ROVNICE VEDENÍ TEPLA

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

někdy zapisujeme také jako

$$u_t = p\,u_{xx} + f(x,t)$$

OKRAJOVÉ PODM. (BC) pro $t \geq 0$: BOUNDARY CONDITIONS

$$u(a,t) = \alpha(t)\ ,\ u(b,t) = \beta(t)$$

POČÁTEČNÍ PODM. (IC) pro $x \in \langle a,b\rangle$: INITIAL COND.

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

NÁHRADY DERIVACÍ

- dopředná první

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + O(h)$$

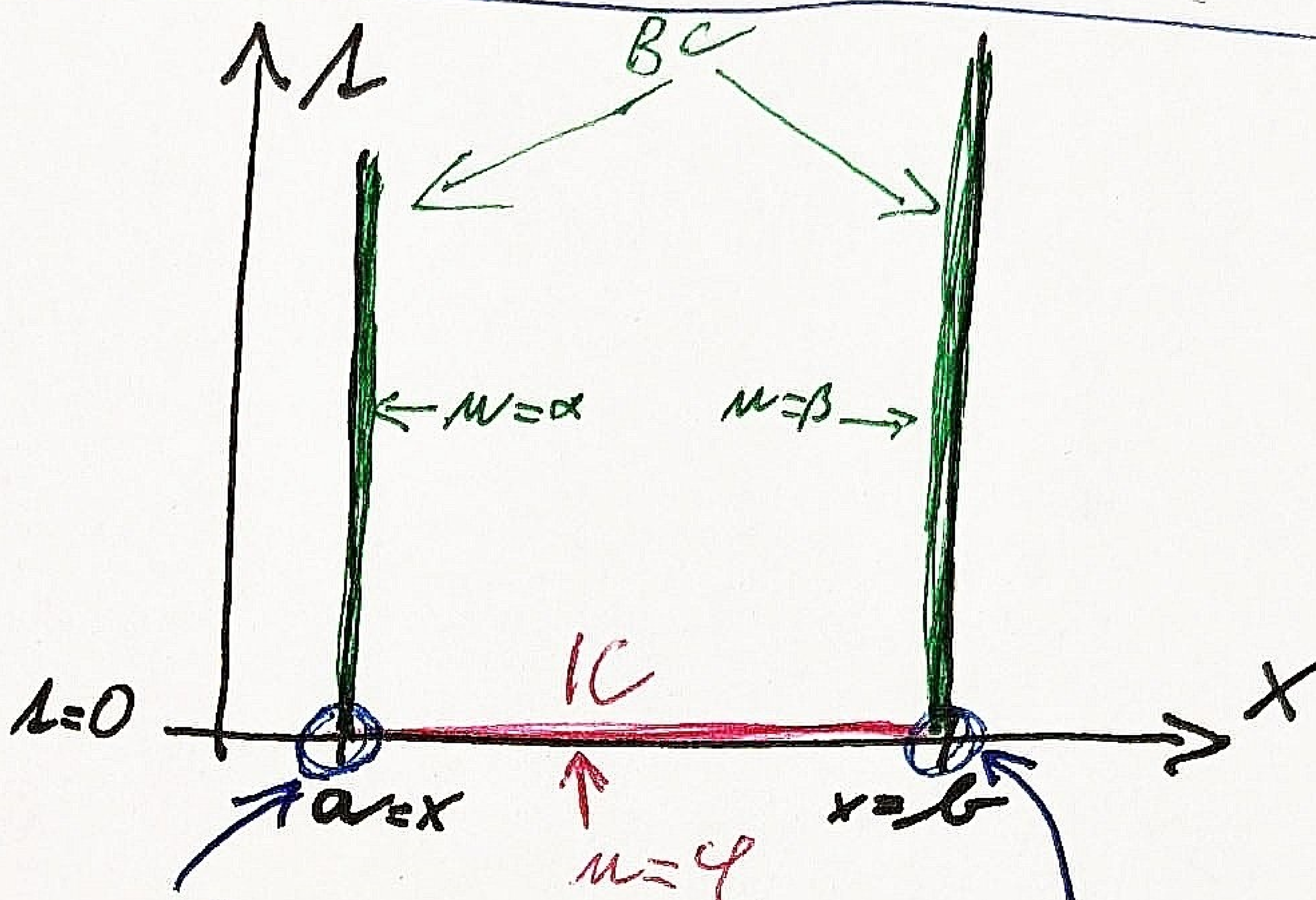
použijeme pro proměnnou t s krokem τ:

$$u_t = \frac{u(x,t+\tau) - u(x,t)}{\tau} + O(\tau)$$

- centrální druhá

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

použijeme pro u_{xx} s krokem h...
(lze použít v čase t i $t+\tau$ - viz dále)



$$u(a,0) = \alpha(0) = \varphi(a) \qquad u(b,0) = \beta(0) = \varphi(b)$$

PODMÍNKY SOUHLASU

(IC na okrajích odpovídá BC na počátku)

