# VLNOVÁ ROVNICE

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t)$$

BC: $u(a,t)=\alpha(t)$, $u(b,t)=\beta(t)$
$(t\ge 0)$

IC: $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$
$(x\in\langle a,b\rangle)$

(navíc oproti ved. tepla)

NÁHRADY DERIVACÍ: vždy 2. centrální

$$u_{tt} = \frac{u(x,t+\tau)-2u(x,t)+u(x,t-\tau)}{\tau^2}+O(\tau^2)$$

$$u_{xx} = \frac{u(x+h,t+*)-2u(x,t+*)+u(x-h,t+*)}{h^2}+O(h^2)$$

*: lze přičíst $\tau$, $-\tau$ nebo 0

PODMÍNKY SOUHLASU

(OBDOBNĚ JAKO U TEPLA)

$$u(a,0)=\boxed{\alpha(0)=\varphi(a)}$$
$$u(b,0)=\boxed{\beta(0)=\varphi(b)}$$

(ALE TAKÉ:)

$$u_t(a,0)=\boxed{\dot\alpha(0)=\psi(a)}$$
$$u_t(b,0)=\boxed{\dot\beta(0)=\psi(b)}$$
$$\dot\beta(0)=\frac{d\beta}{dt}(0)$$

NÁHRADA 1. ČASOVÉ VRSTVY: z IC známe hodnotu a sklon funkce $u$ ve směru $t$, předpokládáme lineární průběh

$$u(x_i,\tau)=u(x_i,0)+\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,0)\cdot\tau+O(\tau^2)$$

↳ přibližné ř. pro 1. čas. vrstvu: (pro explicitní i implicitní schéma)

$$\boxed{U_i^1=\varphi(x_i)+\psi(x_i)\tau}$$

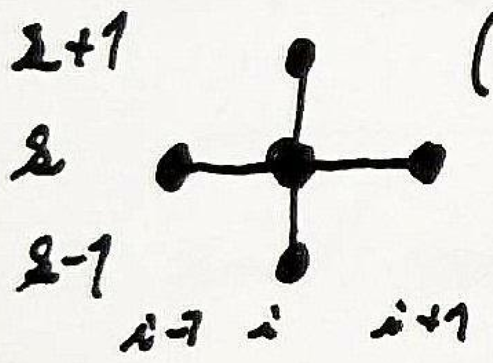
## Explicitní schéma $(*=0)$

$$\frac{u(x,t+\tau)-2u(x,t)+u(x,t-\tau)}{\tau^2}=c^2\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}+O(h^2+\tau^2)+f(x,t)$$

přibližné ř.:

NÁHRADA OD 2. časové VRSTVY

$$\frac{U_i^{l+1}-2U_i^l+U_i^{l-1}}{\tau^2}=c^2\frac{U_{i+1}^l-2U_i^l+U_{i-1}^l}{h^2}+f_i^l \Rightarrow \boxed{U_i^{l+1}=\sigma^2U_{i+1}^l+2(1-\sigma^2)U_i^l+\sigma^2U_{i-1}^l-U_i^{l-1}+\tau^2f_i^l}$$




$(U_i^{l+1}$ pomocí $U_i^{l-1}, U_{i-1}^l, U_i^l, U_{i+1}^l)$

↳ kde $\sigma^2=\frac{c^2\tau^2}{h^2}\le 1$ PODM. STABILITY EXPLICITNÍHO SCH.

↳ tuto náhradu lze použít až od časového kroku 2 (je-li $t_0=0$ počátek), protože pro $U_i^2$ potřebujeme $U_i^0$, ale také $U_i^1, U_{i+1}^1, U_{i-1}^1$.

