Plošný integrál skalární funkce

Předpokládáme, že

- σ je jednoduchá hladká plocha
- $P(u,v) = [\,x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)]$ je parametrizace σ na $B \subset E_2$
- f je definovaná a omezená na σ

Plošný integrál f na σ definujeme jako

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\, dp \equiv \iint\limits_{B} f(P(u,v)) \cdot \|P_u(u,v) \times P_v(u,v)\|\, du\, dv \ ,$$

pokud integrál vpravo existuje. Tento integrál nezávisí na orientaci plochy.

Mechanické charakteristiky

- hmotnost: $m = \iint\limits_{\sigma} \rho(x,y,z)\, dp \quad \ldots \quad \rho(x,y,z)$ je plošná hustota [kg/m^2]
- statický moment vzhledem k rov. xy: $m_{xy} = \iint\limits_{\sigma} z\, \rho(x,y,z)\, dp$,

  podobně $m_{yz} = \iint\limits_{\sigma} x\, \rho(x,y,z)\, dp$, $\quad m_{xz} = \iint\limits_{\sigma} y\, \rho(x,y,z)\, dp$,
- moment setrvačnosti vzhledem k rov. xy: $J_{xy} = \iint\limits_{\sigma} z^2\, \rho(x,y,z)\, dp$,

  podobně $J_{yz} = \iint\limits_{\sigma} x^2\, \rho(x,y,z)\, dp$, $\quad J_{xz} = \iint\limits_{\sigma} y^2\, \rho(x,y,z)\, dp$,

  moment setrvačnosti vzhledem k ose x: $J_x = \iint\limits_{\sigma} (y^2+z^2)\, \rho(x,y,z)\, dp$,

  podobně $J_y = \iint\limits_{\sigma} (x^2+z^2)\, \rho(x,y,z)\, dp$, $\quad J_z = \iint\limits_{\sigma} (x^2+y^2)\, \rho(x,y,z)\, dp$,

Příklad 12.1

Vypočítejte integrál $\iint\limits_\sigma x^2+y^2\,dp$, kde $\sigma = \{[x,y,z] \in E_3 : z = 4-\sqrt{x^2+y^2},\ 0 \le z \le 2\}$.

Řešení:

σ je část kuželové plochy s vrcholem $[0,0,4]$, seříznutá rovinami $z=0$ a $z=2$ (představuje plášť komolého kužele). Můžeme ji parametrizovat jako graf funkce:

$P(x,y) = [\,x,\ y,\ 4-\sqrt{x^2+y^2}\,]$

$B:\ 0 \le z \le 2 \quad \Rightarrow \quad 0 \le 4-\sqrt{x^2+y^2} \le 2 \quad \Rightarrow \quad 4 \ge \sqrt{x^2+y^2} \ge 2$

$P_x = (1,\ 0,\ -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$

$P_y = (0,\ 1,\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$

$$P_x \times P_y = \left(\begin{vmatrix} 0 & -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 & -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 1 & -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1 \right)$$

$$\|P_x \times P_y\| = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+1} = \sqrt{2}$$

$$\iint\limits_\sigma x^2+y^2\,dp = \iint\limits_B \underbrace{(x^2+y^2)}_{f(P(x,y))} \cdot \underbrace{\|P_x \times P_y\|\,dx\,dy}_{dp} = \iint\limits_B (x^2+y^2)\sqrt{2}\,dx\,dy \left| \begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ 2 \le r \le 4 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ dxdy \to r\,drd\varphi \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_2^4 r^2 \cdot \sqrt{2} \cdot r\,drd\varphi = 2\pi\sqrt{2}\int_2^4 r^3\,dr = 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_2^4 = 2\pi\sqrt{2}\,(4^3-4) = 120\pi\sqrt{2}$$

Mohli jsme také zvolit parametrizaci pomocí cylindrických souřadnic jako cv.11.2, str. 4:

$P(r,\varphi) = [r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 4-r]\quad,\qquad B:\ r \in < 2,4 >,\ \varphi \in < 0,2\pi >$