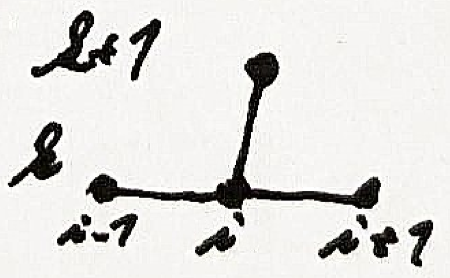
$$\boxed{\alpha(0) = \varphi(a)\ ,\ \beta(0) = \varphi(b)}$$

indexace: čas v horním indexu (U^{ℓ})
(krok)
prostor v dolním indexu (U_i)

$$u(x_i + 2h,\ t_\ell + 3\tau) \approx U_{i+2}^{\ell+3}$$

$$u(x_i, t_\ell) \approx U_i^{\ell}$$

Explicitní schéma:



($U_i^{\ell+1}$ pomocí $U_{i-1}^{\ell}, U_i^{\ell}, U_{i+1}^{\ell}$)

u_{xx} nahradíme v čase „t":

$$\frac{u(x,t+\tau) - u(x,t)}{\tau} = p\,\frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} + O(h^2+\tau) + f(x,t)$$

přibližné řešení:

$$\frac{U_i^{\ell+1} - U_i^{\ell}}{\tau} = p\,\frac{U_{i+1}^{\ell} - 2U_i^{\ell} + U_{i-1}^{\ell}}{h^2} + f_i^{\ell} \Rightarrow \boxed{U_i^{\ell+1} = \sigma U_{i-1}^{\ell} + (1-2\sigma)U_i^{\ell} + \sigma U_{i+1}^{\ell} + \tau f_i^{\ell}}$$

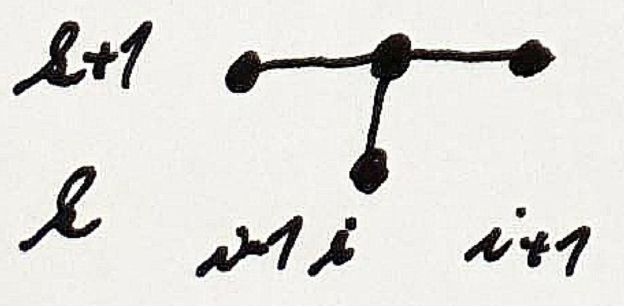
kde $\sigma = \frac{p\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ PODMÍNKA STABILITY EXPLICITNÍHO SCHÉMATU

Implicitní schéma (náhrada u_{xx} v čase „$t+\tau$"):

$$\frac{u(x,t+\tau) - u(x,t)}{\tau} = p\,\frac{u(x+h,t+\tau) - 2u(x,t+\tau) + u(x-h,t+\tau)}{h^2} + O(h^2+\tau) + f(x,t+\tau)$$

přibližné ř.:

$$\frac{U_i^{\ell+1} - U_i^{\ell}}{\tau} = p\,\frac{U_{i+1}^{\ell+1} - 2U_i^{\ell+1} + U_{i-1}^{\ell+1}}{h^2} + f_i^{\ell+1} \Rightarrow \boxed{-\sigma U_{i-1}^{\ell+1} + (1+2\sigma)U_i^{\ell+1} - \sigma U_{i+1}^{\ell+1} = U_i^{\ell} + \tau f_i^{\ell+1}}$$



kde opět $\boxed{\sigma = \frac{p\tau}{h^2}}$, ale SCHÉMA IMPLICITNÍ JE STABILNÍ BEZPODMÍNEČNĚ