## Implicitní schéma (pro náhradu $u_{xx}$ použijeme se stejnou váhou, tj. $\frac12$, $*=-\tau$ i $*=\tau$)

$$u_{xx}=\frac12\,\frac{u(x+h,t+\tau)-2u(x,t+\tau)+u(x-h,t+\tau)}{h^2}+\frac12\,\frac{u(x+h,t-\tau)-2u(x,t-\tau)+u(x-h,t-\tau)}{h^2}+O(h^2)$$

...tedy celkově máme:

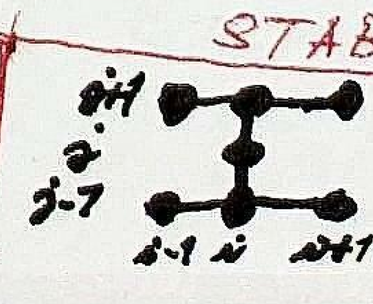
$$\frac{u(x,t+\tau)-2u(x,t)+u(x,t-\tau)}{\tau^2}=c^2\frac{u(x+h,t+\tau)-2u(x,t+\tau)+u(x-h,t+\tau)}{2h^2}+c^2\frac{u(x+h,t-\tau)-2u(x,t-\tau)+u(x-h,t-\tau)}{2h^2}+O(h^2+\tau^2)+f(x,t)$$

přibližné ř.: (NÁHRADA OD 2. čas. vrstvy – v první stejné jako expl. sch.)

$$\frac{U_i^{l+1}-2U_i^l+U_i^{l-1}}{\tau^2}=\frac{c^2}{2h^2}\left[U_{i+1}^{l+1}-2U_i^{l+1}+U_{i-1}^{l+1}\right]+\frac{c^2}{2h^2}\left[U_{i+1}^{l-1}-2U_i^{l-1}+U_{i-1}^{l-1}\right]+f_i^l$$

$\sigma^2=\frac{c^2\tau^2}{h^2}$; IMPLICITNÍ SCH. BEZPODMÍNEČNĚ STABILNÍ

$$\Rightarrow \boxed{-\frac12\sigma^2U_{i-1}^{l+1}+(1+\sigma^2)U_i^{l+1}-\frac12\sigma^2U_{i+1}^{l+1}=\frac12\sigma^2U_{i-1}^{l-1}-(1+\sigma^2)U_i^{l-1}+\frac12\sigma^2U_{i+1}^{l-1}+2U_i^l+\tau^2f_i^l}$$



**A3.** Je dána smíšená úloha:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (x + t),$$

s počátečními a okrajovými podmínkami $u(x,0) = x$, $\frac{\partial u}{\partial t} = (x-1)^2$ pro $x \in \langle 0; 1 \rangle$, $u(0,t) = t$, $u(1,t) = t^2+1$ pro $t \geq 0$.

2 a) Zapište podmínky souhlasu a ověřte, zda jsou splněny.

12 b) Zapište, jak se nahradí derivace $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě $P_i^k = [x_i, t^k]$ při řešení vlnové rovnice explicitním schématem a toto schéma odvoďte. Odvoďte náhradu přibližných hodnot funkce $u$ na první časové vrstvě s druhým řádem přesnosti. Vysvětlete užité značení.

3 c) Volte prostorový krok 0.2 a určete maximální časový krok tak, aby explicitní schéma pro vlnovou rovnici bylo stabilní a bod $[0.8, 0.2]$ byl bodem sítě.

8 d) Určete přibližnou hodnotu $u$ v bodě $[0.8, 0.2]$ pomocí explicitního schématu pro vlnovou rovnici s časovým a prostorovým krokem z c). Na první časové vrstvě užijte náhradu druhého řádu přesnosti.

