Zadání smestrálních prací (léto 2025)

Pokyny

- Semestrální práce vypracujte samostatně (ve dvojicích, pokud je tak zadáno) v psané, tištěné, či elektronické formě.
- Práce by měla obsahovat: Odpovědi na teoretické otázky, či teoretický rozbor řešeného problému (dle zadané úlohy), tedy např. stručný popis použité metody použité pro řešení problému (vzorec, ověření podmínek řešitelnosti,...). Výsledky dílčích výpočetních úloh zřetelně zvýrazněte.
- Součástí práce je přiložený kód v MATLABu, či jiném programovacím jazyce.
- Na požádání lze vypracovat i práci dle vlastního návrhu (tématicky a náročností odpovídající probírané látce).
- Úlohy označené (*) lze vypracovat ve dvojicích

Pozn.: Zamluvené úlohy jsou vyznačeny červeně (poslední aktualizace: **24.03.2025**)

3.8*

Je dána matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $(n = 10, 20, 50, 100, 200)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Rozhodněte, zda pro zadanou matici $\mathbf{A}$ je Jacobiova metoda konvergentní.

b) Rozhodněte, zda pro zadanou matici $\mathbf{A}$ je Gauss-Seidelova metoda konvergentní.

c) Volte $\mathbf{b} = (1, 1, ..., 1)^T$. Řešte soustavu rovnic s maticí $\mathbf{A}$ pomocí Jacobiovy metody. Výpočet realizujte v MATLABu, tak aby nebylo nutné matici $\mathbf{A}$ v programu ukládat. Spočtěte 100 iterací a určete reziduum.

d) Program z části c) upravte tak, aby řešení bylo realizováno pomocí Gauss-Seidelovy iterační metody. Srovnejte rychlost konvergence.

3.9*

Je dána matice $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kde $n = m^2$, $(m = 5, 10, 20)$ jako blokově třídiagonální matice ($\mathbf{E}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{E} & 0 & & \dots & 0 \\ -\mathbf{E} & \mathbf{B} & -\mathbf{E} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\mathbf{E} & \mathbf{B} & -\mathbf{E} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\mathbf{E} & \mathbf{B} \end{pmatrix}, \text{ kde } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0\dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Rozhodněte, zda pro zadanou matici $\mathbf{A}$ je Jacobiova metoda konvergentní.

b) Rozhodněte, zda pro zadanou matici $\mathbf{A}$ je Gauss-Seidelova metoda konvergentní.

c) Volte $\mathbf{b} = (1, 1, ..., 1)^T$. Řešte soustavu rovnic s maticí $\mathbf{A}$ pomocí Jacobiovy metody. Výpočet realizujte v MATLABu, tak aby nebylo nutné matici $\mathbf{A}$ v programu ukládat. Spočtěte 100 iterací a určete reziduum.

d) Program z části c) upravte tak, aby řešení bylo realizováno pomocí Gauss-Seidelovy iterační metody. Srovnejte rychlost konvergence.

4.5

a) Vysvětlete princip metody nejmenších čtverců při aproximaci dané tabulkou hodnot polynomem nejvýše n-tého stupně ($n > 2$).

b) Odvoďte soustavu normálních rovnic pro tento případ

c) Sestavte soustavu normálních rovnic pro tabulku hodnot uloženou v souboru s 2 sloupci (x,y) pro minimálně 20 (rozdílných!) hodot (vlastní volby).

d) Pro $n = 1, 2, 3, 4$ příkazem `plot` zobrazte data z tabulky hodnot a zobrazte polynom nejlepší aproximace

4.6

Je daná tabulka hodnot $x_i,\ y_i$ (vlastní volby, min. 20 hodnot), kde $y_i > 0$. Hledáme funkci ve tvaru $y = e^{Ax+B}$, která co možná nejlépe aproximuje danou tabulku dat. Užitím přirozeného logaritmu přeformulujte tento problém jako problém aproximace polynomem 1. stupně, který řešte pomocí metody nejmenších čtverců. Zapište kvadratickou odchylku pro tento případ a odvoďte systém normálních rovnic.

4.7

Je daná tabulka hodnot $x_i,\ y_i$ (vlastní volby, min. 20 hodnot), kde $y_i > 0$. Hledáme funkci ve tvaru $y = Ax^B$, které co možná nejlépe aproximuje danou tabulku dat. Užitím přirozeného logaritmu přeformulujte tento problém jako problém aproximace polynomem 1. stupně, který řešte pomocí metody nejmenších čtverců. Zapište kvadratickou odchylku pro tento případ a odvoďte systém normálních rovnic.

