovy-Seidelovy iterační metody, $X^{(0)}$ volte jako pravou stranu soustavy.

Řešení:

a) Uvažujme úlohu:

$$\begin{aligned}
&-(p(x)y')' + q(x)y = f(x), \qquad \text{pro } x \in (a, b),\\
&\alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y(a) = \alpha_3,\\
&\beta_1 y'(b) + \beta_2 y(b) = \beta_3\\
&\text{kde } |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0,\ |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0
\end{aligned}$$

Nechť $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $f(x)$ jsou spojité na $\langle a, b\rangle$ a navíc $\forall x \in \langle a, b\rangle : p(x) > 0, q(x) \geq 0$. Pak existuje právě jedno řešení $y(x)$ dané okrajové úlohy (s výjimkou případu $\alpha_2 = \beta_2 = 0, q(x) \equiv 0$).

Zde $p = 1$, $q = 0$, $f = 4 - x^2$, tedy podmínky pro existenci a jednoznačnost jsou splněny.

b) Dvojitou integrací dané rovnice získáme:

$$y(x) = \frac{x^4}{12} - 2x^2 + C_1 x + C_2$$

kde konstanty C_1, C_2 získáme dosazením okrajových podmínek. Vyjde $C_1 = \frac{-1}{2}$, $C_2 = \frac{23}{3}$. Tedy máme:

$$y(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 24x^2 - 6x + 92)$$

c) Z Taylorova rozvoje máme:

$$\begin{aligned}
y(x+h) &= y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2}y''(x)h^2 + \frac{1}{6}y'''h^3 + \mathcal{O}(h^4)\\
y(x-h) &= y(x) - y'(x)h + \frac{1}{2}y''(x)h^2 - \frac{1}{6}y'''h^3 + \mathcal{O}(h^4)\\
y(x+h) + y(x-h) &= 2y(x) + y''(x)h^2 + \mathcal{O}(h^4)
\end{aligned}$$

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

d) Pro $h = 1$ dostaneme následující body sítě: $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Pro body, které nejsou okrajovými pak sestavíme síťové rovnice:

$$\begin{aligned}
-p_{-1.5}y_{-2} + (p_{-0.5} + p_{-1.5} + h^2 q_{-1})y_{-1} - p_{-0.5}y_0 &= h^2 f_{-1}\\
-p_{-0.5}y_{-1} + (p_{0.5} + p_{-0.5} + h^2 q_0)y_0 - p_{0.5}y_1 &= h^2 f_0\\
-p_{0.5}y_0 + (p_{1.5} + p_{0.5} + h^2 q_1)y_1 - p_{1.5}y_2 &= h^2 f_1
\end{aligned}$$

Po dosazení okrajových podmínek $y_{-2} = 2$, $y_2 = 0$ a funkcí $p = 1$, $q = 0$, $f = 4 - x^2$ vyjádřených v uzlových bodech. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Pro Gaussovu-Seidelovu iterační metodu pro soustavu $AY = B$ s volbou $Y^{(0)} = B = (1, 4, 3)^T$ dostaneme pro $Y^{(1)} = (y_{-1}^{(1)}, y_0^{(1)}, y_1^{(1)})^T$:

$$\begin{aligned}
y_{-1}^{(1)} &= \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - (a_{12} y_0^{(0)} + a_{13} y_1^{(0)}) \right) = \frac{1}{2} \Big[1 - \Big((-1)(4) + (0)(3) \Big) \Big] = \frac{5}{2} \\
y_0^{(1)} &= \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - (a_{21} y_{-1}^{(1)} + a_{23} y_1^{(0)}) \right) = \frac{1}{2} \Big[4 - \Big((-1)(\frac{5}{2}) + (-1)(3) \Big) \Big] = \frac{19}{4} \\
y_1^{(1)} &= \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - (a_{31} y_{-1}^{(1)} + a_{32} y_1^{(1)}) \right) = \frac{1}{2} \Big[3 - \Big((0)(\frac{5}{2}) + (-1)(\frac{19}{4}) \Big) \Big] = \frac{31}{8}
\end{aligned}$$

9.2.2 Příklad

Rovnice popisující rozložení teploty v 1D tělese ($\kappa = 0.35$)

$$-\frac{d}{dx} \left(\kappa \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad T(-2) = 10,\ T(2) = 0.$$

a) Zapište postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny.

b) Užitím Taylorova rozvoje odvoďte náhradu $y'(x)$ pomocí hodnot funkce $y(x)$, $y(x \pm h)$.

c) Zapište síťové rovnice pro krok $h = 1$. Proveďte jeden krok Jacobiovy iterační metody, $X^{(0)}$ volte jako pravou stranu soustavy.

Řešení:

a) Podmínky pro existenci a jednoznačnost jsou zřejmě splněny, viz výše.

b) Již odvozeno, viz výše.

c) Pro $h = 1$ dostaneme následující body sítě: $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Pro body, které nejsou okrajovými pak sestavíme síťové rovnice:

$$\begin{aligned}
-p_{-1.5} T_{-2} + (p_{-0.5} + p_{-1.5} + h^2 q_{-1}) T_{-1} - p_{-0.5} T_0 &= h^2 f_{-1} \\
-p_{-0.5} T_{-1} + (p_{0.5} + p_{-0.5} + h^2 q_0) T_0 - p_{0.5} T_1 &= h^2 f_0 \\
-p_{0.5} T_0 + (p_{1.5} + p_{0.5} + h^2 q_1) T_1 - p_{1.5} T_2 &= h^2 f_1
\end{aligned}$$

Po dosazení okrajových podmínek $T_{-2} = 10$, $T_2 = 0$ a funkcí $p = \kappa = 0.35$, $q = 0$, $f = 0$ vyjádřených v uzlových bodech. Dostaneme v maticovém tvaru:

$$\kappa \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{-1} \\ T_0 \\ T_1 \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pro Jacobiovu iterační metodu pro soustavu $AT = B$ s volbou $T^{(0)} = B = (10, 0, 0)^T$ dostaneme pro $T^{(1)} = (T_{-1}^{(1)}, T_0^{(1)}, T_1^{(1)})^T$:

$$\begin{aligned}
T_{-1}^{(1)} &= \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - (a_{12} T_0^{(0)} + a_{13} T_1^{(0)}) \right) = \frac{1}{2} \Big[10 - \Big((-1)(0) + (0)(0) \Big) \Big] = 5 \\
T_0^{(1)} &= \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - (a_{21} T_{-1}^{(0)} + a_{23} T_1^{(0)}) \right) = \frac{1}{2} \Big[0 - \Big((-1)(10) + (-1)(0) \Big) \Big] = 5 \\
T_1^{(1)} &= \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - (a_{31} T_{-1}^{(1)} + a_{32} T_1^{(1)}) \right) = \frac{1}{2} \Big[0 - \Big((0)(10) + (-1)(0) \Big) \Big] = 0
\end{aligned}$$

9.2.3 Příklad

Rovnice popisující rozložení teploty je zapsána ve tvaru

$$-\frac{d}{dr}\left(0.1r\frac{d\phi}{dr}\right) = 0 \quad \phi(1) = 100,\ \phi(2) = 20.$$

a) Zapište postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny.

b) Zapište síťové rovnice pro krok $h = 0.25$. Proveďte jeden krok Jacobiovy iterační metody, $X^{(0)}$ volte jako pravou stranu soustavy.