A4. V oblasti $Q_T = \{[x,t] : x \in (-1,3),\ t \in (0,T)\}$ je zadána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x - t, \qquad u(x,0) = 2x, \quad u(-1,t) = -\frac{2}{1+t}, \quad u(3,t) = 2t + 6,$$

a) Zapište, jak se nahradí $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v uzlu $P_i^k = [x_i, k\tau]$ na k-té časové vrstvě při odvození explicitního schématu pro řešení dané rovnice. Užijte tyto náhrady pro danou rovnici a toto schéma odvoďte. Zapište podmínku jeho stability. Stručně vysvětlete význam všech symbolů.

b) Ověřte, zda jsou splněny podmínky souhlasu (tyto podmínky uveďte)! Pro prostorový krok $h = 1$ určete maximální časový krok τ_{max} tak, aby bod $A = [2, 0.5]$ byl uzlem sítě a explicitní schéma bylo stabilní.

c) Volte $h = 1$ a τ_{max} určené v předchozím bodě b) a pomocí explicitního schématu určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A = [2, 0.5]$.

A4.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{x - t}_{f(x,t)=x-t}, \qquad p=2$$

IC: $u(x,0) = 2x = \varphi(x)$ $(x \in \langle -1, 3\rangle)$

BC: $u(-1,t) = -\frac{2}{t+1} = \alpha(t)$ $(t \geq 0)$

$u(3,t) = 2t+6 = \beta(t)$

---

a) Viz přehled... $U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1-2\sigma)U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k$

$\sigma = \frac{p\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ PODM. STAB. (+popsat h, τ...)

---

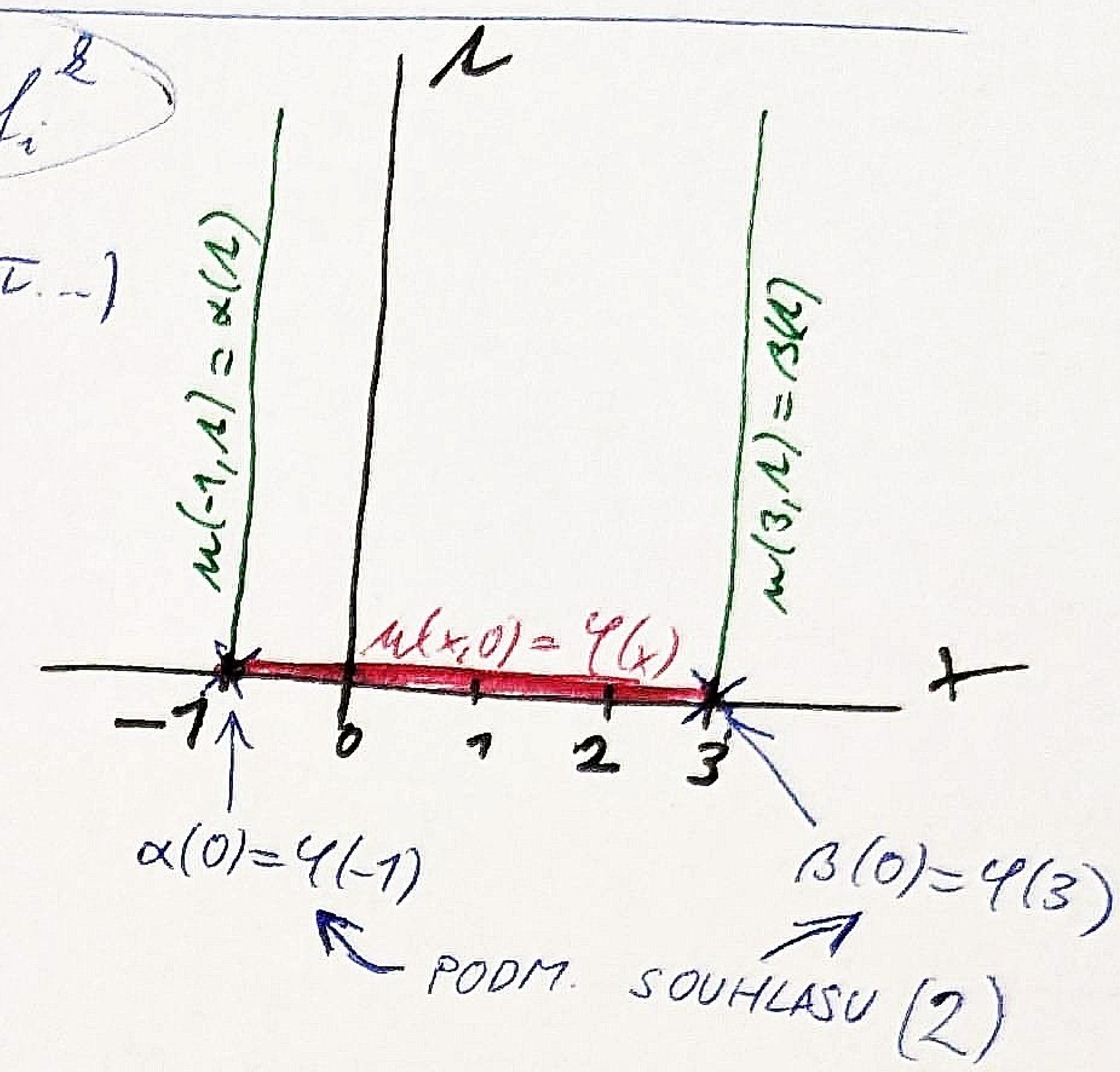
b) PODM. SOUHLASU: (rozepsat!)