6.5

Je dána Cauchyova úloha $y'' + y = xe^{-x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

a) Užijte krok $h = 1$ a spočítejte aproximaci řešení pro prvních 10 kroků pomocí explcitní Eulerovy metody

b) Užijte krok $h = 1$ a spočítejte aproximaci řešení pro prvních 10 kroků pomocí implicitní Eulerovy metody

Výpočty realizujte pomocí skriptu v MATLABu, nebo pomocí skriptu v jiném jazyce.

6.6

Je dána Cauchyova úloha

$$X' = \begin{pmatrix} -0.5 & 20 \\ -20 & -0.5 \end{pmatrix} X \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Užijte krok $h = 0.1$ a spočítejte aproximaci řešení $X(0.2)$ pomocí explcitní Eulerovy metody.

b) Užijte krok $h = 0.5$ a spočítejte aproximaci řešení $X(0.5)$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

c) Užijte krok $h = 0.01$ a spočítejte aproximaci řešení na $\langle 0,\ 2\rangle$ pomocí explcitní Eulerovy metody.

d) Užijte krok $h = 0.01$ a spočítejte aproximaci řešení na $\langle 0,\ 2\rangle$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

e) Užijte krok $h = 0.005$ a spočítejte aproximaci řešení na $\langle 0,\ 2\rangle$ pomocí explcitní Eulerovy metody.

f) Výsledky předcházejících bodů srovnejte navzájem i s přesným řešením

Výpočty realizujte pomocí skriptu v MATLABu, nebo pomocí skriptu v jiném jazyce.

7.5

Je dána Cauchyova úloha $\dot{X} = AX, \quad X(0) = u$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Ukažte, že vektor u je vlastním vektorem matice A. Určete příslušné vlastní číslo. Užijte vlastní vektor a vlastní číslo a určete přesné řešení dané Cauchyovy úlohy.

b) Užijte krok $h = 0.1$ a spočtěte aproximaci řešení $X^{10} \approx X(1)$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

c) Užijte krok $h = 0.05$ a spočtěte aproximaci řešení $X^{20} \approx X(1)$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

d) Užijte krok $h = 0.1$ a spočtěte aproximaci řešení $X^{10} \approx X(1)$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

e) Užijte krok $h = 0.05$ a spočtěte aproximaci řešení $X^{20} \approx X(1)$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

f) Určete odhad chyby pomocí metody polovičního kroku pro Eulerovu explicitní nebo implicitní metodu. Srovnejte se skutečnou chybou.

8.3*

Kmity matematického kyvadla ($g = 9.81,\ l = 50$) jsou popsány rovnicí

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0 \qquad \varphi(0) = \frac{\pi}{3},\ \dot{\varphi}(0) = 0$$

a) Volte krok $h = 0.01$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou hodnotu φ v čase $t = 0.01$.

b) Řešete numericky linearizovanou rovnici $\sin(\varphi) \approx \varphi$. Volte krok $h = 0.01$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou hodnotu φ v čase $t = 0.01$.

c) Na základě odhadu vlastní frekvence dané rovnice rozhodněte, zda je volba kroku h pro danou rovnici vhodná.

d) (MATLAB) Volte krok h vhodně. Nalezněte přibližné řešení s krokem h v intervalu $\langle 0, 5\rangle$. Užijte Collatzovu metodu a RK4. Výsledné hodnoty zobrazte příkazem `plot`. Srovnejte výsledky s řešením linearizované rovnice ($\sin(\varphi) \approx \varphi$).

8.4*

Uvažujme tuhé (rovinné) těleso o hmotnosti $m = 0.2$, momentu setrvačnosti $I_\alpha = 0.001$ a statickém momentu $S_\alpha = me = 0$. Tuhosti pružin jsou dány $k_h = 0.105$, $k_\alpha = 103$. Deformace (pohyb) tělesa je popsána pomocí rotace α a výchylky h soustavou rovnic

$$\begin{pmatrix} m & S_\alpha \\ S_\alpha & I_\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05\sin(100\pi t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} h(0) = 0.01 & \dot{h}(0) = 0 \\ \alpha(0) = 0.01 & \dot{\alpha}(0) = 0 \end{matrix}$$

a) Volte krok $\tau = 0.01$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou hodnotu natočení α a výchylky h v čase $t = 0.01$. (Pozn. Pozor na výpočet hodnot funkce sinus, argument udáván v rad)

b) Volte krok $\tau = 0.01$, užijte Collatzovu metodu a určete přibližnou hodnotu natočení α a výchylky h v čase $\tau = 0.01$.

c) Nalezněte přibližné řešení s krokem $\tau = 0.001$ v intervalu $\langle 0, 5\rangle$. Užijte Collatzovu metodu a RK4. Volte poloviční krok $\tau/2$ a srovnejte výsledky. Grafy řešení zobrazte.

