Matematika 1
Vektory

Lukáš Hájek

ČVUT v Praze, FS – ÚTM

15. října 2020

Vektory – pojmy

Tento týden jsme se zaměřili a zaměříme na tyto pojmy související s vektory (pozn.: uvedené zkratky jsou **pouze pro cvičení** – v písemkách by bylo dobré použít *celý název*):

- soustavy rovnic ze SŠ, zadání přímek (obecná rovnice; parametrické zadání; vektor zaměření a posunutí),
- vektorové prostory,
- lineární kombinace (LK), triviální LK,
- lineární závislost a nezávislost (LZ, LN),
- báze vektorového prostoru,
- vektorové podprostory,
- dimenze vektorového prostoru,
- skalární součin a úhel mezi vektory.

Zadání přímek (1/2)

- Rovnice a obecná rovnice přímky (platí pro prostory o dimenzi 2 – vysvětlení příště):
  p: $3(x-2)+2y=x+y=0$.
- Po úpravě máme: $2x+y=6$, kde nenulové číslo na pravé straně (tj. 6) vyjadřuje posunutí přímky od počátku, kterým tedy přímka neprochází.

Zadání přímek (2/2)

- Parametrické zadání ($t \in \mathbb{R}$):

$$x = 3 + t,$$
$$y = 0 - 2t.$$

- Vektor $(x, y)^T$ ukazující na bod z přímky p lze zapsat pomocí vektoru posunutí ($\vec{v}$ – může být libovolný bod z přímky) a zaměření ($\vec{s}$ – můžeme volit také libovolný nenulový násobek tohoto vektoru):

$$(x, y)^T = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{v} + t\vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- V obou (velmi podobných) případech je přímkou množina dle uvedeného předpisu pro všechna možná t).

Lineární kombinace, vektorové (pod)prostory

- Lineární kombinace (LK) – právě jsme si ukázali LK vektoru $\vec{s}$, tj. $t\vec{s}$, zbytek na přednášce (vektor většinou není jen jeden!); nulovou LK nazýváme **triviální**.
- Vektorové podprostory jsou zároveň i vektorové prostory – platí uzavřenost vůči sčítání

  $$\vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V$$

  i násobení

  $$\vec{u} \in V, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\vec{u} \in V$$

- Množina všech LK vektorů tvoří vektorový podprostor.
- Spec. případ: množina všech LK jednoho nenulového vektoru určuje **přímku procházející počátkem** a tvoří *vektorový podprostor* – neplatí pro přímky neprocházející počátkem!

Lineární závislost (LZ) a lineární nezávislost (LN)

- Soubor vektorů LN $\Leftrightarrow$ pouze triviální LK dává nulový vektor.
- V opačném případě je soubor LZ (a existuje nek. mnoho netriviálních LK dávajících nulový vektor).
- Lze-li nakombinovat jeden vektor ze souboru pomocí ostatních, pak je soubor LZ.
- n LN vektorů z $V(\mathbb{E}_n)$ tvoří bázi tohoto prostoru.
- Množina všech LK bazických vektorů $V(\mathbb{E}_n)$ je $V(\mathbb{E}_n)$, tj. každá báze vektoroveho prostoru generuje tento prostor.
- Příklad: mějme vektory $\vec{s} = (1; -2)^T, \vec{u} = (-3; 6)^T, \vec{v} = (-5; 6)^T$; jsou skupiny vektorů $\vec{s}, \vec{u}$ a $\vec{s}, \vec{v}$ LN?

LZ a LN – 2. část

- Začněme otázkou LN vektorů $\vec{s} = (1; -2)^T, \vec{u} = (-3; 6)^T$
- $\alpha\vec{s} + \beta\vec{u} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \alpha - 3\beta &= 0, \\ -2\alpha + 6\beta &= 0. \end{aligned}$$

- Získáváme $0 = 0$ (tj. ex. nekonečně mnoho řešení, tedy LK – nikoli pouze triviální; tvar řešení $\alpha = 3\beta$, např. $\alpha = 3, \beta = 1$).
- Soubor vektorů $\vec{s}, \vec{u}$ je LZ (a netvoří tedy bázi $V(\mathbb{E}_2)$).

LZ a LN – 3. část

- Začněme otázkou LN vektorů $\vec{s} = (1; -2)^T, \vec{v} = (-5; 6)^T$
- $\alpha\vec{s} + \beta\vec{u} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \alpha - 5\beta &= 0, \\ -2\alpha + 6\beta &= 0. \end{aligned}$$

- Získáváme $\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ (tj. pouze triviální LK dává $\vec{0}$).
- Soubor vektorů $\vec{s}, \vec{v}$ je LN (a tvoří tedy bázi $V(\mathbb{E}_2)$ a množina všech LK tohoto souboru tvoří tento prostor).