Řešení:

a) Podmínky pro existenci a jednoznačnost jsou zřejmě splněny, viz výše.

b) Podobně jako výše, i zde můžeme celou rovnici vydělit konstantou 0.1, poté dostaneme

$$-\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi}{dr}\right) = 0 \quad \phi(1) = 100,\ \phi(2) = 20.$$

Pro $r \in \{1, 1.25, 1.5, 1.75, 2\}$ máme aproximaci řešení v síťových uzlech: $\phi_1 := \phi(1) = 100$, $\phi_2 \approx \phi(1.25)$, $\phi_3 \approx \phi(1.5)$, $\phi_4 \approx \phi(1.75)$, $\phi_5 := \phi(2) = 20$. Po dosazení $q(r) = 0$, $p(r) = r$ a $f(r) = 0$ dostaneme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} -1.125\phi_1 + 2.5\phi_2 - 1.375\phi_3 &= 0 \\ -1.375\phi_2 + 3\phi_3 - 1.625\phi_4 &= 0 \\ -1.625\phi_3 + 3.5\phi_4 - 1.875\phi_5 &= 0 \end{aligned}$$

což spolu s okrajovými podmínkami $\phi_1 = 100$ a $\phi_5 = 20$ dává soustavu:

$$\begin{pmatrix} 2.5 & -1.375 & 0 \\ -1.375 & 3 & -1.625 \\ 0 & -1.625 & 3.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112.5 \\ 0 \\ 37.5 \end{pmatrix}$$

Pro Jacobiovu iterační metodu pro soustavu $A\Phi = B$ s volbou $\Phi^{(0)} = B = (112.5, 0, 37.5)^T$ dostaneme pro $\Phi^{(1)} = (\phi_2^{(1)}, \phi_3^{(1)}, \phi_4^{(1)})^T$:

$$\begin{aligned} \phi_2^{(1)} &= \frac{1}{a_{11}}\Big(b_1 - (a_{12}\phi_3^{(0)} + a_{13}\phi_4^{(0)})\Big) = \frac{1}{2.5}\Big[112.5 - \Big((-1.375)(0) + (0)(37.5)\Big)\Big] = 45 \\ \phi_3^{(1)} &= \frac{1}{a_{22}}\Big(b_2 - (a_{21}\phi_2^{(0)} + a_{23}\phi_4^{(0)})\Big) = \frac{1}{3}\Big[0 - \Big((-1.375)(112.5) + (-1.625)(37.5)\Big)\Big] = 71.875 \\ \phi_4^{(1)} &= \frac{1}{a_{33}}\Big(b_3 - (a_{31}\phi_2^{(0)} + a_{32}\phi_3^{(0)})\Big) = \frac{1}{3.5}\Big[37.5 - \Big((0)(112.5) + (-1.625)(0)\Big)\Big] = \frac{75}{7} \end{aligned}$$

10 Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

- **Klasifikace parciálních diferenciálních rovnic**
Obecný případ nelineární parciální diferenciální rovnice $N-$tého řádu můžeme napsat v následujícím tvaru:
$$F\Bigg(x_i, u, \partial_{i_1}(u), \partial^2_{i_1,i_2}(u), ..., \partial^N_{i_1,i_2,...i_N}(u)\Bigg) = 0,$$
kde $u = u(x_1, x_2, ..., x_M)$ je neznámou funkcí M proměnných a parciální derivaci N-tého řádu podle proměnných $x_{i_1}, ..., x_{i_N}$, kde $i_1, i_2, ..., i_N \in \{1, 2, ..., M\}$ značíme jako:
$$\partial^N_{i_1,i_2,...i_N}(u) := \frac{\partial^N u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_N}}$$
Obecný případ nelineární parciální diferenciální rovnice 2. řádu pro 2 nezávislé proměnné (x, y) pro neznámou funkci $u = u(x, y)$ má potom následující formu:
$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0.$$
Uvažujme nyní ještě konkrétnější tvar parciální diferenciální rovnice:
$$A\partial_{x,x}(u) + 2B\partial_{x,y}(u) + C\partial_{y,y}(u) + 2D\partial_x(u) + 2E\partial_y(u) + Fu = h(x, y) \qquad (\clubsuit)$$
kde $A, ..., F$ jsou konstanty. Získáme tzv. lineární parciální diferenciální rovnici 2.řádu s konstantními koeficienty. Označme nyní:
$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$
Pak pro říkáme, že daná rovnice ($\clubsuit$) je pro:
    - $D > 0$: **eliptického typu**
    - $D = 0$: **parabolického typu**
    - $D < 0$: **hyperbolického typu**

- **Poissonovu rovnice**
Dále se budeme zabývat případem eliptické rovnice pro 2 nezávislé proměnné (x, y):
$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y)$$
kterou nazýváme **Poissonova rovnice**. Zavedením diferenciálního operátoru
$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$
tzv. Laplaceova operátoru, můžeme psát Poissonovu rovnici v kompaktním tavru:
$$-\Delta u = f$$

- **Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici**
Hledáme funkci $u = u(x, y) : \Omega \to \mathbb{R}$ takovou, že splňuje
$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \forall (x, y) \in \Omega, \\ u &= \varphi \qquad \forall (x, y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$
Zde f a φ jsou funkce, tj. $f = f(x, y)$ a $\varphi = \varphi(x, y)$. Řešením je funkce $u \in \mathcal{C}^2$, která slpňuje danou rovnici i okrajovou podmínku.