## A3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \underbrace{4}_{c^2=4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \underbrace{- (x+t)}_{f=-(x+t)}$$

IC: $(x\in\langle 0,1\rangle)$ $u(x,0) = x = \varphi(x)$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = (x-1)^2 = \psi(x)$

BC: $(t\geq 0)$ $u(0,t) = t = \alpha(t)$

$u(1,t) = t^2+1 = \beta(t)$

---

a)

$\boxed{x=0:}$

$\varphi(0)=\alpha(0)$

$0=0$ ✓

$\psi(0)=\frac{\partial\alpha}{\partial t}(0)$

$(0-1)^2=1$

$1=1$ ✓

$\boxed{x=1:}$

$\varphi(1)=\beta(0)$

$1=0^2+1$ ✓

$\psi(1)=\frac{\partial\beta}{\partial t}(0)$

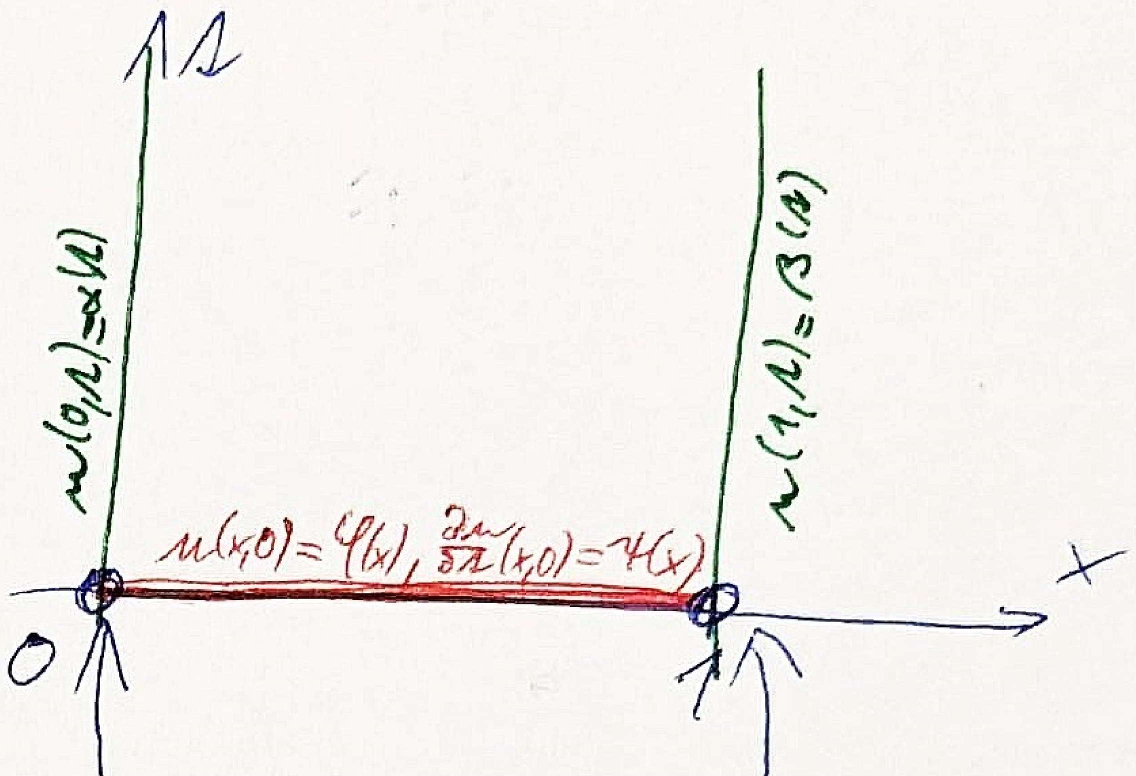
$(1-1)^2=2\cdot 0$

$0=0$ ✓

PODM. SOUHL. SPLNĚNY

$\frac{\partial\alpha}{\partial t}=1$

$\frac{\partial\beta}{\partial t}=2t$




$u(0,0)=\varphi(0)=\alpha(0)$ $\quad$ $u(1,0)=\varphi(1)=\beta(0)$

$\frac{\partial u}{\partial t}(0,0)=\psi(0)=\frac{\partial\alpha}{\partial t}(0)$ $\quad$ $\frac{\partial u}{\partial t}(1,0)=\psi(1)=\frac{\partial\beta}{\partial t}(0)$

(4) PODM. SOUHLASU

---

b) viz přehled...

