

Matematika 1
Vstupní test
Příklady z Moodle

Lukáš Hájek

ČVUT v Praze, FS – ÚTM

2. října 2020



Příklad 1

V množině reálných čísel řešte nerovnici $|x^2 + 4x| - 6 \leq 3x$.

Řešení запиšte ve tvaru intervalu I (vyberte správné závorky).

a) $-3x - 6 \leq x^2 + 4x \leq 3x + 6$

b) $0 \leq x^2 + 7x + 6; x^2 + x - 6 \leq 0$

c) $0 \leq (x + 1)(x + 6); (x - 2)(x + 3) \leq 0$

d) $I = I_1 \cap I_2; I_1 = (-\infty; -6) \cup (-1; \infty),$
 $I_2 = \langle -3; 2 \rangle$

Výsledek $I = \langle -1; 2 \rangle$

Příklad 2

Do pravidelného čtyřbokého hranolu je vepsán válec. Určete poměr jejich objemů (hranol ku válci, $V_H : V_V$). Tento poměr zadejte v základním tvaru.

$$\text{a) } V_H = a^2 v = (2r)^2 v, \quad V_V = \pi r^2 v$$

$$\text{b) } \frac{V_H}{V_V} = \frac{4r^2 v}{\pi r^2 v} = \frac{4 \cancel{r^2} v}{\pi \cancel{r^2} v} = \frac{4}{\pi}$$

Výsledek $V_H : V_V = 4 : \pi$

Příklad 3

V množině reálných čísel řešte rovnici

$\sqrt{10-x} + \sqrt{x-10} - 2 = 0$ Zapište kořeny rovnice x_1, x_2 .

a) $D_{\sqrt{10-x}} \cap D_{\sqrt{x-10}} = \{10\}$

b) $\sqrt{10-10} + \sqrt{10-10} - 2 = 0$

c) $0 + 0 - 2 \neq 0$

Výsledek Nemá řešení.

Příklad 4

V množině reálných čísel určete všechna řešení rovnice $\ln(2x^2 - 25x + 73) = 0$.

a) $\ln(x) = \log_e(x) = y \Leftrightarrow e^y = x$

b) $e^0 = 1$

c) $2x^2 - 25x + 73 = 1$

d) $2x^2 - 25x + 72 = 0$

e) $2\left(x - \frac{9}{2}\right)(x - 8) = 0$

Výsledek $x_1 = 4.5$, $x_2 = 8$

Příklad 5

Určete $x_1, x_2 \in (0; 2\pi)$ v radiánech, např. v násobcích π , které vyhovují rovnici $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Výsledek $x_1 = \frac{4}{3}\pi, x_2 = \frac{5}{3}\pi$

Příklad 6

Určete výraz V , jestliže

$$\log_5 V = 2 \log_5(5x + 3) + \log_5(6 - 4x) - \log_5(x + 9).$$

a) $m \ln(x) = \ln(x^m)$

b) $\ln(x^m) + \ln(y^n) = \ln(x^m y^n)$

c) a), b) $\Rightarrow \ln(x) - \ln(y) = \ln(x) + \ln(y^{-1}) = \ln \frac{x}{y}$

d) $\log_5 V = \log_5 \frac{(5x+3)^2(6-4x)}{(x+9)}$

Výsledek $V = \frac{(5x+3)^2(6-4x)}{x+9}$

Příklad 7

Určete definiční obor funkce $f(x)$ proměnné $x \in \mathbb{R}$:

$f(x) = \ln((x + 3)(9 - x))$. Řešení zapište ve tvaru intervalu I (vyberte správné závorky).

a) $D_{\ln x} = (0, \infty)$

b) $(x + 3)(9 - x) > 0$

Výsledek $I = (-3; 9)$

Příklad 8

Zjednodušte výraz

$$V = \frac{a^3 - 8}{\frac{a^2+4}{a+2} + \frac{2a}{a+2}} : \frac{a^3 + 8}{(a-2)^2 + 2a}$$

a) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

b) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

c) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

d) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

e) $V = \frac{(a-2)(a^2+2a+4)}{\frac{a^2+2a+4}{a+2}} : \frac{(a+2)(a^2-2a+4)}{a^2-4a+4+2a}$

Příklad 8 – pokračování

Zjednodušte výraz

$$V = \frac{a^3 - 8}{\frac{a^2+4}{a+2} + \frac{2a}{a+2}} : \frac{a^3 + 8}{(a-2)^2 + 2a}$$

$$e) V = \frac{(a-2)\cancel{(a^2+2a+4)}}{\frac{\cancel{a^2+2a+4}}{a+2}} : \frac{(a+2)\cancel{(a^2-2a+4)}}{\cancel{a^2-4a+4+2a}}$$

$$f) V = \frac{(a-2)}{\frac{1}{a+2}} : \frac{(a+2)}{1}$$

$$g) V = \frac{(a-2)(a+2)}{1} \cdot \frac{1}{(a+2)} = \frac{(a-2)\cancel{(a+2)}}{\cancel{(a+2)}}$$

Výsledek $V = a - 2$

Příklad 9

Ve tvaru $a + bi$ zapište komplexní číslo

$$z = (4 + 3i)(4 - 3i) - (5 - 3i).$$

a) $\sqrt{-1} = i \Rightarrow i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

b) $i = \underline{i}$, $i^2 = \underline{-1}$, $i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = \underline{-i}$

c) $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = \underline{1}$, $i^5 = i^4 i = \underline{i}$

d) $i^6 = i^4 i^2 = i^2 = \underline{-1}$, $i^{4+n} = \underline{i^n}$

e) $z = 16 - 9i^2 - 5 + 3i$

e) $z = 16 + 9 - 5 + 3i = (25 - 5) + 3i$

Výsledek $z = 20 + 3i$

Příklad 10

Určete všechna reálná čísla x, y tak, aby byla řešením soustavy rovnic

$$3(x - 2) + 2y = x + y,$$

$$4x + 5(y + x) = 3x - 6.$$

- a) $3x - 6 + 2y - x - y = 0 \Rightarrow 2x + y = 6$
- b) $4x + 5y + 5x - 3x + 6 = 0 \Rightarrow 6x + 5y = -6$
- c) od b) odečtu 3 a), tj. $6x + 3y = 18$
- d) dostanu $0x + 2y = -24$
- e) tedy $y = -12$, což dosadím do a) či b)
- a) $2x - 12 = 6 \Rightarrow 2x = 18 \Rightarrow x = 9$

Výsledek $x = 9, y = -12$