- **Numerické řešení Dirichletova úlohy pro Poissonovu rovnici**
  - metoda sítí (konečných diferencí)
  - aproximace řešení: $U_{i,j} \approx u(P_{i,j}) = u_{i,j}$, kde $P_{i,j} = P_0 + ih\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + jh\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, kde $P_0 \in \mathbb{R}^2$ je nějaký libovolný bod.
  - náhrady parciálních derivací:

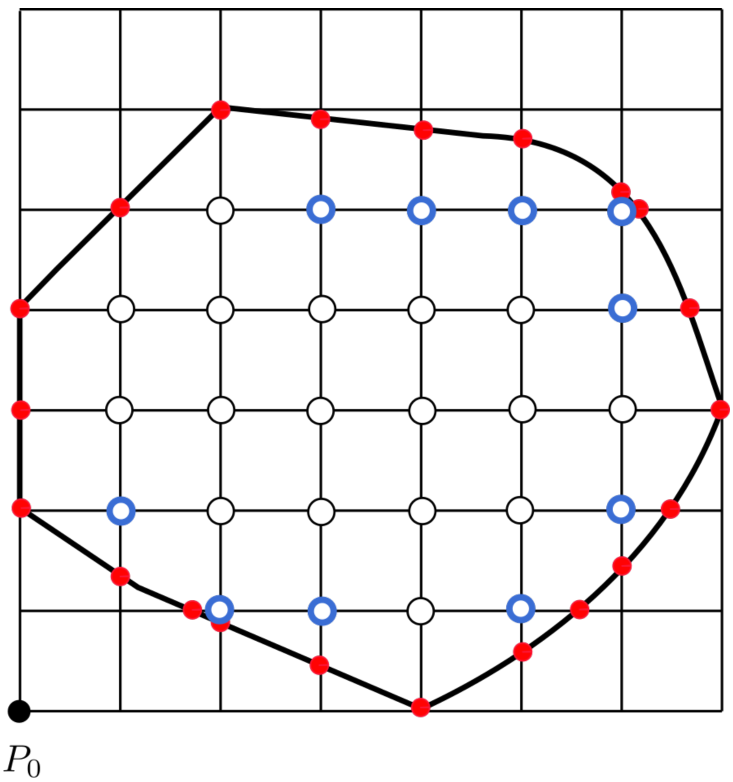
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_{i,j}) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P_{i,j}) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

  - náhrada v původní rovnici:

$$-u_{i-1,j} - u_{i+1,j} + 4u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} = h^2 f_{i,j} + \mathcal{O}(h^4)$$

  - aproximovaná rovnice v (regulárních) uzlech:

$$\boxed{-U_{i-1,j} - U_{i+1,j} + 4U_{i,j} - U_{i,j-1} - U_{i,j+1} = h^2 f_{i,j}}$$



Obrázek 1: Schéma sítě pro numerickou metodu konečných diferencí. Označení: ○ - regulární uzel, ○ - neregulární uzel, ● - hraniční uzel

- **Realizace okrajové podmínky v neregulárním uzlu sítě**
  - **Přímý přenos**: Hodnotu v neregulárním uzlu U_N nahradíme hodnotou nejbližší okrajové podmínky

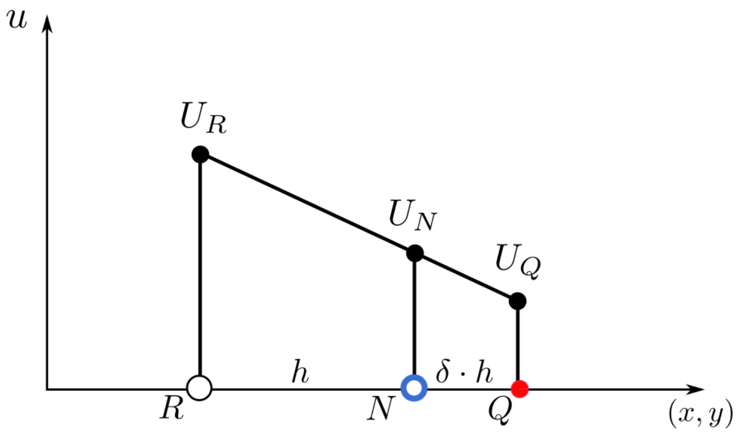
$$U_N = u(Q)$$

Tato náhrada je ovšem pouze řádu $\mathcal{O}(h)$.

· **Lineární interpolace**: Hodnotu v neregulárním uzlu U_N nahradíme pomocí lineární interpolace

$$\frac{U_N - U_Q}{\delta \cdot h} = \frac{U_R - U_Q}{h}$$

Tato náhrada je řádu $\mathcal{O}(h^2)$.



Obrázek 2: Schéma sítě pro numerickou metodu konečných diferencí. Označení: ○ - regulární uzel, ○ - neregulární uzel, ● - hraniční uzel

10.1 Příklady ze cvičení

10.1.1 Příklad

Je dána okrajová úloha:

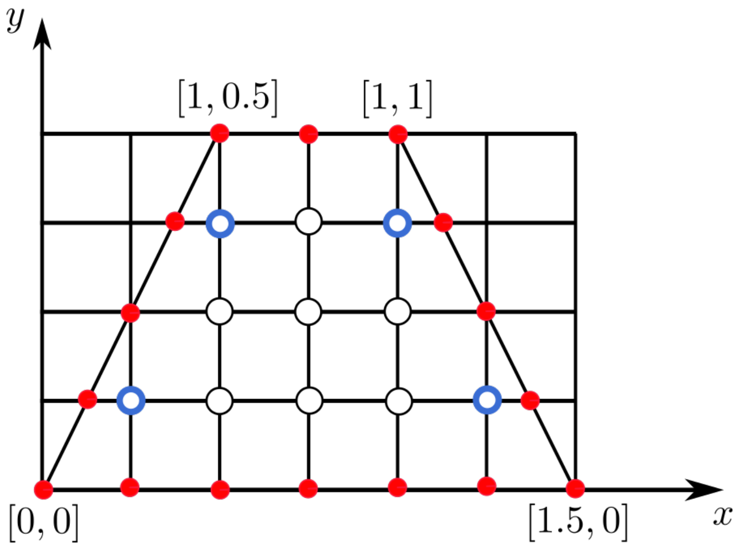
$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.5$$

v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dané jako vnitřek čtyřúhelníku $[0;0]$, $[1.5;0]$, $[1;1]$, $[0.5;1]$. Na hranici oblasti $\partial\Omega$ je daná okrajová podmínka $u(x, y) = x + y$.

a) Sestavte síťové rovnice v uzlech sítě ležících na přímce $y = 0.25$, které vzniknou při řešení úlohy metodou sítí s krokem $h = 0.25$ (v neregulárních uzlech užijte lineární interpolaci)

Řešení:

a) .