1. časová vrstva: $U_i^1 = \varphi(x_i)+\psi(x_i)\tau$, kde $\tau$ je časový krok

2. čas. vr.: (a další $\ell\geq 1$) $U_i^{\ell+1} = \sigma^2 U_{i+1}^{\ell} + 2(1-\sigma^2)U_i^{\ell} + \sigma^2 U_{i-1}^{\ell} - U_i^{\ell-1} + \tau^2 f_i^{\ell}$, kde $\sigma^2 = \frac{c^2\tau^2}{h^2} \leq 1$ podm. stab.

$h$ je prostorový krok

$U_i^{\ell} \approx u(x_i, t_\ell)$

c) $h=0.2$; $c^2=4$, $h^2=0.04=\frac{4}{100} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{4\cdot\tau^2}{0.2^2} = \tau^2 10^2 \leq 1$

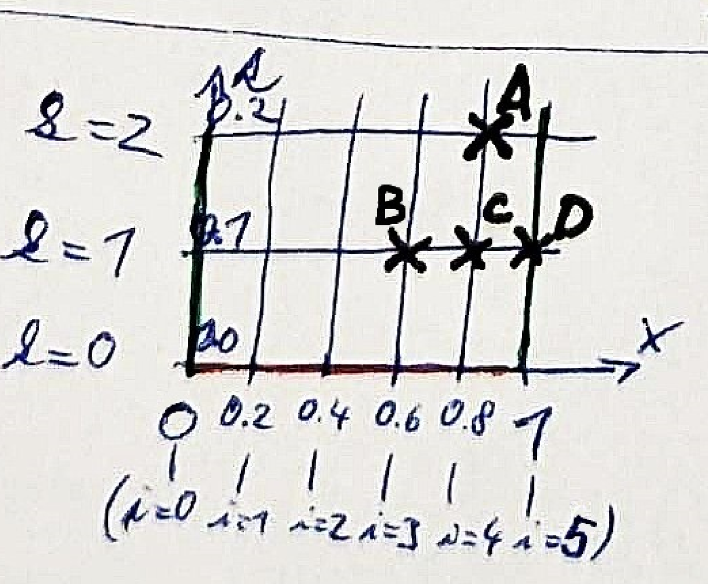
$\frac{\cancel{4}\tau^2}{\frac{\cancel{4}}{100}}$

$\tau \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \tau_{max} = 0.1$

$\Rightarrow \sigma^2 = 1$

---

d) $\underbrace{u(0.8,0.2)}_{A} \cong ?$




1. čas. vr. ($\ell=0$):

$U_3^1 = U_B = \varphi(0.6)+\psi(0.6)\tau = 0.6+(0.6-1)^2\cdot 0.1 = 0.616$

$U_4^1 = U_C = \varphi(0.8)+\psi(0.8)\tau = 0.8+(0.8-1)^2\cdot 0.1 = 0.804$

$U_5^1 = U_D = \beta(0.1) = 0.1^2+1 = 1.01$

2. čas. vr. ($\ell=1$):

$\varphi(0.8)=0.8$

$U_4^2 = U_A = \sigma^2 U_D + 2(1-\sigma^2)U_C + \sigma^2 U_B - \underbrace{U_4^0}_{0.8} + \tau^2 \underbrace{f_C}_{f(0.8,0.1)}$

$U_A = 1^2\cdot 1.01 + \underbrace{2(\overset{0}{1-1})\cdot 0.804}_{0} + 1^2\cdot 0.616 - 0.8 + 0.1^2(\underbrace{-0.8-0.1}_{-0.9})$

