# Zadání smestrálních prácí (léto 2023)

**Pokyny**

- Semestrální práce vypracujte samostatně (ve dvojicích, pokud je tak zadáno) v psané, tištěné, či elektronické formě.
- Práce by měla obsahovat: Odpovědi na teoretické otázky, či teoretický rozbor řešeného problému (dle zadané úlohy), tedy např. stručný popis použité metody použité pro řešení problému (vzorec, ověření podmínek řešitelnosti,...). Výsledky dílčích výpočetních úloh zřetelně zvýrazněte.
- Součástí práce je přiložený kód v MATLABu, či jiném programovacím jazyce.

**Pozn.:** Zamluvené úlohy jsou vyznačeny červeně (poslední aktualizace: **22.05.2023**)

## 3.8

Je dána matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $(n = 10, 20, 50, 100, 200)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Rozhodněte, zda pro zadanou matici $\mathbf{A}$ je Jacobiova metoda konvergentní.

b) Rozhodněte, zda pro zadanou matici $\mathbf{A}$ je Gauss-Seidelova metoda konvergentní.

c) Volte $\mathbf{b} = (1, 1, ..., 1)^T$. Řešte soustavu rovnic s maticí $\mathbf{A}$ pomocí Jacobiovy metody. Výpočet realizujte v MATLABu, tak aby nebylo nutné matici $\mathbf{A}$ v programu ukládat. Spočtěte 100 iterací a určete reziduum.

d) Program z části c) upravte tak, aby řešení bylo realizováno pomocí Gauss-Seidelovy iterační metody. Srovnejte rychlost konvergence.

## 3.9

Je dána matice $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde $n = m^2$, $(m = 5, 10, 20)$ jako blokově třídiagonální matice $(\mathbf{E}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times m})$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{E} & 0 & & \dots & 0 \\ -\mathbf{E} & \mathbf{B} & -\mathbf{E} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\mathbf{E} & \mathbf{B} & -\mathbf{E} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\mathbf{E} & \mathbf{B} \end{pmatrix}, \text{ kde } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0\dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Rozhodněte, zda pro zadanou matici $\mathbf{A}$ je Jacobiova metoda konvergentní.

b) Rozhodněte, zda pro zadanou matici $\mathbf{A}$ je Gauss-Seidelova metoda konvergentní.

c) Volte $\mathbf{b} = (1, 1, ..., 1)^T$. Řešte soustavu rovnic s maticí $\mathbf{A}$ pomocí Jacobiovy metody. Výpočet realizujte v MATLABu, tak aby nebylo nutné matici $\mathbf{A}$ v programu ukládat. Spočtěte 100 iterací a určete reziduum.

d) Program z části c) upravte tak, aby řešení bylo realizováno pomocí Gauss-Seidelovy iterační metody. Srovnejte rychlost konvergence.

## 4.5

a) Vysvětlete princip metody nejmenších čtverců při aproximaci dané tabulkou hodnot polynomem nejvýše $n$-tého stupně ($n > 2$).

b) Odvoďte soustavu normálních rovnic pro tento případ

c) Sestavte soustavu normálních rovnic pro tabulku hodnot uloženou v souboru s 2 sloupci (x,y) pro minimálně 20 (rozdílných!) hodot (vlastní volby).

d) Pro $n = 1, 2, 3, 4$ příkazem `plot` zobrazte data z tabulky hodnot a zobrazte polynom nejlepší aproximace

## 4.6

Je daná tabulka hodnot $x_i,\ y_i$ (vlastní volby, min. 20 hodnot), kde $y_i > 0$. Hledáme funkci ve tvaru $y = e^{Ax} + B$, která co možná nejlépe aproximuje danou tabulku dat. Užitím přirozeného logaritmu přeformulujte tento problém jako problém aproximace polynomem 1. stupně, který řešte pomocí metody nejmenších čtverců. Zapište kvadratickou odchylku pro tento případ a odvoďte systém normálních rovnic.

## 4.7

Je daná tabulka hodnot $x_i,\ y_i$ (vlastní volby, min. 20 hodnot), kde $y_i > 0$. Hledáme funkci ve tvaru $y = Ax^B$, které co možná nejlépe aproximuje danou tabulku dat. Užitím přirozeného logaritmu přeformulujte tento problém jako problém aproximace polynomem 1. stupně, který řešte pomocí metody nejmenších čtverců. Zapište kvadratickou odchylku pro tento případ a odvoďte systém normálních rovnic.