Obrázek 3: Schéma sítě pro numerickou metodu konečných diferencí. Označení: ○ - regulární uzel, ○ - neregulární uzel, ● - hraniční uzel

Síťové rovnice pro body ležící na přímce $y = 0.25$ jsou:

$$\begin{aligned}
\frac{U_{2,1} - U_{1,1}}{h} &= \frac{U_{1,1} - U_{Q1}}{\delta \cdot h} \\
-U_{1,1} - U_{3,1} + 4U_{2,1} - U_{2,0} - U_{2,2} &= h^2 f_{2,1} \\
-U_{2,1} - U_{4,1} + 4U_{3,1} - U_{3,0} - U_{3,2} &= h^2 f_{3,1} \\
-U_{3,1} - U_{5,1} + 4U_{4,1} - U_{4,0} - U_{4,2} &= h^2 f_{4,1} \\
\frac{U_{4,1} - U_{5,1}}{h} &= \frac{U_{5,1} - U_{Q2}}{\delta \cdot h}
\end{aligned}$$

kde uzel sítě je definován jako $P_{i,j} = (i \cdot h, j \cdot h) = (0.25i, 0.25j)$. Po dosazení okrajových podmínek: $U_{Q1} = u(0.125, 1) = 1.125$, $U_{2,0} = u(0.5, 0) = 0.5$, $U_{3,0} = u(0.75, 0) = 0.75$, $U_{4,0} = u(1, 0) = 1$, $U_{Q2} = u(1.25, 1) = 2.25$, $f_{i,j} = 0.5$ a vztahu $\delta \cdot h = 0.125$ dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
-U_{3,1} + \frac{11}{3}U_{2,1} - U_{2,2} &= 0.03125 + 0.5 + 0.75 = 1.28125 \\
-U_{2,1} - U_{4,1} + 4U_{3,1} - U_{3,2} &= 0.03125 + 0.75 = 0.78125 \\
-U_{3,1} + \frac{11}{3}U_{4,1} - U_{4,2} &= 0.03125 + 1 + 1.5 = 2.53125
\end{aligned}$$

10.1.2 Příklad

Je dána Dirichletova úloha $-\Delta u = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ v oblasti $\Omega = \langle 0,1\rangle^2$ s okrajovou podmínkou $u(x,y) = xy$ na hranici $\partial\Omega$

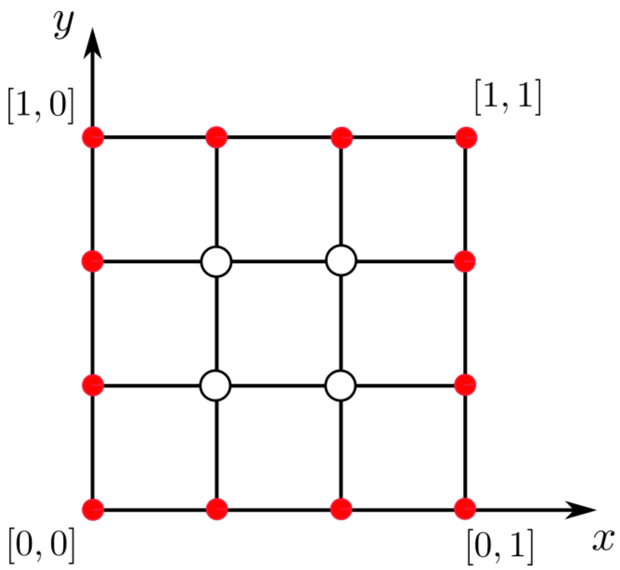
a) Načrtněte obrázek s číslováním uzlů pro $h = \dfrac{1}{3}$

b) Ověřte, zda pro $v(x,y) = \dfrac{1}{2\pi^2}\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ platí $-\Delta v = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$

c) Sestavte síťové rovnice.

Řešení:

a) .



Obrázek 4: Schéma sítě pro numerickou metodu konečných diferencí. Označení: ○ - regulární uzel, ● - hraniční uzel

b) Jelikož platí

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(f(x)g(y)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot g(y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\big(f(x)g(y)\big) = \frac{\partial g}{\partial y}\cdot f(x)$$

máme pro $v(x,y) = f(x)g(y) = \dfrac{1}{2\pi^2}\sin(\pi x)\sin(\pi y)$

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{-1}{2\pi^2}\left(\sin(\pi y)\frac{\partial^2 \sin(\pi x)}{\partial x^2} + \sin(\pi x)\frac{\partial^2 \sin(\pi y)}{\partial y^2}\right) =$$
$$\frac{-1}{2\pi^2}(-\pi^2\sin(\pi y)\sin(\pi x) - \pi^2\sin(\pi x)\sin(\pi y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

c) Síťové rovnice, kde uzel sítě je definován jako $P_{i,j} = (i\cdot h, j\cdot h) = (\frac{1}{3}i, \frac{1}{3}j)$ jsou:

$$-U_{0,1} - U_{2,1} + 4U_{1,1} - U_{1,0} - U_{1,2} = h^2 f_{1,1}$$
$$-U_{1,1} - U_{3,1} + 4U_{2,1} - U_{2,0} - U_{2,2} = h^2 f_{2,1}$$
$$-U_{0,2} - U_{2,2} + 4U_{1,2} - U_{1,1} - U_{1,3} = h^2 f_{1,2}$$
$$-U_{1,2} - U_{3,2} + 4U_{2,2} - U_{2,1} - U_{2,3} = h^2 f_{2,2}$$

Po dosazení okrajových podmínek $U_{i,j} = xy$ na $\partial\Omega$ a funkce pravé strany $f_{i,j} = \sin(\pi i \cdot h)\sin(\pi j \cdot h)$, kde $h = \frac{1}{3}$ dostaneme:

$$\begin{aligned}
0 - U_{2,1} + 4U_{1,1} - 0 - U_{1,2} &= \frac{1}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\\
-U_{1,1} - 1 \cdot \frac{1}{3} + 4U_{2,1} - 0 - U_{2,2} &= \frac{1}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\\
-0 - U_{2,2} + 4U_{1,2} - U_{1,1} - \frac{1}{3} \cdot 1 &= \frac{1}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\\
-U_{1,2} - 1 \cdot \frac{2}{3} + 4U_{2,2} - U_{2,1} - \frac{2}{3} \cdot 1 &= \frac{1}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Finální tvar je tedy

$$\begin{aligned}
-U_{2,1} + 4U_{1,1} - U_{1,2} &= \frac{1}{12}\\
-U_{1,1} + 4U_{2,1} - U_{2,2} &= \frac{5}{12}\\
-U_{2,2} + 4U_{1,2} - U_{1,1} &= \frac{5}{12}\\
-U_{1,2} + 4U_{2,2} - U_{2,1} &= \frac{17}{12}
\end{aligned}$$

11 Rovnice vedení tepla

- **Smíšená úloha pro rovnici vedení tepla**
  - parabolická diferenciální rovnice (zde v 1D)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{$\spadesuit$}$$