8.5*

Poloha hmotného bodu o hmotnosti m v rovinném gravitačním poli s koeficientem odporu prostředí $k = 0.01$ je popsána systémem ODR

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \qquad m\ddot{y} = -mg - k\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \qquad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = A,\ y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 4,$$

kde $m = 0.1$, $g = 9.81$.

a) Nechť $A = 0$. Volte krok $h = 0.05$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou polohu hmotného bodu v čase $t = 0.1$.

b) Nechť $A = 0$. Volte krok $h = 0.05$, užijte Collatzovu metodu a určete přibližnou polohu hmotného bodu v čase $t = 0.05$.

c) Určete čas dopadu a rychlost dopadu pro $A = 0$. Volte vhodně krok h a užijte Collatzovu metodu a RK4.

d) Volte $A = 3$. Určete čas, místo a rychlost dopadu. Nakreslete trajektorii.

9.5

Je dána Dirichletova okrajová úloha

$$-y'' = \frac{1}{1+x^2}, \quad y(-4) = 3,\ y(4) = 2.$$

a) Volte krok $h = 0.2$, sestavte soustavu rovnic a nalezněte přibližné řešení.

b) Volte krok $h = 0.1$, sestavte soustavu rovnic a nalezněte přibližné řešení.

c) Volte krok $h = 0.05$, sestavte soustavu rovnic a nalezněte přibližné řešení.

d) Volte krok $h = 0.005$, sestavte soustavu rovnic a nalezněte přibližné řešení.

e) Srovnejte předchozí řešení s řešením přesným. Zobrazte chybu.

10.6*

Je dána Dirichletova úloha $-\Delta u = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ v oblasti $\Omega = \langle 0, 1\rangle^2$ s okrajovou podmínkou $u(x, y) = xy$ na hranici $\partial\Omega$

a) Volte $h = \dfrac{1}{n+1}$ pro $n = 10, 20, 40, 80, 160$.

b) Zapište síťovou rovnici v obecném vnitřním uzlu sítě $P_{i,j}$.

c) Užijte b), a řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Gaussovy-Seidelovy iterační metody.

11.6*

Je dána smíšená úloha $\frac{\partial u}{\partial t} = 0.5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t}$ s počáteční podmínkou $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ a okrajovými podmínkami $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$ pro $t \geq 0$.

a) Volte krok $h = 0.2$ a $\tau = 0.05$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0, 1) \times (0, 1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

b) Volte krok $h = 0.2$ a $\tau = 0.025$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0, 1) \times (0, 1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

c) Volte krok $h = 0.1$ a $\tau = 0.01$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0, 1) \times (0, 1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

d) Volte krok $h = 0.05$ a $\tau = 0.01$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0, 1) \times (0, 1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

e) Pro stejné hodnoty řešte schématem implicitním.

12.6*

Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t}$$

s počáteční podmínkou a okrajovými podmínkami:

$$\begin{array}{lll} u(x,0) = \sin(\pi x) & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle \\ u(0,t) = 0 & u(1,t) = 0 & \text{pro } t \geq 0 \end{array}$$

a) Volte krok $h = 0.05$ a $\tau = 0.05$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0,1)\times(0,1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

b) Volte krok $h = 0.05$ a $\tau = 0.025$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0,1) \times (0,1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

c) Volte krok $h = 0.01$ a $\tau = 0.01$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0,1)\times(0,1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

d) Volte krok $h = 0.05$ a $\tau = 0.004$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0,1) \times (0,1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

e) Pro stejné hodnoty řešte schematem implicitním.

13*

Je dána smíšená úloha, tzv. Cahn-Hilliard model difúze:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = M\Delta\mu, \qquad \mu = \frac{1}{\epsilon^2}(\varphi^3 - \varphi) - \Delta\varphi \tag{I}$$

resp.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = M\Big[\frac{1}{\epsilon^2}\Big(\Delta(\varphi^3) - \Delta(\varphi)\Big) - \Delta^2(\varphi)\Big] \tag{II}$$

kde $\varphi = \varphi(t,x,y)$, $\mu = \mu(t,x,y)$, $[t,x,y] \in \langle 0,\infty) \times [0,1]^2$, ϵ =konst., M =konst.