$\varphi(-1) = \alpha(0)$ $\qquad$ $\varphi(3) = \beta(0)$

$2\cdot(-1) = -\frac{2}{1+0}$ $\qquad$ $2\cdot 3 = 2\cdot 0 + 6$

$-2 = -2$ ✓ $\qquad$ $6 = 6$ ✓

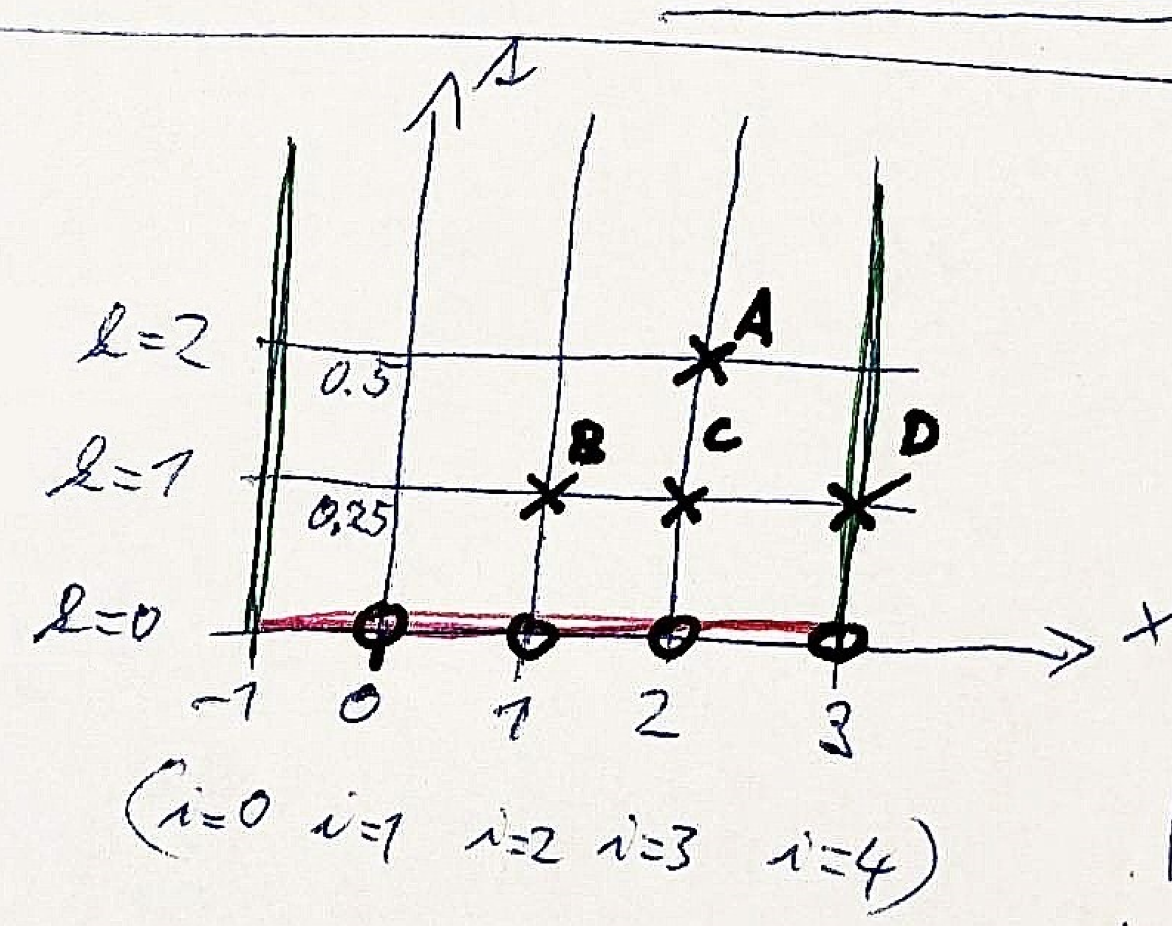
SPLNĚNY



$h = 1$: $\sigma = \frac{p\tau}{h^2} = \frac{2\tau}{1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \tau \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \tau_{max} = 0.25 \Rightarrow \sigma = 0.5$

---

c) $u(\underbrace{2, 0.5}_{A}) \cong ?$



pro $U_A = U_3^2$ potřebujeme

$U_B = U_2^1$

$U_C = U_3^1$

$U_D = U_4^1 = \beta(0,25)$

pro U_B potřebujeme

$U_1^0 = \varphi(0)$, $U_2^0 = \varphi(1)$, $U_3^0 = \varphi(2)$

pro U_C potřebujeme

$U_2^0 = \varphi(1)$, $U_3^0 = \varphi(2)$, $U_4^0 = \varphi(3) = \beta(0)$

---

k=0:

$U_B = \sigma\varphi(0) + (1-2\sigma)\varphi(1) + \sigma\varphi(2) + \tau f(1,0)$

$U_B = 0.5\cdot 0 + \overbrace{(1-2\cdot 0.5)}^{0}\cdot 2 + 0.5\cdot 4 + 0.25\cdot(1-0) = \underline{2.25}$

$U_C = \sigma\varphi(1) + (1-2\sigma)\varphi(2) + \sigma\overset{\beta(0)}{\overset{\parallel}{\varphi(3)}} + \tau f(2,0)$