    Zde $u = u(x,t)$ je teplota, p je kladná konstanta, t je čas, $f(x,t)$ jsou tepelné zdroje.
  - řešíme na oblasti $Q_T = (a,b) \times (0,T)$
  - počáteční podmínka:

$$u(x,0) = \varphi(x) \text{ pro } x \in \langle a,b\rangle \tag{$\clubsuit$}$$

  - okrajové podmínky pro $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} u(a,t) &= \alpha(t) \\ u(b,t) &= \beta(t) \end{aligned} \tag{$\blacklozenge$}$$

  - Podmínky souhlasu:

$$\varphi(a) = \alpha(0), \qquad \varphi(b) = \beta(0)$$

- **Řešení smíšené úlohy pro rovnici vedení tepla**
  Funkci $u = u(x,t), u \in \mathcal{C}^2(Q_T) \cup \mathcal{C}(\bar{Q_T})$ nazveme řešením úlohy (také klasickým řešením), pokud $u(x,t)$ splňuje rovnici ($\spadesuit$) v oblasti Q_T, počáteční podmínku ($\clubsuit$) a okrajové podmínky ($\blacklozenge$).

- **Metoda sítí pro rovnici vedení tepla**
  - Aproximace hodnoty řešení v síťových uzlech

$$P_i^k = [x_i, t_k], \qquad U_i^k \approx u_i^k := u(x_i, t_k)$$

  - **Explicitní schéma**

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = p\frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + f_i^k$$

    kde τ je časový krok a h je prostorový krok. Pokud zavedeme $\sigma = \frac{p\tau}{h^2}$ a roznásobíme rovnici, dostaneme

$$\boxed{U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1-2\sigma)U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k}$$

    Lze ukázat, že jsme se při aproximaci řešení dopustioli chyby $\mathcal{O}(\tau + h^2)$.
  - Podmínka stability explicitního schématu: $\boxed{\sigma = \frac{p\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}}$.
  - **Implicitní schéma**

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = p\frac{U_{i-1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i+1}^{k+1}}{h^2} + f_i^{k+1}$$

    kde τ je časový krok a h je prostorový krok. Pokud zavedeme $\sigma = \frac{p\tau}{h^2}$ a roznásobíme rovnici, dostaneme

$$\boxed{-\sigma U_{i-1}^{k+1} + (1+2\sigma)U_i^{k+1} - \sigma U_{i+1}^{k+1} = U_i^k + \tau f_i^{k+1}}$$

    Lze ukázat, že jsme se při aproximaci řešení dopustioli chyby $\mathcal{O}(\tau + h^2)$.
  - Implicitní schéma je nepomíněně stabilní (lze volit libovolné hodnoty h a τ). Soustava rovnic se SPD a ODD maticí.

11.1 Příklady ze cvičení

11.1.1 Příklad

Je dána smíšená rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2.5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

a) Určete typ této rovnice

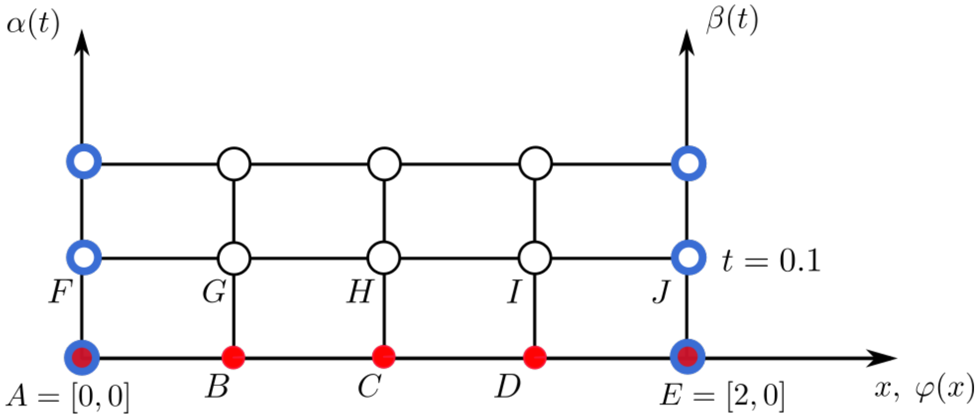
b) Při zadaných podmínkách $u(x,0) = x(2-x)$ pro $x \in \langle 0,2\rangle$ a $u(0,t) = 30t$, $u(2,t) = 0$ pro $t \geq 0$ sestavte soustavu síťových rovnic pro první časovou vrstvu pomocí implicitního schematu. Volte $h = 0.5$ a $\tau = 0.1$.

c) Rozhodněte, zda lze volit časový krok $\tau = 0.01$, resp. $\tau = 1.0$ aby pro daný prostorový krok bylo užité schema stabilní

Řešení:

a) Jedná se parabolickou diferenciální rovnici (rovnice vedení tepla, zde bez zdrojů - $f(x,t) = 0$)

b) .



Obrázek 5: Schéma sítě pro numerickou metodu konečných diferencí. Označení: ○ - regulární uzel, ● - počáteční podmínka, ○ - okrajová podmínka,

Pro aproximaci řešení U_i^{k+1} implicitním schématem platí vztah:

$$-\sigma U_{i-1}^{k+1} + (1+2\sigma)U_i^{k+1} - \sigma U_i^{k+1} = U_i^k + \tau f_i^{k+1}$$

Pro body první časové vrstvy (G, H, I) tedy máme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
-\sigma U_F + (1+2\sigma)U_G - \sigma U_H &= U_B + \tau f_B \\
-\sigma U_G + (1+2\sigma)U_H - \sigma U_I &= U_C + \tau f_C \\
-\sigma U_H + (1+2\sigma)U_I - \sigma U_J &= U_D + \tau f_D
\end{aligned}$$

Kde hodnoty U_B, U_C, U_D, resp. U_F, U_J určíme z počáteční, resp. okrajových podmínek. Pro $h = 0.25$ a $\tau = 0.1$ máme $\sigma = \frac{2.5\cdot 0.1}{0.5^2} = 0.5$. Po dosazení dostaneme:

$$\begin{aligned}
-0.5(30\cdot 0.1) + 2U_G - 0.5U_H &= 0.5\cdot(2-0.5) + 0.1\cdot 0 \\
-0.5U_G + 2U_H - 0.5U_I &= 1\cdot(2-1) + 0.1\cdot 0 \\
-0.5U_H + 2U_I - 0.5\cdot 0 &= 1.5\cdot(2-1.5) + 0.1\cdot 0
\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
2U_G - 0.5U_H &= 2.25 \\
-0.5U_G + 2U_H - 0.5U_I &= 1 \\
-0.5U_H + 2U_I &= 0.75
\end{aligned}$$

c) V případě použití implicitní metody můžeme volit τ a h libovolně. Pro zvolený krok $h = 0.5$ bychom ale měli volit $\tau \approx h^2 = 0.25$ abychom v odhadu řádu přesnosti měli zhruba stejné hodnoty $(\mathcal{O}(\tau + h^2))$.