LZ a LN – 4. část

- Jak to bude s LN všech tří vektorů (tj. $\vec{s}, \vec{u}, \vec{v}$)?
- Budou LZ! Proto netvoří ani bázi, ovšem množina všech LK tohoto souboru tvoří $V(\mathbb{E}_2)$.

- Přidáním vektoru k LZ souboru se LZ nezmění.
- Odebráním vektoru z LZ souboru můžeme (ale nemusíme!) dostat LN soubor.

- Přidáním vektoru k LN souboru můžeme (ale nemusíme!) dostat LZ soubor.
- Odebráním vektoru z LN souboru LN zůstává.

Skalární součin (s.s.) a norma

- Mějme vektory $\vec{s} = (s_1; s_2) = (1; -2)^T, \vec{v} = (v_1; v_2) = (-5; 6)^T$.
- Jejich s.s. $k \in \mathbb{R}$ pak je $k = \vec{s} \cdot \vec{v} = s_1 v_1 + s_2 v_2 = 1 \cdot (-5) + (-2) \cdot 6 = -5 - 12 = -17$.
- Norma vektoru $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.
- Máme $\|\vec{s}\| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$.
- Obdobně pro vektory o více složkách.

Úhel mezi vektory

- Úhel mezi vektory ϑ získáme ze vztahu:

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{s} \cdot \vec{v}}{\|\vec{s}\| \, \|\vec{v}\|}.$$

- Z toho plyne, že pokud je s.s. nulový, pak svírají vektory pravý úhel.
- V našem případě
  $\cos\vartheta = -17/\sqrt{5 \cdot 61} = -17/\sqrt{305} \approx -0,9734$,
  $\vartheta \approx \arccos(-0,9734) \approx 2,9104 \approx 166,8^\circ$.

Úhel mezi vektory – příklad 8.

- $\vec{u} = (-3, 2, 3)^T, \vec{v} = (1, 6, -3)^T$
- Jsou $\vec{u}$ a $\vec{v}$ kolmé ($\vartheta = 0$)?

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-3) = -3 + 12 - 9 = 0$$

- Ano, $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou kolmé!
- $\vartheta = 90^\circ$, jelikož $\cos \vartheta = 0$.

Úhel mezi vektory – příklad 16.

- $\vec{u} = (4, 4, 2, 0)^T, \vec{v} = (3, 0, 0, -1)^T$
- Jaký úhel ϑ svírá $\vec{u}$ a $\vec{v}$?

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{16 + 16 + 4 + 0} = \sqrt{36} = 6$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{9 + 0 + 0 + 1} = \sqrt{10}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 12 + 0 + 0 + 0 = 12$$

$$\cos\vartheta = \frac{12}{6\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\vartheta \approx \underline{\underline{50.77^\circ}}$$

Úhel mezi vektory – příklad 19.

- $\vec{u} = (3, 2+\alpha, 0, 1)^T, \vec{v} = (1, 4, 3, 2\alpha^2)^T$
- Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ jsou $\vec{u}$ a $\vec{v}$ kolmé?

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 1 + (2+\alpha) \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2\alpha^2 =$$
$$= 3 + 8 + 4\alpha + 0 + 2\alpha^2 = 2\alpha^2 + 4\alpha + 11 \stackrel{?}{=} 0$$
$$D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 11 = 16 - 88 = -72 < 0$$

- Odpověď: pro žádná $\alpha \in \mathbb{R}$.

Skalární součin – příklad 20.

- $\vec{a} = (1, 1, 1)^T, \vec{b} = (1, 1, 2)^T, \vec{c} = (2, 1, 1)^T$
- $\vec{a} \cdot (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \vec{c}) = 0, \ \vec{b} \cdot (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \vec{c}) = 0$
- $\alpha, \beta = ?$

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + 2 \\ \alpha + \beta + 1 \\ \alpha + 2\beta + 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \vec{c}) = 1 \cdot (\alpha + \beta + 2) + 1 \cdot (\alpha + \beta + 1) + \\ + 1 \cdot (\alpha + 2\beta + 1) = 3\alpha + 4\beta + 4 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\vec{b} \cdot (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \vec{c}) = 1 \cdot (\alpha + \beta + 2) + 1 \cdot (\alpha + \beta + 1) + \\ + 2 \cdot (\alpha + 2\beta + 1) = 4\alpha + 6\beta + 5 \stackrel{?}{=} 0$$

$$3\alpha + 4\beta + 4 = 0, \ 4\alpha + 6\beta + 5 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = -2}}, \underline{\underline{\beta = \frac{1}{2}}}$$