$U_C = \underbrace{0.5\cdot 2}_{1} + \underbrace{0\cdot 4}_{0} + \underbrace{0.5\cdot 6}_{3} + \underbrace{0.25\cdot(2-0)}_{0.5} = \underline{4.5}$

$U_D = \beta(0.25) = 2\cdot 0{,}25 + 6 = \underline{6.5}$

---

k=1:

$U_A = \sigma U_B + (1-2\sigma)U_C + \sigma U_D + \tau f(2, 0.25)$

$U_A = 0.5\cdot 2.25 + (1-2\cdot 0.5)\cdot 4.5 + 0.5\cdot 6.5 + 0.25(2-0.25) = \underline{\underline{4.8125 \approx u(A) = u(2, 0.5)}}$

Př.: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x - 2t$

$p = \frac{1}{2}$ $\quad f = x - 2t$

BC: $u(-0.8, t) = t + 1 = \alpha(t)$ $\quad (t \geq 0)$

$u(+0.8, t) = -1 = \beta(t)$

IC: $u(x, 0) = -1.25x = \varphi(x)$ $\quad (x \in \langle -0.8, +0.8 \rangle)$

$h = 0.4$, $\tau = 0.4$, IMPLICITNÍ METODA

a) PODMÍNKY SOUHLASU

b) PODM. STABILITY

c) SOUSTAVA PRO 1. čas. vrstvu

---

a) P. SOUHLASU

$\alpha(0) = \varphi(-0.8)$

$0 + 1 = -1.25 \cdot (-0.8) = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5}$