$P_r = (\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ -1), \qquad P_\varphi = (-r\sin\varphi,\ r\cos\varphi,\ 0)$

$$P_r \times P_\varphi = \left(\begin{vmatrix} \sin\varphi & -1 \\ r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} \cos\varphi & -1 \\ -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} \right) = (-r\cos\varphi,\ -r\sin\varphi,\ r)$$

$$\|P_r \times P_\varphi\| = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + r^2} = r\sqrt{2}$$

$$\iint\limits_\sigma x^2+y^2\,dp = \iint\limits_B \underbrace{r^2}_{f(P(r,\varphi))} \cdot \underbrace{\|P_r \times P_\varphi\|\,dr\,d\varphi}_{dp} = \int_0^{2\pi}\int_2^4 r^2\,r\sqrt{2}\,dr\,d\varphi = \ \dots\ = 120\pi\sqrt{2}$$

Příklad 12.2

Určete obsah plochy σ, která je zadaná podmínkami $z = x^2 + y^2,\ z \leq 1$ a její normála svírá tupý úhel s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Řešení:

Výpočet provedeme pro oba výše uvedené způsoby parametrizace této plochy (cv. 11.2, str. 2 a 4):

1. parametrizace jako funkce $z = f(x, y)$

$P(u, v) = [u,\ v,\ u^2 + v^2], \quad B : u^2 + v^2 \leq 1, \quad P_u = (1,\ 0,\ 2u), \quad P_v = (0,\ 1,\ 2v)$

$$P_u \times P_v = \left(\begin{vmatrix} 0 & 2u \\ 1 & 2v \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2u \\ 0 & 2v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-2u, -2v, 1), \quad \|P_u \times P_v\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$$

$$S = \iint\limits_{\sigma} 1\, dp = \iint\limits_{B} 1 \cdot \underbrace{\|P_u \times P_v\|\, du\, dv}_{dp} = \iint\limits_{B} \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}\ du\, dv \ \left| \begin{array}{c} u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ dudv \to r\, dr d\varphi \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr d\varphi = 2\pi \int\limits_0^1 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr \left| \begin{array}{c} t = 4r^2 + 1 \\ dt = 8r\, dr \\ 0 \to 1 \\ 1 \to 5 \end{array} \right| = 2\pi \int\limits_1^5 \sqrt{t}\, \frac{1}{8}\, dt = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} \left[t^{\frac{3}{2}} \right]_1^5 =$$

$$= \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$$

2. parametrizace pomocí cylindrických souřadnic

$P(r, \varphi) = [r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ r^2]\ , \quad B :\ r \in <0, 1>,\ \varphi \in <0, 2\pi>$

$P_r = (\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 2r), \quad P_\varphi = (-r\sin\varphi,\ r\cos\varphi,\ 0)$

$$P_r \times P_\varphi = \left(\begin{vmatrix} \sin\varphi & 2r \\ r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \cos\varphi & 2r \\ -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} \right) = (-2r^2\cos\varphi,\ -2r^2\sin\varphi,\ r)$$

$$\|P_r \times P_\varphi\| = \sqrt{4r^4\cos^2\varphi + 4r^4\sin^2\varphi + r^2} = r\sqrt{4r^2 + 1}$$

$$S = \iint\limits_{\sigma} 1\, dp = \iint\limits_{B} 1 \cdot \underbrace{\|P_u \times P_v\|\, du\, dv}_{dp} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 \sqrt{4r^2 + 1}\ r\, dr d\varphi = \ldots\ = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$$

Příklad 12.3

Určete obsah plochy $\sigma = \{[x, y, z] \in E_3 : x^2 + z^2 = 4,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 4, z > 0\}$.

Řešení: z můžeme vyjádřit jako funkci x a y:

$P(x, y) = [x,\ y,\ \sqrt{4 - x^2}]$, $\quad B:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 4$

$P_x = (1,\ 0,\ \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}), \quad P_y = (0,\ 1,\ 0)$

$$P_x \times P_y = \left(\begin{vmatrix} 0 & \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},\ 0,\ 1 \right)$$

$$\|P_x \times P_y\| = \sqrt{\frac{x^2}{4 - x^2} + 1} = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$S = \iint\limits_\sigma 1\, dp = \iint\limits_B 1 \cdot \underbrace{\|P_x \times P_y\|\, dx\, dy}_{dp} = \int\limits_0^1 \int\limits_0^4 \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dy\, dx = \int\limits_0^4 1\, dy \cdot \int\limits_0^1 \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx =$$

$$= 4 \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{2})^2}}\, dx = 4 \cdot \left[2 \arcsin \frac{x}{2} \right]_0^1 = 8 \left(\arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 \right) = 8 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{4}{3}\pi$$

Příklad 12.4

Odvoďte vzorec pro povrch koule o poloměru R.

