Matematika 1
Soustavy rovnic (v maticích)

Lukáš Hájek

ČVUT v Praze, FS – ÚTM

19. října 2020

Opakování násobení matic

- $A \in \mathbb{R}^{m,r}$ a $B \in \mathbb{R}^{r,n}$
- $C = A \cdot B$
- Pak tedy $C \in \mathbb{R}^{m,n}$
- Násobíme „řádek krát sloupec“

Příklad – násobení matic (1/2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, A \cdot X = B.$$

Pozn.: $A \in \mathbb{R}^{2,3}$ a $X \in \mathbb{R}^{3,1}$.

Příklad – násobení matic (2/2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-5) + 1 \cdot 3 \\ -2 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) + 2 \cdot (-3) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 + 0 + 3 \\ -8 - 15 - 6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 \\ -29 \end{pmatrix}}}$$

Pozn.: $A \in \mathbb{R}^{2,3}$ a $X \in \mathbb{R}^{3,1} \Rightarrow B \in \mathbb{R}^{2,1}$.

Soustavy

- Soustavy m lineárních rovnic o n neznámých už známe! :-)
- Příklad: $m = 2$, $n = 3$ a

$$\begin{aligned} x - z &= 7 \\ -2x + 3y + 2z &= -29 \end{aligned}$$

- Alternativní zápis:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1x & + & 0y & + & (-1)z & = & 7 \\ -2x & + & 3y & + & 2z & = & -29 \end{array}$$

Soustavy – přepis do matice

$$1x + 0y + (-1)z = 7$$
$$-2x + 3y + 2z = -29$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 \\ -29 \end{pmatrix}}}$$

- Tedy máme $A \cdot X = B$
- Často budeme zapisovat ve tvaru $(A|B)$
- A je **matice soustavy**, B je pravá strana, v X jsou neznámé

Typy soustav

$$A \cdot X = B$$

- Možné matice soustavy A:
  1. Singulární ($\det A = 0$)
  2. Regulární ($\det A \neq 0$)

- Dle pravé strany B rozlišujeme systémy rovnic:
  1. Homogenní (B je nulová matice)
  2. Nehomogenní (B nenulová)

Hodnost matic

- Hodnost matice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ (nikoli hodnota) $\mathrm{h}(A)$
- $\mathrm{h}(A) = \mathrm{h}(A^T)$
- Sloupce matice jako vektory
- Kolik z nich mohu nejvýše vybrat, aby byl tento soubor LN? Přesně $\mathrm{h}(A)$.

Ekvivalentní úpravy matic

Tyto úpravy nemění hodnost matice (a budou se hodit při řešení soustav i hledání inverzních matic) a nazýváme je **ekvivalentní**:

- Prohazování řádků (ne sloupců!)
- Násobení řádku nenulovým číslem
- Přičtení LK řádků k jinému řádku
- Vynechání řádku, který je LK ostatních (např. nulového řádku)

Převod na horní trojúhelníkový tvar (1/2)

- Gaussova eliminace

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{2\cdot(\text{ř.}1)\text{ k ř.}2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 2$$

- Ekvivalentními úpravami nedostáváme stejnou matici!

$$A \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dostáváme pouze stejnou hodnost.

Převod na horní trojúhelníkový tvar (2/2)

- Obdobně pro $(A|B)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & -29 \end{array}\right) \overset{2\cdot(\text{ř}.1)\text{ k ř}.2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & -15 \end{array}\right)$$

- Tedy $\mathrm{h}(A|B) = 2$
- Také vidíme, že:

$$\begin{aligned} x - z &= 7 & \Rightarrow x &= 7 + z \\ 3y &= -15 & \Rightarrow y &= -5 \end{aligned}$$

- Jelikož druhá rovnice je jednoznačná, ale první dává pouze vztah mezi x a z, označme si třeba $z = p \in \mathbb{R}$.
- Pak řesení bude např. ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+p \\ -5 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ekvivalentní úpravy matic – pozn. (1/2)

- Každou ekvivalentní úpravu lze vyjádřit jako násobení jistou maticí.
- (Násobení libovolnou maticí ale nemusí být ekv. úprava)
- Např. pro matice 2×2: přičtení dvojnásobku 1. do 2. ozn. M_1, jednonásobku 2. řádku do 1. ozn. M_2. Obě úpravy (v tomto pořadí) ozn. M.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M = M_2 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Provedení obou úprav na matici A pak dává $M \cdot A$

Ekvivalentní úpravy matic – pozn. (2/2)

Pokud matice A je regulární, můžeme násobit následující rovnosti A^{-1} **zleva** (nelze zaměnit!):

- $AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B$
  $\Rightarrow \underline{\underline{X = A^{-1}B}} \Rightarrow (A|B) \sim (E|X)$
- $A^{-1}A = E \Rightarrow (A|E) \sim (E|A^{-1})$
- Provádíme-li tedy stejné ekv. úpravy na obě strany, můžeme převodem matice A na jednotkovou stejnými úpravami dostat zároveň i inverzní matici z jednotkové (či řešení systému z matice B).

Důležité věty

$$A \cdot X = B$$

- Frobeniova věta – dává nám *počet* řešení (pro n neznámých)

$$\begin{aligned} 0 \text{ ř.}\quad & \mathrm{h}(A) \neq \mathrm{h}(A|B) \\ 1 \text{ ř.}\quad & \mathrm{h}(A) = \mathrm{h}(A|B) = n \\ \infty \text{ ř.}\quad & \mathrm{h}(A) = \mathrm{h}(A|B) < n \end{aligned}$$

- Cramerovo pravidlo – dává řešení v případě regulární matice A
  1. $\det A \overset{\text{ozn.}}{=} \Delta$
  2. Det. matice se sloupcem i prohozeným za B ozn. Δ_i
  3. Neznámé ozn. $x_1, \dots, x_n$
  4. Pak $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$

Rovnice s LK

- $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n = \vec{v}$
  $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in V(\mathbb{E}_m),\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R})$
- Rozepišme na soustavu, kde v řádku j máme:
  $\alpha_1 u_{j1} + \alpha_2 u_{j2} + \cdots + \alpha_n u_{jn} = v_j$
- To ale lze zapsat jako:
  $UA = V,\ U \in \mathbb{R}^{m,n},\ A \in \mathbb{R}^{n,1},\ V \in \mathbb{R}^{m,1}$
- Vektory $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ zapisujeme jako sloupce U
- $\mathrm{h}(U)$ je dimenze v. p. generovaného souborem

Dimenze

Mějme V, podprostor $V(\mathbb{E}_n)$. Všechny vektory z V leží v

- **bodě**, je-li $\dim V = 0$
- **přímce**, je-li $\dim V = 1$
- **rovině**, je-li $\dim V = 2$
- **nadrovině**, je-li $\dim V = n - 1$

Nadrovina je tedy zároveň např.

- rovina ve $V(\mathbb{E}_3)$
- přímka ve $V(\mathbb{E}_2)$

Dimenze

Každá lineární rovnice představuje rovnici nadroviny. Řešením systému takovýchto rovnic dostaneme průnik těchto nadrovin, např. přímek ve $V(\mathbb{E}_2)$.

- Pokud je společným průnikem více jak jeden bod, je jich nekonečně mnoho (Frobenius).
- Řešení lze zapsat jako posunutí + zaměření.
- Zaměření je množina lineárních kombinací vektorů, tvoří podprostor V.
- Ozn. matici soustavy jako A a počet neznámých jako n. Pak:

$$\dim V = n - \mathrm{h}(A).$$

- $\dim V$ je také počet parametrů nutných pro popis řešení.