$1 = 1$ ✓

$\beta(0) = \varphi(0.8)$

$-1 = -1.25 \cdot 0.8$

$-1 = -1$ ✓

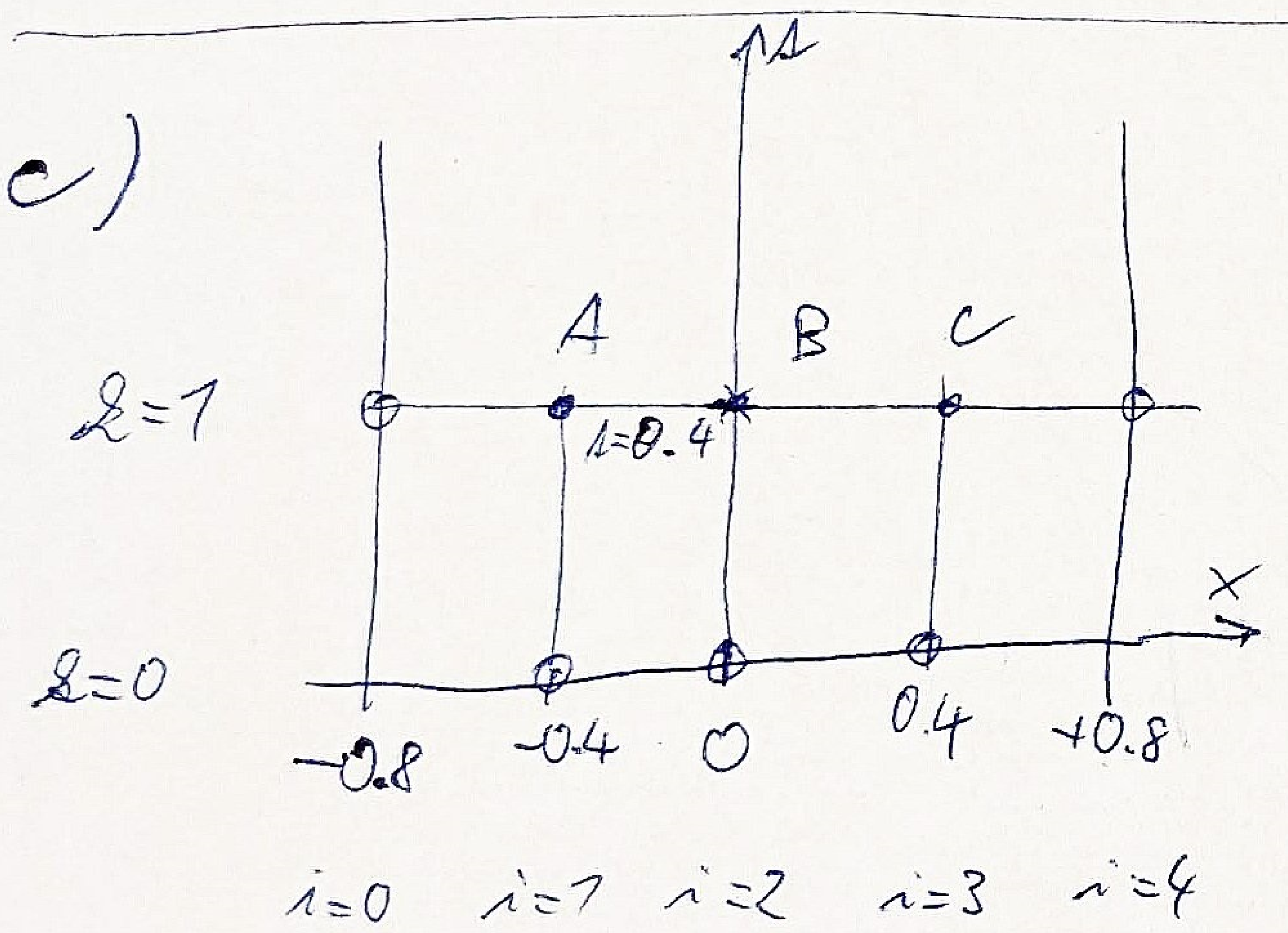
P. SOUHLASU SPLNĚNY ✓

---

b) STABILITA: IMPL. SCHÉMA JE VŽDY STABILNÍ – SPLNĚNO ✓

---

c)