## 6.5

Je dána Cauchyova úloha $y'' + y = xe^{-x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

a) Užijte krok $h = 1$ a spočítejte aproximaci řešení pro prvních 10 kroků pomocí explcitní Eulerovy metody

b) Užijte krok $h = 1$ a spočítejte aproximaci řešení pro prvních 10 kroků pomocí implicitní Eulerovy metody

Výpočty realizujte pomocí skriptu v MATLABu, nebo pomocí skriptu v jiném jazyce.

## 6.6

Je dána Cauchyova úloha

$$X' = \begin{pmatrix} -0.5 & 20 \\ -20 & -0.5 \end{pmatrix} X \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Užijte krok $h = 0.1$ a spočítejte aproximaci řešení $X(0.2)$ pomocí explcitní Eulerovy metody.

b) Užijte krok $h = 0.5$ a spočítejte aproximaci řešení $X(0.5)$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

c) Užijte krok $h = 0.01$ a spočítejte aproximaci řešení na $\langle 0,\ 2\rangle$ pomocí explcitní Eulerovy metody.

d) Užijte krok $h = 0.01$ a spočítejte aproximaci řešení na $\langle 0,\ 2\rangle$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

e) Užijte krok $h = 0.005$ a spočítejte aproximaci řešení na $\langle 0,\ 2\rangle$ pomocí explcitní Eulerovy metody.

f) Výsledky předcházejících bodů srovnejte navzájem i s přesným řešením

Výpočty realizujte pomocí skriptu v MATLABu, nebo pomocí skriptu v jiném jazyce.

## 7.5

Je dána Cauchyova úloha $\dot{X} = AX, \quad X(0) = u$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Ukažte, že vektor u je vlastním vektorem matice $A$. Určete příslušné vlastní číslo. Užijte vlastní vektor a vlastní číslo a určete přesné řešení dané Cauchyovy úlohy.

b) Užijte krok $h = 0.1$ a spočtěte aproximaci řešení $X^{10} \approx X(1)$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

c) Užijte krok $h = 0.05$ a spočtěte aproximaci řešení $X^{20} \approx X(1)$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

d) Užijte krok $h = 0.1$ a spočtěte aproximaci řešení $X^{10} \approx X(1)$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

e) Užijte krok $h = 0.05$ a spočtěte aproximaci řešení $X^{20} \approx X(1)$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

f) Určete odhad chyby pomocí metody polovičního kroku pro Eulerovu explicitní nebo implicitní metodu. Srovnejte se skutečnou chybou.

## 8.3

Kmity matematického kyvadla ($g = 9.81,\ l = 50$) jsou popsány rovnicí

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0 \qquad \varphi(0) = \frac{\pi}{3},\ \dot{\varphi}(0) = 0$$

a) Volte krok $h = 0.01$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou hodnotu $\varphi$ v čase $t = 0.01$.

b) Řešete numericky linearizovanou rovnici $\sin(\varphi) \approx \varphi$. Volte krok $h = 0.01$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou hodnotu $\varphi$ v čase $t = 0.01$.

c) Na základě odhadu vlastní frekvence dané rovnice rozhodněte, zda je volba kroku $h$ pro danou rovnici vhodná.

d) (MATLAB) Volte krok $h$ vhodně. Nalezněte přibližné řešení s krokem $h$ v intervalu $\langle 0, 5\rangle$. Užijte Collatzovu metodu a RK4. Výsledné hodnoty zobrazte příkazem `plot`. Srovnejte výsledky s řešením linearizované rovnice ($\sin(\varphi) \approx \varphi$).