$U_A = 1.01+0.616-0.8-0.009$

$$u(0.8,0.2) \approx U_A = 0.817$$

**Př.:** $u_{tt} = 100\,u_{xx} + 10$

$\downarrow$ $c^2 = 100$ $\quad \downarrow$ $f = 10$

BC: $u(0,t) = 0 = \alpha(t)$

$(t \geq 0)$ $\quad u(1,t) = 0.5 = \beta(t)$

IC: $u(x,0) = ax^2 + b = \varphi(x)$

$(x \in \langle 0,1 \rangle)$ $\quad u_t(x,0) = 0 = \psi(x)$

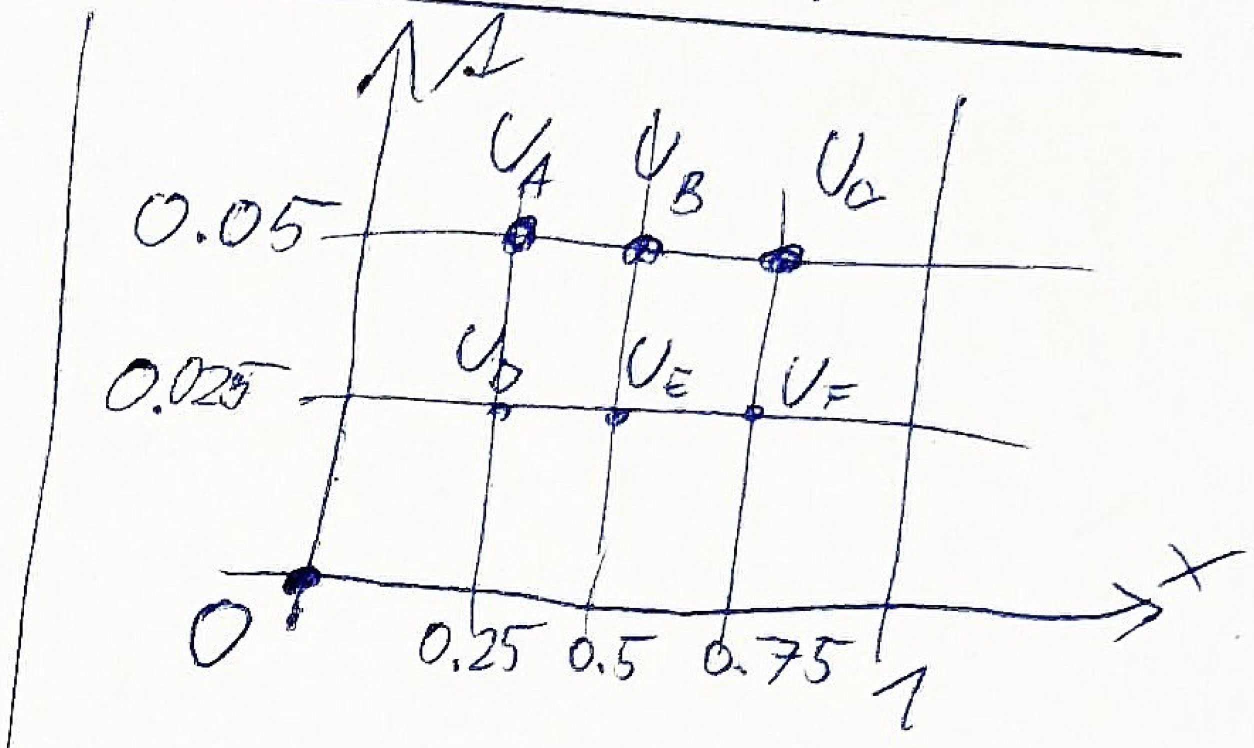
$h = 0.25$, IMPLIC. SCH.

a) OVĚŘIT PODM. SOUHLASU A URČIT $a, b$

b) PODM. STAB. pro $\tau = 0.025$

c) NÁHRADA PRO 1. ČAS. VR.

d) NÁHRADA PRO 2. ČAS. VR.