$A = [x_1, t_1] = [-0.4, 0.4]$ $\quad U_1^1 = U_A$

$B = [x_2, t_1] = [0, 0.4]$ $\quad U_2^1 = U_B$

$C = [x_3, t_1] = [0.4, 0.4]$ $\quad U_3^1 = U_C$

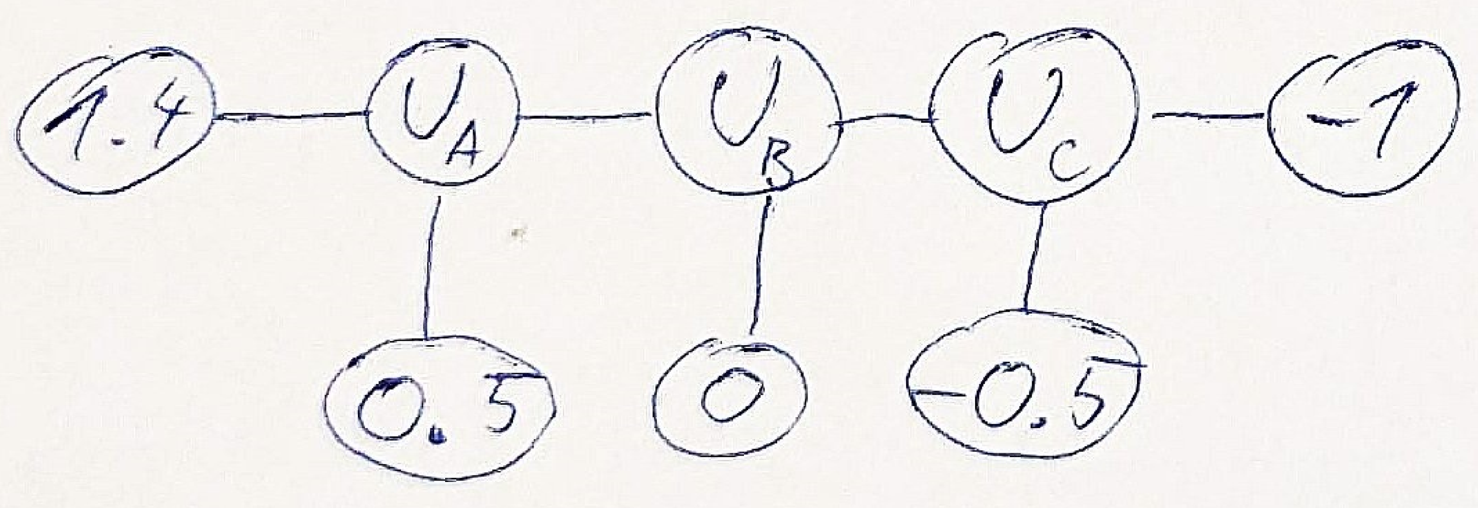
BC: $U_0^1 = \alpha(t_1) = \alpha(0.4) = 0.4 + 1 = \underline{1.4}$

$U_4^1 = \beta(t_1) = \beta(0.4) = \underline{-1}$

IC: $U_1^0 = \varphi(x_1) = \varphi(-0.4) = -1.25(-0.4) = +\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{10} = \underline{0.5}$

$U_2^0 = \varphi(x_2) = \varphi(0) = -1.25 \cdot 0 = \underline{0}$

$U_3^0 = \varphi(x_3) = \varphi(+0.4) = -1.25 \cdot 0.4 = \underline{-0.5}$



$\sigma = \frac{p\tau}{h^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0.4}{0.4^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{10}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = \underline{1.25}$

$f(A) = f_1^1 = x_1 - 2t_1 = -0.4 - 2 \cdot 0.4 = \underline{-1.2}$

$f(B) = f_2^1 = 0 - 2 \cdot 0.4 = \underline{-0.8}$

$f(C) = f_3^1 = 0.4 - 2 \cdot 0.4 = \underline{-0.4}$

SOUSTAVA:

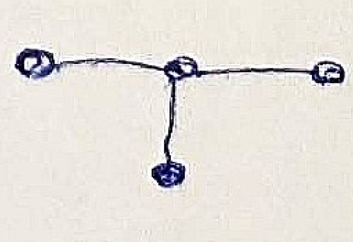
$(\ell = 0)$ ← $\quad f_1^1$

$\boxed{A}$: $-1.25 \cdot 1.4 + 3.5U_A - 1.25U_B = 0.5 + 0.4f(A)$

$-1.75 + 3.5U_A - 1.25U_B = \underbrace{0.5 + 0.4(-1.2)}_{0.02}$

$\boxed{3.5U_A - 1.25U_B = 1.77}$

$$\underset{+1.25}{\underset{\parallel}{-\sigma}}\, U_{i-1}^{\ell+1} + \underset{3.5}{\underset{\parallel}{(1+2\sigma)}}\, U_i^{\ell+1} \underset{+1.25}{\underset{\parallel}{-\sigma}}\, U_{i+1}^{\ell+1} = U_i^{\ell} + \underset{0.4}{\underset{\parallel}{\tau}}\, f_i^{\ell+1}$$



$\boxed{B}$: $\boxed{-1.25U_A + 3.5U_B - 1.25U_C = \overbrace{0. + 0.4 \cdot (-0.8)}^{-0.32}}$

$\boxed{C}$: $-1.25U_B + 3.5U_C - 1.25(-1) = -0.5 + 0.4(-0.4)$

$\boxed{-1.25U_B + 3.5U_C = -1.91}$