Plošný integrál vektorové funkce

Předpokládáme, že

- σ je jednoduchá p. č. hladká plocha
- $\vec{f}$ je definovaná a omezená na σ
- $\vec{n}$ je jednotkový vektor normály k σ (ukazuje směr orientace plochy)

Plošný integrál $\vec{f}$ na σ definujeme jako

$$\iint_\sigma \vec{f}(x,y,z)\,d\vec{p} \;=\iint_\sigma \vec{f}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)\,dp$$

pokud integrál vpravo existuje.

Jestliže $P(u,v) = [\,x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)]$ je parametrizace σ na $B \subset E_2$ **souhlasná** s orientací plochy σ, platí $\vec{n}(x,y,z) = \frac{P_u(u,v)\times P_v(u,v)}{\|P_u(u,v)\times P_v(u,v)\|}$, stručně $\vec{n} = \frac{P_u\times P_v}{\|P_u\times P_v\|}$, takže

$$\iint_\sigma \vec{f}\cdot\vec{n}\,dp = \iint_B \vec{f}(P(u,v))\cdot\frac{P_u(u,v)\times P_v(u,v)}{\|P_u(u,v)\times P_v(u,v)\|}\;\underbrace{\|P_u(u,v)\times P_v(u,v)\|\,du\,dv}_{dp} =$$

$$= \iint_B \vec{f}(P(u,v))\cdot(P_u(u,v)\times P_v(u,v))\,du\,dv\ ,$$

a můžeme tedy psát zkráceně

$$\iint_\sigma \vec{f}(x,y,z)\,d\vec{p} \;= \iint_B \vec{f}(P(u,v))\cdot(P_u(u,v)\times P_v(u,v))\,du\,dv\ .$$

Je-li parametrizace nesouhlasná (opačná), je $\vec{n} = -\frac{P_u\times P_v}{\|P_u\times P_v\|}$ a před integrál vpravo musíme psát minus.

© Certik

Příklad 12.8

Určete tok pole $\vec{f} = (z,\ y,\ 3x)$ plochou
$\mathcal{Q} = \{\ [x, y, z] \in E_3 :\ x + 2y + z = 6,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \}$,
jejíž normála svírá s $\vec{k} = (0, 0, 1)$ tupý úhel.

Řešení: tok určíme jako plošný integrál $\vec{f}$ na ploše $\mathcal{Q}$.
Plochu lze popsat jako graf funkce $z = 6 - x - 2y$, parametrizujeme ji standardně jako

$P(x, y) = [x,\ y,\ 6 - x - 2y\,],\ \ ,\quad [x, y] \in B :\ x \in < 0, 6 >,\ 0 \leq y \leq 3 - \frac{x}{2}$

$P_x = (1,\ 0,\ -1)$

$P_y = (0,\ 1,\ -2)$

$$P_x \times P_y = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix},\ - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1,\ 2,\ 1)$$

$(P_x \times P_y) \cdot \vec{k} = (1,\ 2,\ 1) \cdot (0, 0, 1) = 1 > 0 \quad \Rightarrow$ parametrizace je nesouhlasná

$$\text{tok} = \iint_{\mathcal{Q}} \vec{f}\, d\vec{p} = \iint_{\mathcal{Q}} (z,\ y,\ 3x)\, d\vec{p} = \boxed{-} \iint_B \underbrace{(6 - x - 2y,\ y,\ 3x)}_{\vec{f}(P(x,y))} \cdot \underbrace{(1,\ 2,\ 1)}_{P_x \times P_y}\, dxdy =$$

$$= - \iint_B 6 - x - 2y + 2y + 3x\ dxdy = - \int_0^6 \int_0^{3-\frac{x}{2}} 6 + 2x\ dy\, dx =$$

$$= - \int_0^6 6 + 2x \int_0^{3-\frac{x}{2}} 1\ dy\, dx = - \int_0^6 (6 + 2x) \cdot (3 - \frac{x}{2})\, dx =$$

$$= \int_0^6 x^2 - 3x - 18\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} - 18x \right]_0^6 = \ldots\ = -90$$

záporný výsledek znamená, že tok je proti směru normály

© Certik

Příklad 12.9

Určete tok pole $\vec{f} = (x,\ y,\ z)$ plochou $\mathcal{Q} = \{\ [x,y,z] \in E_3 :\ z = x^2 + y^2,\ z \leq 4,\ \}$, jejíž normála svírá s $\vec{k} = (0,0,1)$ ostrý úhel.