a) Napište stručný úvod o modelu Cahn-Hilliard (využití v praxi,...)

b) Volte počet uzlů výpočetní sítě v oblasti $\Omega = [0,1]^2$ jako $N_x = N_y = N = 100$ a krok $h = 1/N$. Zvolte časový krok jako (úměrný) $\tau \approx h^4$, parametr mobility $M = 0.01$ a parametr tloušky fázového rozhraní $\epsilon \approx h$.

c) Vytvořte v MATLABu funkci, která dostane pole uzlových hodnot $\varphi_{i,j}$, nebo $\mu_{i,j}$, pozici uzlu (i,j) a prostorový krok h a vratí Laplaceův operátor daného pole v daném uzlu ($\Delta_{h,i,j}$).

d) Vytvořte v MATLABu funkci, která pro dané pole (φ,μ) předepíše homogenní Neumannovy okrajové podmínky. Tuto funkci poté využijte na předepsání okrajových podmínek. Pro realizaci okrajových podmínek využijte metodu tzv. ghost points.

e) Volte počáteční podmínku jako pole náhodných hodnot: $\varphi(0,x,y) \in [-1,1], \forall[x,y]$, $\mu(0,x.y) = \mu(\varphi(0,x,y))$. Řešte daný systém implicitní metodou v intervalu $t = [0,20]$ pomocí Gauss-Seidelovy iterační metody.

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n}}{\tau} &= \frac{\mu_{i-1,j}^{n+1} + \mu_{i+1,j}^{n+1} + \mu_{i,j-1}^{n+1} + \mu_{i,j+1}^{n+1} - 4\mu_{i,j}^{n+1}}{h^2} \\ \mu_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{\epsilon^2}\Big(\big[\varphi_{i,j}^{n+1}\big]^3 - \varphi_{i,j}^{n+1}\Big) - \frac{\varphi_{i-1,j}^{n+1} + \varphi_{i+1,j}^{n+1} + \varphi_{i,j-1}^{n+1} + \varphi_{i,j+1}^{n+1} - 4\varphi_{i,j}^{n+1}}{h^2} \end{aligned}$$

f) Průběžné výsledky zobrazte jako animaci (např. každých 5 časových iterací) pole φ.

14*

Problém N těles zahrnuje výpočet pohybu N těles, která na sebe vzájemně působí gravitačními silami. Síla působící na dané těleso i způsobená jiným tělesem j je dána Newtonovým gravitačním zákonem:

$$\mathbf{F}_{ij} = G\frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$$

kde:

- $\mathbf{F}_{ij}$ je síla působící na těleso i tělesem j,
- G je gravitační konstanta,
- m_i a m_j jsou hmotnosti těles i a j,
- $\mathbf{r}_i$ a $\mathbf{r}_j$ jsou polohové vektory těles i a j.

Celková síla $\mathbf{F}_i$ na těleso i způsobená všemi ostatními tělesy je vektorovým součtem jednotlivých sil kterými působí ostatní tělesa:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \mathbf{F}_{ij}$$

Zrychlení $\mathbf{a}_i$ tělesa i lze pak vyjádřit jako:

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} G\frac{m_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$$

a) Zformulujte problém pohybu N-těles **v rovině** jako Cauchyovu úlohu pro soustavu ODR prvního řádu (včetně počátečních podmínek).

b) Zvolte počet těles, např. $N = 5$. Zvolte vhodné počáteční podmínky, např. náhodné polohy těles v oblasti $\Omega = [0,1]^2$ a nulové počáteční rychlosti. Zvolte vhodně hmotnosti těles m_i a gravitační konstantu G. Problém můžete také řešit ve 3D a počáteční podmínky zvolit, tak aby problém řešil pohyb planet ve sluneční soustavě, např. https://www.aanda.org/articles/aa/full/2002/08/aa1405/aa1405.right.html

c) Řešte danou soustavu rovnic pomocí explicitní Eulerovy metody a metody RK4 s vhodně zvoleným časovým krokem. V průběhu řešení zobrazujte polohy těles jako animaci.

d) Řešte danou soustavu rovnic pomocí tzv. Eulerovy-Cromerovy metody:

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n + dt\ \mathbf{a}_i^n$$

$$\mathbf{r}_i^{n+1} = \mathbf{r}_i^n + dt\ \mathbf{v}_i^{n+1}$$

e) Celková energie N-těles je dána součtem kinetické a potenciální energie:

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} -G\frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

V každém časovém kroku vytiskněte hodnotu celkové energie E_{tot} soustavy. Je celková energie zachována? Existují num. metody, které energii zachovají?