## 8.4

Uvažujme tuhé (rovinné) těleso o hmotnosti $m = 0.2$, momentu setrvačnosti $I_\alpha = 0.001$ a statickém momentu $S_\alpha = me = 0$. Tuhosti pružin jsou dány $k_h = 0.105$, $k_\alpha = 103$. Deformace (pohyb) tělesa je popsána pomocí rotace $\alpha$ a výchylky $h$ soustavou rovnic

$$\begin{pmatrix} m & S_\alpha \\ S_\alpha & I_\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05\sin(100\pi t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} h(0) = 0.01 & \dot{h}(0) = 0 \\ \alpha(0) = 0.01 & \dot{\alpha}(0) = 0 \end{matrix}$$

a) Volte krok $\tau = 0.01$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou hodnotu natočení $\alpha$ a výchylky $h$ v čase $t = 0.01$. (Pozn. Pozor na výpočet hodnot funkce sinus, argument udáván v rad)

b) Volte krok $\tau = 0.01$, užijte Collatzovu metodu a určete přibližnou hodnotu natočení $\alpha$ a výchylky $h$ v čase $\tau = 0.01$.

c) Nalezněte přibližné řešení s krokem $\tau = 0.001$ v intervalu $\langle 0, 5\rangle$. Užijte Collatzovu metodu a RK4. Volte poloviční krok $\tau/2$ a srovnejte výsledky. Grafy řešení zobrazte.

## 8.5

Poloha hmotného bodu o hmotnosti $m$ v rovinném gravitačním poli s koeficientem odporu prostředí $k = 0.01$ je popsána systémem ODR

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \qquad m\ddot{y} = -mg - k\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \qquad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = A,\ y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 4,$$

kde $m = 0.1$, $g = 9.81$.

a) Nechť $A = 0$. Volte krok $h = 0.05$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou polohu hmotného bodu v čase $t = 0.1$.

b) Nechť $A = 0$. Volte krok $h = 0.05$, užijte Collatzovu metodu a určete přibližnou polohu hmotného bodu v čase $t = 0.05$.

c) Určete čas dopadu a rychlost dopadu pro $A = 0$. Volte vhodně krok $h$ a užijte Collatzovu metodu a RK4.

d) Volte $A = 3$. Určete čas, místo a rychlost dopadu. Nakreslete trajektorii.

## 9.5

Je dána Dirichletova okrajová úloha

$$-y'' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad y(-4) = 3,\ y(4) = 2.$$

a) Volte krok $h = 0.2$, sestavte soustavu rovnic a nalezněte přibližné řešení.

b) Volte krok $h = 0.1$, sestavte soustavu rovnic a nalezněte přibližné řešení.

c) Volte krok $h = 0.05$, sestavte soustavu rovnic a nalezněte přibližné řešení.

d) Volte krok $h = 0.005$, sestavte soustavu rovnic a nalezněte přibližné řešení.

e) Srovnejte předchozí řešení s řešením přesným. Zobrazte chybu.

## 10.6

Je dána Dirichletova úloha $-\Delta u = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ v oblasti $\Omega = \langle 0, 1\rangle^2$ s okrajovou podmínkou $u(x, y) = xy$ na hranici $\partial\Omega$

a) Volte $h = \dfrac{1}{n+1}$ pro $n = 10, 20, 40, 80, 160$.

b) Zapište síťovou rovnici v obecném vnitřním uzlu sítě $P_{i,j}$.

c) Užijte b), a řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Gaussovy-Seidelovy iterační metody.

## 11.6

Je dána smíšená úloha $\frac{\partial u}{\partial t} = 0.5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t}$ s počáteční podmínkou $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ a okrajovými podmínkami $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$ pro $t \geq 0$.

a) Volte krok $h = 0.2$ a $\tau = 0.05$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0, 1) \times (0, 1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

b) Volte krok $h = 0.2$ a $\tau = 0.025$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0, 1) \times (0, 1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

c) Volte krok $h = 0.1$ a $\tau = 0.01$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0, 1) \times (0, 1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

d) Volte krok $h = 0.05$ a $\tau = 0.01$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0, 1) \times (0, 1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

e) Pro stejné hodnoty řešte schématem implicitním.

## 12.6

Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t}$$

s počáteční podmínkou a okrajovými podmínkami:

$$\begin{array}{ccc} u(x,0) = \sin(\pi x) & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle \\ u(0,t) = 0 & u(1,t) = 0 & \text{pro } t \geq 0 \end{array}$$

a) Volte krok $h = 0.05$ a $\tau = 0.05$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0,1)\times(0,1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

b) Volte krok $h = 0.05$ a $\tau = 0.025$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0,1)\times(0,1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

c) Volte krok $h = 0.01$ a $\tau = 0.01$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0,1)\times(0,1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

d) Volte krok $h = 0.05$ a $\tau = 0.004$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0,1)\times(0,1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

e) Pro stejné hodnoty řešte schematem implicitním.