Řešení: tok určíme jako plošný integrál $\vec{f}$ na ploše $\mathcal{Q}$.
Plocha je dána jako graf funkce $z = x^2 + y^2$, parametrizujeme ji standardně jako

$P(x,y) = [x,\ y,\ x^2 + y^2\,],\ \ ,\quad [x,y] \in B :\ x^2 + y^2 \leq 4$

$P_x = (1,\ 0,\ 2x), \quad P_y = (0,\ 1,\ 2y)$

$$P_x \times P_y = \left(\begin{vmatrix} 0 & 2x \\ 1 & 2y \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 2y \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-2x,\ -2y,\ 1)$$

$(P_x \times P_y) \cdot \vec{k} = (-2x,\ -2y,\ 1) \cdot (0,0,1) = 1 > 0 \quad \Rightarrow$ parametrizace je souhlasná

$$\text{tok} = \iint_{\mathcal{Q}} \vec{f}\, d\vec{p} = \iint_{\mathcal{Q}} (x,\ y,\ z)\, d\vec{p} = \iint_{B} \underbrace{(x,\ y,\ x^2 + y^2)}_{\vec{f}(P(x,y))} \cdot \underbrace{(-2x,\ -2y,\ 1)}_{P_x \times P_y}\, dxdy =$$

$$= \iint_{B} -2x^2 - 2y^2 + x^2 + y^2\ dxdy = \iint_{B} -x^2 - y^2\ dxdy \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ \varphi \in < 0, 2\pi > \\ r \in < 0, 2 > \\ dxdy \to r\, dr d\varphi \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} -r^2 \cdot r\ d\varphi\, dr = 2\pi \int_0^2 -r^3\ dr = -2\pi\ \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 = -8\pi$$

Příklad 12.10

Určete tok pole $\vec{f} = (x,\ y,\ z)$ povrchem tělesa $K = \{[x,y,z] \in E_3 :\ x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$ směrem dovnitř.

Řešení: tok spodní části povrchu už jsme spočítali v předchozím příkladu, musíme přičíst ještě tok "víčkem", které taky parametrizujeme jako graf funkce:

$P(x,y) = [x,\ y,\ 4\,],\ \ ,\quad [x,y] \in B :\ x^2 + y^2 \leq 4$

$P_x = (1,\ 0,\ 0), \quad P_y = (0,\ 1,\ 0)$

$$P_x \times P_y = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0,\ 0,\ 1) = -\vec{n}$$

$\Rightarrow$ parametrizace je nesouhlasná (směrem dovnitř tělesa je $\vec{n} = -\vec{k}$)

$$\text{tok} = \iint_{\mathcal{Q}} \vec{f}\, d\vec{p} = \iint_{\mathcal{Q}} (x,\ y,\ z)\, d\vec{p} = -\iint_{B} \underbrace{(x,\ y,\ 4)}_{\vec{f}(P(x,y))} \cdot \underbrace{(0,\ 0,\ 1)}_{P_x \times P_y}\, dxdy = -4 \cdot \pi \cdot 2^2 = -16\pi$$

Tok povrchem tělesa je součtem toků přes obě části povrchu: $-8\pi - 16\pi = -24\pi$.

© Certik

Příklad 12.11

Určete tok pole $\vec{f} = (z,\ x^2+y^2,\ 1)$ plochou
$\sigma = \{\ [x,y,z] \in E_3 :\ x^2+y^2 = 9,\ 0 \le z \le 2\},\ \ \vec{n}(3,0,0) = (-1,0,0).$

Řešení: tok určíme jako plošný integrál $\vec{f}$ na ploše σ.

$P(\varphi, z) = [3\cos\varphi,\ 3\sin\varphi,\ z\,],\qquad [\varphi, z] \in B :\ \varphi \in <0, 2\pi>,\ z \in <0, 2>$

$P_\varphi = (-3\sin\varphi,\ 3\cos\varphi,\ 0),$

$P_z = (\ \ 0,\ \ \ \ \ \ 0,\ \ \ \ \ 1)$

$$P_\varphi \times P_z = \left(\begin{vmatrix} 3\cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} -3\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -3\sin\varphi & 3\cos\varphi \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (3\cos\varphi, 3\sin\varphi, 0)$$

$[3,0,0] = P(0,0),\qquad (P_\varphi \times P_z)|_{(0,0)} = (3\cos 0,\ 3\sin 0,\ 0) = (3,0,0)$

$\Rightarrow$ parametrizace je nesouhlasná

$$\text{tok} = \iint\limits_{Q} \vec{f}\, d\vec{p} = \iint\limits_{Q} (z,\ x^2+y^2,\ 1)\, d\vec{p} = -\iint\limits_{B} \underbrace{(z,\ 9,\ 1)}_{\vec{f}(P(\varphi,z))} \cdot \underbrace{(3\cos\varphi, 3\sin\varphi, 0)}_{P_\varphi \times P_z}\, d\varphi\, dz =$$

$$= -3 \iint\limits_{B} z\cos\varphi + 9\sin\varphi\ d\varphi\, dz = -3 \int_0^2 \int_0^{2\pi} z\cos\varphi + 9\sin\varphi\ d\varphi\, dz =$$

$$= -3 \int_0^2 [z\sin\varphi - 9\cos\varphi\ ]_{\varphi=0}^{2\pi}\, dz = -3 \int_0^2 0\, dz = 0$$

© Certik