Matematika 1
Procvičování matic

Lukáš Hájek

ČVUT v Praze, FS – ÚTM

30. října 2020

Lineární systémy

$$AX = B$$

- Lze použít i pro rovnice s LK vektorů (a pro určení LN/LZ souboru vektorů).
- Je-li A reg., pak lze použít Cramerovo p. (a ex. právě 1 řešení).
- Vždy lze řešit pomocí ekv. úprav z $(A|B)$.
- Počet řešení z Frobeniovy věty.
- Počet volných parametrů je $n - \mathrm{h}(A)$.

Nalezení inverzní matice

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

- A musí být regulární (tj. $\det A \neq 0$).
- A^{-1} získáme ekvivalentními úpravami z jednotkové matice, tj.
$$(A|E) \sim (E|A^{-1}).$$
- Lze využít vzorečku z přednášky $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\mathrm{adj}}$ (ale není to nutné).

Zadání pro následující příklady

- Jsou uvedené vektory LN? (pomocí hodn. i det.)
- Tvoří bázi? Jakou dimenzi má jimi generovaný v.p.?
- Lze z vektorů nakombinovat $\vec{h}$?
- Nalezněte koeficienty LK dávající $\vec{h}$ pomocí:
  - vyřešení lin. systému ekv. úpravami,
  - Cramerova pravidla
  - Vztahu s inverzní maticí ($AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$)
- Proveďte zkoušku pro nalezené koeficienty i A^{-1}

Z příkladu 23

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- K zadání ve cvičebnici navíc volíme $\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- Začněme otázkou LN, báze a dimenze v.p.

- Poskládáme $\vec{u}$ a $\vec{v}$ do matice: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
- Otázkou LN se ptáme na počet řešení homogenního systému $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$
- Pro homogení systém (pravá strana B je nulová matice) vždy platí $\mathrm{h}(A) = \mathrm{h}(A|B)$
- Ekv. úpravy: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow$
  $\mathrm{h}(A) = 2 \overset{n=2}{\Rightarrow} A$ je reg. a vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou LN
- obdobně pomocí determinantu:
  $\det A = 6 + 1 = 7 \neq 0 \Rightarrow$ matice A je reg. $\overset{n=2}{\Rightarrow} \mathrm{h}(A) = 2$

- Z obou postupů vidíme, že $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou LN a generují prostor V, $\dim V = 2$, tj. tvoří bázi $V = V(\mathbb{E}_2)$
- koeficienty LK můžeme lépe vidět u rozšířené matice (která ale pro homogenní systém není nutná):
$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{array}\right)$
- ... tj. máme $-7\beta = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 0}} \Rightarrow \alpha + 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 0}}$
- Kromě toho jsme o počtu řešení věděli z Frobeniovy věty
- Homogenní systém má vždy alespoň jedno (nulové) řešení; pokud ex. právě 1 ř., je to automaticky řešení nulové
- Nakombinujme nyní $\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $\alpha_h \vec{u} + \beta_h \vec{v} = \vec{h}$
- $(A|\vec{h}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} \end{array}\right) \Rightarrow \alpha_h = \frac{5}{7}, \beta_h = \frac{3}{7}$
- Pro Cramerovo pravidlo: víme $\Delta = \det A = 7$ (není $0 \Rightarrow$ Cr. pr. lze použít) a dále:
  $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$
- Pak dostáváme $\alpha_h = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{7}, \beta_h = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3}{7}$
- Použijme ještě inverzní matici A^{-1}

- $A^{\mathrm{adj}} = (A^{\mathrm{alg}})^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T$
- $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\mathrm{adj}} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$
- Ekvivalentními úpravami dojdeme ke stejnému závěru:

$$A \overset{!}{\neq} (A|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$(A|E) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array} \right) = (E|A^{-1}) \overset{!}{\neq} A^{-1}$$

- Po přepisu tedy máme stejný výsledek $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