---

a) $\alpha(0) = \varphi(0)$ $\quad\quad \beta(0) = \varphi(1)$

$0 = a \cdot 0^2 + b \Rightarrow \underline{b = 0}$ ✓ $\quad 0.5 = a \cdot 1 + b \Rightarrow \underline{a = 0.5}$ ✓ $\Rightarrow \boxed{\varphi(x) = 0.5x^2}$

$\alpha_t(0) = \psi(0)$ $\quad\quad \beta_t(0) = \psi(1)$

$0 = 0$ ✓ $\quad\quad 0 = 0$ ✓

PODM. SOUHL. SPLNĚNY

b) IMPL. SCH. JE VŽDY STABILNÍ

c) $U_D = \varphi(0.25) + \psi(0.25) \cdot 0.025 = 0.5 \cdot 0.25^2 + 0 \doteq \underline{\underline{0.031}}$

$U_E = \varphi(0.5) + \psi(0.5) \cdot 0.025 = 0.5 \cdot 0.5^2 + 0 = \underline{\underline{0.125}}$

$U_F = \varphi(0.75) + \psi(0.75) \cdot 0.025 = 0.5 \cdot 0.75^2 + 0 \doteq \underline{\underline{0.281}}$

$\alpha(0.05) = 0$

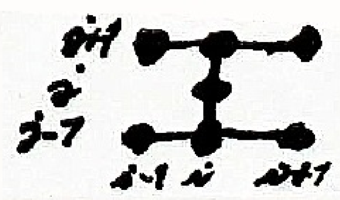
$\alpha(0) = 0$

$\beta(0.05) = 0.5$

$\beta(0) = 0$

d) $\sigma^2 = \dfrac{100 \cdot 0.025^2}{0.25^2} = 1$

$-\frac{1}{2}\sigma^2 U_{i-1}^{k+1} + (1+\sigma^2) U_i^{k+1} - \frac{1}{2}\sigma^2 U_{i+1}^{k+1} = \frac{1}{2}\sigma^2 U_{i-1}^{k-1} - (1+\sigma^2) U_i^{k-1} + \frac{1}{2}\sigma^2 U_{i+1}^{k-1} + 2U_i^k + \tau^2 f_i^k$




A: $\underbrace{-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \alpha(0.05)}_{0} + (1+1) U_A - \frac{1}{2} \cdot 1\, U_B = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \alpha(0)}_{0} - \underbrace{(1+1)\varphi(0.25)}_{\doteq 0.063} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \varphi(0.5)}_{\doteq 0.063} + \underbrace{2 \cdot U_D}_{\doteq 0.062} + \underbrace{0.025^2 f(0.25, 0.025)}_{\doteq 0.006}$ $\quad (f = 10)$

$\boxed{2U_A - \frac{1}{2}U_B \doteq 0.194}$

stejné

B: $-\frac{1}{2}U_A + 2U_B - \frac{1}{2}U_C = \underbrace{\frac{1}{2}\varphi(0.25)}_{\doteq 0.031} - \underbrace{2\varphi(0.5)}_{0.25} + \underbrace{\frac{1}{2}\varphi(0.75)}_{\doteq 0.141} + \underbrace{2U_E}_{0.25} + 0.06$

$\boxed{-\frac{1}{2}U_A + 2U_B - \frac{1}{2}U_C = 0.232}$

stejné

C: $-\frac{1}{2}U_B + 2U_C - \underbrace{\frac{1}{2}\beta(0.05)}_{0.25} = \underbrace{\frac{1}{2}\varphi(0.5)}_{\doteq 0.063} - \underbrace{2\varphi(0.75)}_{\doteq 0.563} + \underbrace{\frac{1}{2}\beta(0)}_{=0} + \underbrace{2U_F}_{\doteq 0.562} + 0.06$

$\boxed{-\frac{1}{2}U_B + 2U_C \doteq 0.372}$