11.1.2 Příklad

Je dána smíšená úloha $\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4$ s počáteční podmínkou $u(x,0) = \sin(\pi x) + x^2$ pro $x \in \langle 0,1\rangle$ a okrajovými podmínkami $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 1$ pro $t \geq 0$.

a) Zapište podmínky souhlasu a ověřte, zda jsou splněny. Stručně vysvětlete, co tyto podmínky znamenají a důvod, proč požadujeme, aby byly splněny.

b) Zapište jak se nahradí derivace $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě P_i^{k+1} při řešení rovnice vedení tepla explicitním schématem.

c) Volte časový krok 0.01, prostorový krok 0.25 a určete hodnotu řešení v bodě $A = [0.5, 0.01]$ metodou sítí užitím explicitního schematu.

d) Ověřte, zda funkce ve tvaru $u(x,t) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma t^2 + e^{-\omega t}\sin(\pi x)$ je řešením dané úlohy pro nějaká $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ (reálná čísla).

Řešení:

a) Podmíky souhlasu jsou

$$\varphi(a) = \alpha(0), \qquad \varphi(b) = \beta(0)$$

tedy

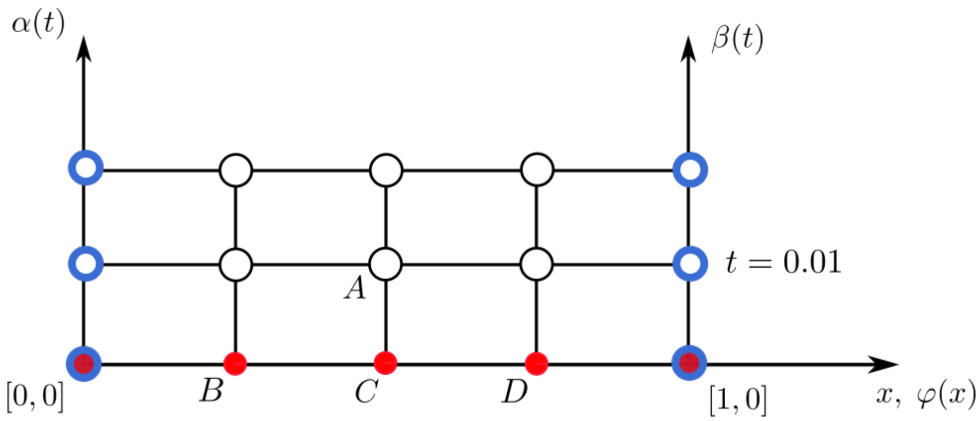
$$u(x,0)\big|_{x=0} = u(0,t)\big|_{t=0}, \qquad u(x,0)\big|_{x=1} = u(1,t)\big|_{t=0}$$
$$\sin(\pi x) + x^2\big|_{x=0} = 0\big|_{t=0} \qquad \sin(\pi x) + x^2\big|_{x=1} = 1\big|_{t=0}$$

Podmínky souhlasu jsou tedy zřejmě splněny. Splnění těchto podmínek vyžadujeme proto, aby bylo zadání úlohy tzv. korektní. Tedy, aby na hranici oblasti v počátečním čase byla všude předepsána jednoznačná hodnota řešení, tj. aby počáteční a okrajová podmínka v čase $T = 0$ nabývaly stejné hodnoty.

b) Při použití explicitního schématu provedeme u časové a prostorové derivace následující náhrady:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(P_i^{k+1}) = \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} + \mathcal{O}(\tau)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^{k+1}) = \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

c) Podmínky souhlasu jsou tedy splněny.



Obrázek 6: Schéma sítě pro numerickou metodu konečných diferencí. Označení: ○ - regulární uzel, ● - počáteční podmínka, ○ - okrajová podmínka,

Hodnota řešní v bodě U_i^{k+1} pomocí explicitního schématu je dána vztahem:

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1-2\sigma)U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k$$

Pokud nyní dosadíme $U_B = U_{i-1}^k$, $U_C = U_i^k$, $U_D = U_{i+1}^k$, $U_A = U_i^{k+1}$, $f_C = f_i^k$, $\tau = 0.01$, $h = 0.25$, $p = 2$, $\sigma = \frac{p\tau}{h^2} = 0.08$ máme:

$$U_A = 0.08(U_B + U_D) + (1 - 2\cdot 0.08)U_C + 0.01 f_C$$

$$U_A = 0.08\Big((\sin(0.25\pi)+0.25^2)+(\sin(0.75\pi)+0.75^2)\Big)(1-2\cdot 0.08)(\sin(0.5\pi)+0.5^2)+0.01\cdot(-4) = 1.1731$$

d) Máme

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma t^2 + e^{-\omega t}\sin(\pi x)\Big) = 2\gamma t - \omega e^{-\omega t}\sin(\pi x)$$

a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma t^2 + e^{-\omega t}\sin(\pi x)\Big) = 6\alpha x + 2\beta - \pi^2 e^{-\omega t}\sin(\pi x).$$

Požadujeme splnění rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4$$

tedy

$$2\gamma t - \omega e^{-\omega t}\sin(\pi x) = 2\big(6\alpha x + 2\beta - \pi^2 e^{-\omega t}\sin(\pi x)\big) - 4.$$

Tomu vyhovují hodnoty parametrů $\alpha = \gamma = 0$, $\omega = 2\pi^2$ a $\beta = 1$. Pro řešení dané úlohy tedy máme:

$$u(x,t) = x^2 + e^{-2\pi^2 t}\sin(\pi x)$$

Snadno lze ověřit, že daná funkce splňuje zadané okrajové a počáteční podmínky.