- Zkoušku správnosti napočítané A^{-1} dostaneme pomocí násobení původní maticí (musíme získat příme jednotkovou, tj. bez dalších ekvivalentních úprav!)
- Např.: $A^{-1}A = E$ či $AA^{-1} = E$ (z def. stejné)
- $AA^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6+1}{7} & \frac{2-2}{7} \\ -\frac{3-3}{7} & \frac{1+6}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $X = \begin{pmatrix} \alpha_h \\ \beta_h \end{pmatrix}$
- $X = A^{-1}\vec{h} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_h \\ \beta_h \end{pmatrix}$

- Konečně ověříme správnost koeficientů LK, tj. zda skutečně $\alpha_h\vec{u} + \beta_h\vec{v} = \vec{h}$

$$\frac{5}{7}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{7}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{10}{7}\\\frac{5}{7}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{3}{7}\\\frac{9}{7}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{10-3}{7}\\\frac{5+9}{7}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Z příkladu 24

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$
- K zadání ve cvičebnici navíc volíme tentokrát dva vektory, které chceme nakombinovat $\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{k} = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \end{pmatrix}$
- Začněme otázkou LN, báze a dimenze v.p.

- Poskládáme $\vec{u}$ a $\vec{v}$ do matice: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
- Otázkou LN se ptáme na počet řešení homogenního systému $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$
- Pomocí determinantu:
  $\det A = 15 - 15 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow$ matice A je sing. $\stackrel{n=2}{\Rightarrow} \mathrm{h}(A) \stackrel{!}{<} 2$
- Soubor je tedy LZ (a netvoří žádnou bázi)
- Snadno si rozmyslíme, že $\mathrm{h}(A) = 1$, tedy $\vec{u}$ a $\vec{v}$ generují V, $\dim V = 1$ (vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou rovnoběžné generují přímku)
- Pro homogení systém (pravá strana B je nulová matice) vždy platí $\mathrm{h}(A) = \mathrm{h}(A|B)$
- Hodnost A pomocí ekvivalentních úprav zde přeskočíme a přejdeme rovnou k řešení nehomogenních soustav.

- Z $\det A = 0$ víme, že nelze použít Cramerovo p. ani inverzní matici (která neexistuje) pro hledání řešení
- Pro vektor $\vec{h}$:
$$(A|\vec{h}) = \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{3}{2} & 10 & 1 \\ \frac{3}{2} & -10 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{3}{2} & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$
- Z toho plyne: $1 = \mathrm{h}(A) < \mathrm{h}(A|B) = 2$
- Z Frobeniovy věty víme, že tento systém **nemá řešení**
- $\vec{h}$ tedy není prvkem V.

- Pro vektor $\vec{k}$:
  $(A|\vec{k}) = \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{3}{2} & 10 & 20 \\ \frac{3}{2} & -10 & -20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 20 & 40 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
- Z toho plyne: $1 = \mathrm{h}(A) < \mathrm{h}(A|B) = 2$
- Z Frobeniovy věty víme, že tento systém nemá nekonečně mnoho řešení
- $-3\alpha + 20\beta = 40 \Rightarrow \alpha = -\frac{40}{3} + \frac{20}{3}\beta$
- Volme např. $\beta = p \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha = -\frac{40}{3} + \frac{20}{3}p$
- Pak $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{40}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$
- a $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{k}$
- Správnost nalezeného řešení si prosím ověřte dosazením sami, mně už se to nechce psát. . . O:-)

Z příkladu 27

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- K zadání ve cvičebnici navíc volíme $\vec{h} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$
- Začněme otázkou LN, báze a dimenze v.p.

- Poskládáme $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$ do matice: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Otázkou LN se ptáme na počet řešení homogenního systému $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$
- Pomocí determinantu: $\det A = 2 + 0 - 6 - (0 + 0 + 0) = -4 \neq 0 \Rightarrow$ matice A je reg. $\overset{n=3}{\Rightarrow} \mathrm{h}(A) = 3$
- Soubor je tedy LN (a tvoří bázi $V(\mathbb{E}_3)$)
- Hodnost A pomocí ekvivalentních úprav zde přeskočíme a přejdeme rovnou k řešení nehomogenních soustav.