Řešení:

Pro povrch koule zvolíme sférické souřadnice:

$x = R \cos\varphi \cos\vartheta$
$y = R \sin\varphi \cos\vartheta$
$z = R \sin\vartheta$

$P(\varphi, \vartheta) = [\,R \cos\varphi \cos\vartheta,\ R \sin\varphi \cos\vartheta,\ R \sin\vartheta\,], \quad B:\ \varphi \in < 0, 2\pi >,\ \vartheta \in < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$

$P_\varphi = (-R \sin\varphi \cos\vartheta,\ R \cos\varphi \cos\vartheta,\ 0\,)$
$P_\vartheta = (-R \cos\varphi \sin\vartheta,\ -R \sin\varphi \sin\vartheta,\ R \cos\vartheta\,)$

$P_\varphi \times P_\vartheta = (\,R^2 \cos\varphi \cos^2\vartheta,\ R^2 \sin\varphi \cos^2\vartheta,\ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta)$

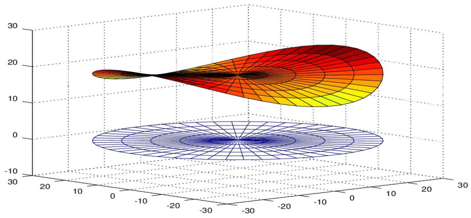
$\|P_\varphi \times P_\vartheta\| = R^2 \sqrt{\cos^2\varphi \cos^4\vartheta + \sin^2\varphi \cos^4\vartheta + \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta} =$

$= R^2 \sqrt{\cos^2\vartheta} = R^2 \cos\vartheta$

$$S = \iint\limits_\sigma 1\, dp = \iint\limits_B 1 \cdot \underbrace{\|P_\varphi \times P_\vartheta\|\, d\varphi\, d\vartheta}_{dp} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos\vartheta\, d\vartheta d\varphi = 2\pi\, R^2 [\sin\vartheta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi R^2$$

Příklad 12.5

Odhadněte hmotnost střechy budovy podobné budějovické plovárně: předpokládejte, že půdorys budovy je kružnice o poloměru 30 m a střecha má tvar hyperbolického paraboloidu, který můžeme popsat rovnicí $z = 0.02\,(x^2 - y^2) + 18$. Obrázek vpravo představuje střechu budovy nad jejím půdorysem. Uvažujte plechovou střešní krytinu o plošné hustotě $\rho(x,y,z) = 6$ [kg/m^2] - odpovídá ocelovému plechu tloušťky 0.8 mm (při hustotě oceli $\rho(x,y,z) = 7500$ [kg/m^3]).



Řešení: hmotnost lze počítat jako plošný integrál hustoty: $m = \iint_\sigma \rho(x,y,z)\,dp$

Použijeme standardní parametrizaci funkce $z = f(x,y)$:

$P(x,y) = [x,\ y,\ 0.02\,(x^2 - y^2) + 18]\quad ,\qquad B:\ x^2 + y^2 \le 30^2$

$P_x = (1,\ 0,\ 0.04\,x)$

$P_y = (0,\ 1,\ 0.04\,y)$

$$P_x \times P_y = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0.04\,x \\ 1 & 0.04\,y \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 1 & 0.04\,x \\ 0 & 0.04\,y \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-0.04\,x,\ -0.04\,y,\ 1)$$