12 Vlnová rovnice

- **Smíšená úloha pro vlonovou rovnici**
  - Hyperbolická diferenciální rovnice (zde v 1D). Fyzikální interpretace: kmity struny, kde $u = u(x,t)$ má význam polohy (výchylky) v čase t a souřadnici x.
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (\spadesuit)$$
  Zde $u = u(x,t)$ je výchylka, c je kladná konstanta (rychlost šíření kmitů), t je čas, $f(x,t)$ je působící síla v bodě x a čase t.
  - řešíme na oblasti $Q_T = (a,b) \times (0,T)$
  - počáteční podmínky ($t = 0$):
  $$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \qquad \forall x \in \langle a,b \rangle \qquad (\clubsuit)$$
  - okrajové podmínky pro $t \geq 0$:
  $$\begin{aligned} u(a,t) &= \alpha(t) \\ u(b,t) &= \beta(t) \end{aligned} \qquad (\blacklozenge)$$
  - Podmínky souhlasu:
  $$\begin{aligned} \phi(a) &= \alpha(0), \qquad & \phi(b) &= \beta(0) \\ \psi(a) &= \dot{\alpha}(0), \qquad & \psi(b) &= \dot{\beta}(0) \end{aligned}$$
- **Řešení smíšené úlohy pro vlonovou rovnici**
  Funkci $u = u(x,t), u \in \mathcal{C}^2(Q_T) \cup \mathcal{C}(\bar{Q_T})$ nazveme řešením úlohy (také klasickým řešením), pokud $u(x,t)$ splňuje rovnici ($\spadesuit$) v oblasti Q_T, počáteční podmínku ($\clubsuit$) a okrajové podmínky ($\blacklozenge$).
- **Metoda sítí pro rovnici vedení tepla**
  - Aproximace hodnoty řešení v síťových uzlech
  $$P_i^k = [x_i, t_k], \qquad U_i^k \approx u_i^k := u(x_i, t_k)$$
  - **Náhrada na první časové vrstvě**:
  Užijeme Taylorova rozvoje
  $$U_i^1 \approx u(x_i, \tau) = u(x_i, 0) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0)\tau + \mathcal{O}(\tau^2)$$
  Pokud zanedbáme členy druhého řádu, dostaneme
  $$\boxed{U_i^1 = \phi(x_i) + \psi(x_i)\tau}$$
  - **Explicitní schéma**
  $$\frac{U_i^{k+1} + 2U_i^k - U_i^{k-1}}{\tau^2} = c^2 \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + f_i^k$$
  kde τ je časový krok a h je prostorový krok. Pokud zavedeme $\sigma^2 = \frac{c^2\tau^2}{h^2}$ a roznásobíme rovnici, dostaneme
  $$\boxed{U_i^{k+1} = \sigma^2 U_{i+1}^k + 2(1-\sigma^2)U_i^k + \sigma^2 U_{i-1}^k - U_i^{k-1} + \tau^2 f_i^k}$$
  Lze ukázat, že jsme se při aproximaci řešení dopustili chyby $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$.
  - Podmínka stability explicitního schématu: $\boxed{\sigma = \frac{c\tau}{h} \leq 1}$.

- **Implicitní schéma**

$$\frac{U_i^{k+1}+2U_i^k-U_i^{k-1}}{\tau^2}=\frac{c^2}{2}\frac{U_{i-1}^{k+1}-2U_i^{k+1}+U_{i+1}^{k+1}}{h^2}+\frac{c^2}{2}\frac{U_{i-1}^{k-1}-2U_i^{k-1}+U_{i+1}^{k-1}}{h^2}+f_i^k$$

kde τ je časový krok a h je prostorový krok. Pokud zavedeme $\sigma=\frac{p\tau}{h^2}$ a roznásobíme rovnici, dostaneme

$$\boxed{-\frac{1}{2}\sigma^2U_{i-1}^{k+1}+(1+\sigma^2)U_i^{k+1}-\frac{1}{2}\sigma^2U_{i+1}^{k+1}=\frac{1}{2}\sigma^2U_{i-1}^{k-1}-(1+\sigma^2)U_i^{k-1}+\frac{1}{2}\sigma^2U_{i+1}^{k-1}+2U_i^k+\tau^2f_i^{k+1}}$$

Lze ukázat, že jsme se při aproximaci řešení dopustioli chyby $\mathcal{O}(\tau+h^2)$.

- Implicitní schéma je nepomíněně stabilní (lze volit libovolné hodnoty h a τ). Soustava rovnic se SPD a ODD maticí.

12.1 Příklady ze cvičení

12.1.1 Příklad

Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt$$

s počáteční podmínkou a okrajovými podmínkami:

$$\begin{aligned} &u(x,0) = x^2 &\qquad &\tfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - x^2 &\qquad &\text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle \\ &u(-1,t) = 1 &\qquad &u(1,t) = \cos(t) &\qquad &\text{pro } t \in \langle 0, \infty) \end{aligned}$$

a) Ověřte splnění podmínek souhlasu (pro polohu a rychlost)

b) Určete maximální krok τ tak, aby byla splněna podmínka stability pro explicitní metodu s prostorovým krokem $h = 0.2$. Odvoďte schéma pro explicitní metodu.

c) Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě $A = [0.2, 0.2]$ explicitní metodou.

d) Odvoďte soustavu síťových rovnic pro určení přibližných hodnot řešení $(k+1)$-ní časové vrstvě $(k \geq 1)$ implicitní metodou.

Řešení:

a) Podmíky souhlasu jsou:

$$\begin{aligned} \phi(a) &= \alpha(0), &\qquad \phi(b) &= \beta(0) \\ \psi(a) &= \dot{\alpha}(0), &\qquad \psi(b) &= \dot{\beta}(0) \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} x^2\big|_{x=-1} &= 1\big|_{t=0}, &\qquad x^2\big|_{x=1} &= \cos(t)\big|_{t=0} \\ 1 - x^2\big|_{x=-1} &= \frac{\partial}{\partial t}(1)\big|_{t=0}, &\qquad 1 - x^2\big|_{x=1} &= \frac{\partial}{\partial t}(\cos(t))\big|_{t=0} \end{aligned}$$

Podmínky souhlasu jsou tedy zřejmě splněny. Splnění těchto podmínek vyžadujeme proto, aby bylo zadání úlohy tzv. korektní. Tedy, aby na hranici oblasti v počátečním čase byla všude předepsána jednoznačná hodnota řešení, tj. aby počáteční a okrajová podmínka v čase $t = 0$ nabývaly stejné hodnoty.

b) Pro podmínku stability máme

$$\sigma = \frac{c\tau}{h} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \tau_{max} = \frac{h}{c} = \frac{0.2}{2} = 0.1$$

Pro náhradu parciálních derivací ve vlnové rovnici použijeme centrální diference

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(P_i^k) = \frac{U_i^{k+1} + 2U_i^k - U_i^{k-1}}{\tau^2} + \mathcal{O}(\tau^2)$$

a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) = \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

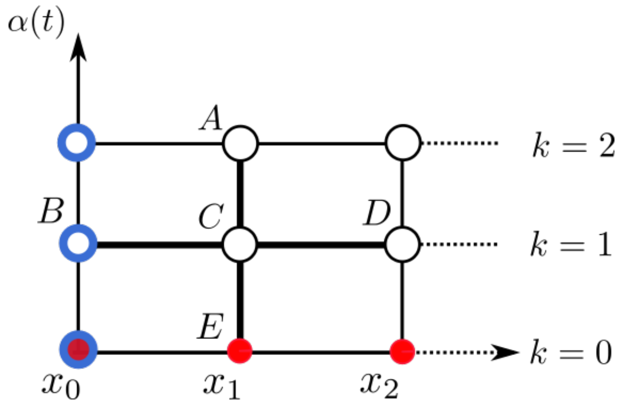
Hodnoty přesného řešení tedy splňují rovnici

$$\frac{u_i^{k+1} + 2u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau^2} = c^2\frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{h^2} + f_i^k + \mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$$

Zanedbáním členů druhého řádu dostaneme vztah pro aproximaci řešení v uzlech P_i^k pomocí explicitní metody

$$\frac{U_i^{k+1} + 2U_i^k - U_i^{k-1}}{\tau^2} = c^2\frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + f_i^k$$

c) .



