# Matematika 1
# Matice

Lukáš Hájek

ČVUT v Praze, FS – ÚTM

15. října 2020

# Opakování – číselné obory

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – přirozená čísla,
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ – celá čísla,
- $\mathbb{Q}$ – racionální čísla (lze zapsat ve tvaru zlomku $\frac{z}{n}$, kde $z \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$),
- $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – iracionální čísla,
- $\mathbb{R}$ – reálná čísla,
- $\mathbb{C}$ – komplexní čísla;

- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$,
- $\mathbb{Z}_0^-$ – záporná celá čísla a 0, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$,
- $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ – kladná čísla, $\mathbb{R}_0^- = (-\infty, 0\rangle$ – nekladná čísla, $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$ – záporná čísla

# Vektory a matice

- $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ – $\vec{u}$ je vektor o $n$ reálných *složkách* (řádcích).
- $A \in \mathbb{R}^{n,r}$ – $A$ je matice o $n \times r$ *prvcích* (elementech), tj. o $n$ řádcích a $r$ sloupcích.
- Někdy může být výhodné provádět maticové operace i s vektory. Pak místo vektoru $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ použijeme matici $V \in \mathbb{R}^{n,1}$.

# Operace s maticemi

- Mějme $A \in \mathbb{R}^{n,r}$.
- Prvek matice $A$ na řádku $j$ a ve sloupci $k$ označíme $a_{jk}$.
- Jestliže $A, B \in \mathbb{R}^{n,r}$ (tj. $A$ a $B$ mají stejné rozměry), pak je lze sčítat – jejich součet bude nová matice $C = A + B$, $c_{jk} = a_{jk} + b_{jk}$.
- Libovolným (reálným i komplexním) číslem $\alpha$ můžeme matice násobit: $G = \alpha B \Rightarrow g_{jk} = \alpha b_{jk}$ (tj. násobíme zvlášť všechny prvky matice $B$).

# Transpozice

- Podobně jako vektory, i matice můžeme zaměnit řádky a sloupce pomocí transpozic.
- Jestliže $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ a $B = A^T$, pak $B \in \mathbb{R}^{n,m}$ a $b_{jk} = a_{kj}$.
- Příklad:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, C^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

# Násobení matic

- Mějme tentokrát $A \in \mathbb{R}^{m,l}$ a $B \in \mathbb{R}^{n,r}$.
- Tyto matice pak lze mezi sebou násobit, *pokud* $l = n$.
- Pokud počet sloupců první matice a počet řádků druhé není stejný, nemůžeme násobit.
- I když $A \cdot B$ existuje, $B \cdot A$ existovat nemusí.
- Obecně $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- $A \in \mathbb{R}^{m,n}, B \in \mathbb{R}^{n,r}, C = A \cdot B \Rightarrow C \in \mathbb{R}^{m,r}$.
- Násobíme „řádek krát sloupec“, tj. $c_{jk}$ obsahuje skalární součin vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$, kde $\vec{u}$ je řádkem $j$ matice $A$ a $\vec{v}$ je sloupcem $k$ matice $B$.

# Příklad – násobení matic (1/2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}, C = A \cdot B.$$

Pozn.: $A \in \mathbb{R}^{3,2}$ a $B \in \mathbb{R}^{2,3}$.

# Příklad – násobení matic (2/2)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot(-5) & 1\cdot(-2) + 2\cdot 3 & 1\cdot(-4) + 2\cdot(-1) \\ 7\cdot 3 + 3\cdot 5 & 7\cdot(-2) + (-3)\cdot 3 & 7\cdot(-4) + 3\cdot 1 \\ (-4)\cdot 3 + 8\cdot(-5) & 4\cdot 2 + 8\cdot 3 & 4\cdot 4 + 8\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3-10 & -2+6 & -4-2 \\ 21+15 & -14-9 & -28+3 \\ -12-40 & 8+24 & 16-8 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -7 & 4 & -6 \\ 36 & -23 & -25 \\ -52 & 32 & 8 \end{pmatrix}}}$$

Pozn.: $A \in \mathbb{R}^{3,2}$ a $B \in \mathbb{R}^{2,3} \Rightarrow C \in \mathbb{R}^{3,3}$.

# Speciální typy matic

Podrobnosti na přednášce.

- Matice nulová, diagonální a horní trojúhelníková
- Matice jednotková $E$ (různé rozměry)

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matice čtvercová $A \in \mathbb{R}^{n,n}$
- Matice inverzní k matici $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, ozn. $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ (výpočet probereme u soustav rovnic)

# Příklad – inverzní matice (1/2)

Je $B = A^{-1}$? Ověřme!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 8 + 2 \cdot 4 & 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ (-4) \cdot 8 + 8 \cdot 4 & (-4) \cdot (-2) + 8 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 24 + 8 & -6 + 6 \\ -32 + 32 & 8 + 24 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}}}$$

# Příklad – inverzní matice (1/2)

Je tedy $B = A^{-1}$? NE!

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} = 32 \cdot E \overset{!}{\neq} E = A \cdot A^{-1}$$

Skutečná inverzní matice k matici A je

$$A^{-1} = \frac{1}{32} B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{16} \\ \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{32} \end{pmatrix}$$

... což si ostatně můžete ověřit! ;-)