$\|P_x \times P_y\| = \sqrt{0.04^2(x^2 + y^2) + 1}$

$$m = \iint_\sigma \rho(x,y,z)\,dp = \iint_B 6 \cdot \underbrace{\|P_x \times P_y\|\,dx\,dy}_{dp} = 6 \iint_B \sqrt{0.04^2(x^2+y^2)+1}\,dx\,dy \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ 0 \le r \le 30 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ dxdy \to r\,drd\varphi \end{array} \right| =$$

$$= 6 \int_0^{2\pi} \int_0^{30} \sqrt{0.04^2\,r^2 + 1}\ r\,drd\varphi = 12\pi \int_0^{30} \sqrt{0.04^2\,r^2 + 1}\ r\,dr \left| \begin{array}{c} t = 0.04^2\,r^2 + 1 \\ dt = 0.04^2 2r\,dr \\ 0 \to 1 \\ 30 \to 2.44 \end{array} \right| =$$

$$= 12\pi \int_1^{2.44} \sqrt{t}\,\frac{1}{0.04^2 \cdot 2}\,dt = 6\pi \frac{1}{0.04^2} \cdot \frac{2}{3} \left[t^{\frac{3}{2}} \right]_1^{2.44} = \ldots \text{ kalkulačka} \ldots\ = 22\,081 \text{ [kg]}$$

orientační kontrola: hmotnost rovné střechy by byla $\rho \cdot \pi r^2 = 6 \cdot 3.14 \cdot 30^2$, tj. asi 17 000

Příklad 12.6

Určete hmotnost desky σ o hustotě $\rho(x,y,z) = z$ zadané jako
$\sigma = \{[x,y,z] \in E_3 : x + 2y + z = 2,\ 0 \le x,\ 0 \le y,\ 0 \le z\}$.

Řešení: jde o trojúhelník v prvním oktantu, z můžeme vyjádřit jako funkci x a y:

$P(x,y) = [x,\ y,\ 2 - x - 2y]$, $\quad B:\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1 - \frac{x}{2}$

$P_x = (1,\ 0,\ -1), \quad P_y = (0,\ 1,\ -2)$

$$P_x \times P_y = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1,\ 2,\ 1),\ \|P_x \times P_y\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$m = \iint_\sigma \rho(x,y,z)\,dp = \iint_\sigma z\,dp = \iint_B \underbrace{(2 - x - 2y)}_{f(P(x,y))} \cdot \underbrace{\|P_x \times P_y\|\,dx\,dy}_{dp} =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{1-\frac{x}{2}} (2-x-2y)\,\sqrt{6}\,dy\,dx = \sqrt{6}\int_0^2 [2y - xy - y^2]_{y=0}^{1-\frac{x}{2}}\,dx = \sqrt{6}\int_0^2 2(1-\frac{x}{2}) - x(1-\frac{x}{2}) - (1-\frac{x}{2})^2\,dx =$$

$$= \sqrt{6}\int_0^2 (1 - \frac{x}{2})^2\,dx = \sqrt{6}\int_0^2 1 - x + \frac{x^2}{4}\,dx = \sqrt{6}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

Příklad 12.7

Vypočítejte moment setrvačnosti vzhledem k rov. yz válcové plochy σ zadané jako
$\sigma = \{[x,y,z] \in E_3 : x^2 + y^2 = 4,\ 0 \le z \le 3\}$. Hustota $\rho(x,y,z) = z$.

Řešení: použijeme cylindrické souřadnice

$P(\varphi, z) = [2\cos\varphi,\ 2\sin\varphi,\ z]$, $\quad B:\ \varphi \in <0, 2\pi>,\ z \in <0, 3>$

$P_\varphi = (-2\sin\varphi,\ 2\cos\varphi,\ 0), \quad P_z = (\ \ 0, \quad\quad 0, \quad 1)$

$$P_\varphi \times P_z = \left(\begin{vmatrix} 2\cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} -2\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -2\sin\varphi & 2\cos\varphi \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2\cos\varphi, 2\sin\varphi, 0)$$

$\|P_\varphi \times P_z\| = \sqrt{2^2} = 2 \neq 0$

$$J_{yz} = \iint_\sigma x^2\,\rho(x,y,z)\,dp = \iint_\sigma x^2\,z\,dp = \iint_B \underbrace{4\cos^2\varphi\,z}_{f(P(\varphi,z))} \cdot \underbrace{\|P_\varphi \times P_z\|\,d\varphi\,dz}_{dp} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 4\cos^2\varphi\,z \cdot 2\,d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^3 2\,(\cos 2\varphi + 1)\,2z\,d\varphi\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\cos 2\varphi + 2\,d\varphi \cdot \int_0^3 2z\,dz = [\sin 2\varphi + 2\varphi]_0^{2\pi} \cdot [z^2]_0^3 = 4\pi \cdot 9 = 36\pi$$