Obrázek 7: Schéma sítě pro numerickou metodu konečných diferencí. Označení: ○ - regulární uzel, ● - počáteční podmínka, ○ - okrajová podmínka,

Použjeme-li vzorec pro výpočet hodnoty v uzlu A explicitní metodou, dostaneme

$$U_A = \sigma^2 U_B + 2(1-\sigma^2)U_C + \sigma^2 U_D - U_E + \tau^2 f_C$$

kde hodnotu v uzlu U_E určíme z počáteční podmínky a hodnoty U_B, U_C, U_D určíme ze vztahu (U_B můžeme také určit z okrajové podmínky)

$$U_i^1 = \phi(x_i) + \psi(x_i)\tau$$

$$\begin{aligned}
U_B &= \phi(x_0) + \psi(x_0)\tau = (-1)^2 + (1-(-1)^2)\cdot 0.1 = 1 \\
U_C &= \phi(x_1) + \psi(x_1)\tau = (-0.8)^2 + (1-(-0.8)^2)\cdot 0.1 = 0.676 \\
U_D &= \phi(x_2) + \psi(x_2)\tau = (-0.6)^2 + (1-(-0.6)^2)\cdot 0.1 = 0.424
\end{aligned}$$

Tedy celkem pro $\sigma = 1$ máme

$$U_A = 1^2 \cdot 1 + 2(1-1^2)\cdot 0.676 + 1^2 \cdot 0.424 - (-0.8)^2 + 0.1^2 \cdot ((-0.8)\cdot 0.1) = 0.7832$$

d) V případě implicitní metody využijeme pro časovou derivaci centrální diferenci (odvození z Taylorova rozvoje):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(P_i^k) = \frac{U_i^{k+1} + 2U_i^k - U_i^{k-1}}{\tau^2} + \mathcal{O}(\tau^2)$$

Pro prostorové derivace použijeme vztah (odvození z Taylorova rozvoje):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^{k+1}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^{k-1}) + \mathcal{O}(h^2)$$

Kombinací těchto vztahů dostaneme rovnici pro přesné řešení:

$$\frac{u_i^{k+1} + 2u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau^2} = \frac{c^2}{2}\frac{u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}}{h^2} + \frac{c^2}{2}\frac{u_{i-1}^{k-1} - 2u_i^{k-1} + u_{i+1}^{k-1}}{h^2} + f_i^k + \mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$$

Zanedbáním čelnů drhuhého řádu dostaneme síťové rovnice pro aproximované řešení $U_i^k \approx u(P_i^k)$:

$$\frac{U_i^{k+1} + 2U_i^k - U_i^{k-1}}{\tau^2} = \frac{c^2}{2}\frac{U_{i-1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i+1}^{k+1}}{h^2} + \frac{c^2}{2}\frac{U_{i-1}^{k-1} - 2U_i^{k-1} + U_{i+1}^{k-1}}{h^2} + f_i^k$$

12.1.2 Příklad

Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial^2 t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x$$

s počáteční podmínkou a okrajovými podmínkami:

$$\begin{array}{ccc} u(x,0) = x(x-1) & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = (1-x)^2 & \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle \\ u(0,t) = \sin(t) & u(1,t) = 0 & \text{pro } t \in \langle 0,\infty) \end{array}$$

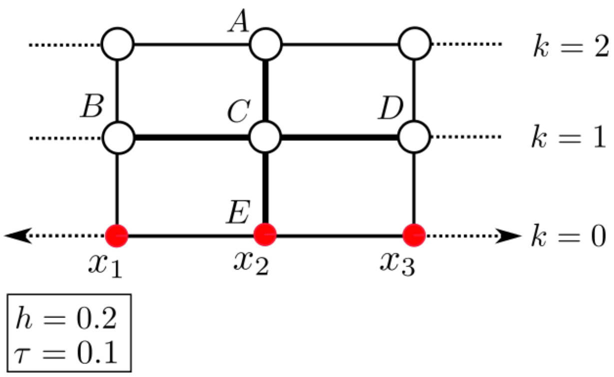
a) Pro explicitní metodu volte $h = 0.2$. Určete τ tak, aby byla splněna podmínka stability a bod $A = [0.4, 0.2]$ byl uzlem sítě. Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě A.

Řešení:

a) Pro podmínku stability máme

$$\sigma = \frac{c\tau}{h} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \tau_{max} = \frac{h}{c} = \frac{0.2}{2} = 0.1$$

Volíme tedy $\tau = 0.1$.



Obrázek 8: Schéma sítě pro numerickou metodu konečných diferencí. Označení: ○ - regulární uzel, ● - počáteční podmínka

Použjeme-li vzorec pro výpočet hodnoty v uzlu A explicitní metodou, dostaneme

$$U_A = \sigma^2 U_B + 2(1-\sigma^2)U_C + \sigma^2 U_D - U_E + \tau^2 f_C$$

kde hodnotu v uzlu U_E určíme z počáteční podmínky a hodnoty U_B, U_C, U_D určíme ze vztahu

$$U_i^1 = \phi(x_i) + \psi(x_i)\tau$$

$$\begin{aligned} U_B &= \phi(x_1) + \psi(x_1)\tau = 0.2(0.2-1) + (1-0.2)^2 \cdot 0.1 = -0.096 \\ U_C &= \phi(x_2) + \psi(x_2)\tau = 0.4(1-0.4) + (1-0.4)^2 \cdot 0.1 = 0.276 \\ U_D &= \phi(x_3) + \psi(x_3)\tau = 0.6(1-0.6) + (1-0.6)^2 \cdot 0.1 = 0.256 \\ U_E &= \phi(x_2) = 0.4(1-0.4) = 0.24 \end{aligned}$$

Tedy celkem pro $\sigma = 1$ máme

$$U_A = U_B + U_D - U_E + \tau^2 f_C = -0.096 + 0.256 - 0.24 + 0.01 \cdot 0.4 = -0.076$$