- Pro vektor $\vec{h}$: $(A|\vec{h}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim$
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$
- Dle očekávání tedy: $3 = \mathrm{h}(A) = \mathrm{h}(A|\vec{h}) = 3 = n$
- Z Frobeniovy věty víme, že tento systém má právě jedno řešení
- $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tj. $1\vec{u} + 1\vec{v} + 1\vec{w} = \vec{h}$ (dosaďte a ověřte!)

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Snadno se přesvědčíme, že $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -4 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$
- A pak $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Cramerovým pravidlem získáváme:
  $\Delta_1 = -4, \Delta_2 = -4, \Delta_3 = -4$

Z příkladu 26

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -15 \\ -3 \end{pmatrix}$
- K zadání ve cvičebnici navíc volíme $\vec{h} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$
- Začněme otázkou LN, báze a dimenze v.p.

- Poskládáme $\vec{u}$ a $\vec{v}$ do matice: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -15 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
- Otázkou LN se ptáme na počet řešení homogenního systému $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$
- Pomocí determinantu tentokrát řešit nelze, protože matice není čtvercová (a tedy ani A^{-1} neex.)
- $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -15 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{h}(A) = 1$
- Jelikož počet vektorů je 2>1, je soubor LZ a netvoří tedy žádnou bázi.
- $\dim V = \mathrm{A} = 1$, tj. vektory jsou na jedné přímce

- Pro vektor $\vec{h}$: $(A|\vec{h}) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 3 \\ 5 & -15 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim$
$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$
- $1 = \mathrm{h}(A) < \mathrm{h}(A|\vec{h}) = 2$
- Z Frobeniovy věty víme, že tento systém **nemá řešení**

Z příkladu 33

- $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \ \vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \ \vec{d} = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$
- K zadání ve cvičebnici navíc volíme $\vec{h} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$
- Začněme otázkou LN, báze a dimenze v.p.

- Poskládáme $\vec{u}$ a $\vec{v}$ do matice: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -15 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
- Otázkou LN se ptáme na počet řešení homogenního systému $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$
- Pomocí determinantu tentokrát řešit nelze, protože matice není čtvercová
- $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 & 16 \\ 8 & 3 & 5 & 6 \\ -2 & 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 & 7 \\ 8 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & -6 & 16 \end{pmatrix} \sim$
  $\begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 23 & -11 & 34 \\ 0 & 33 & -32 & 67 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 10 & -21 & 33 \\ 0 & 0 & -173 & -419 \end{pmatrix} \Rightarrow$
  $\mathrm{h}(A) = 3$
- Jelikož počet vektorů je 4>3, je soubor LZ a netvoří tedy žádnou bázi.

- Tento krok lze spojit s předchozími úpravami

$$(A|\vec{h}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & -6 & 16 & 3 \\ 8 & 3 & 5 & 6 & -1 \\ -2 & 5 & -4 & 7 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 5 & -4 & 7 & 4 \\ 8 & 3 & 5 & 6 & -1 \\ 5 & 4 & -6 & 16 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 5 & -4 & 7 & 4 \\ 0 & 23 & -11 & 34 & 15 \\ 0 & 33 & -32 & 67 & 26 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 5 & -4 & 7 & 4 \\ 0 & 10 & -21 & 33 & 11 \\ 0 & 0 & -173 & -419 & -103 \end{array}\right)$$

- $173\gamma + 419\delta = 103 \Rightarrow \delta = p \in \mathbb{R}, \gamma = \frac{103-419p}{173}$
- $\beta = \frac{1}{10}\left(11 - 33p + 21\frac{103-419p}{173}\right)$
- $\alpha = -\left(2 - \frac{7}{2}p + 2\frac{103-419p}{173} - \frac{1}{4}\left(11 - 33p + 21\frac{103-419p}{173}\right)\right)$