Implicitní funkce dvou proměnných $F(x, y, z) = 0$ (skripta I.7.5)

Věta o implicitní funkci

Předpokládáme, že

- $F(P) = 0$, kde $P = [x_0, y_0, z_0]$
- $F(x, y, z)$ má spojité parciální derivace v nějakém okolí bodu P
- $\dfrac{\partial F}{\partial z}(P) \neq 0$

Potom existují čísla $\delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ a jediná funkce $z = f(x, y)$ definovaná v okolí $\mathcal{U}_\delta(A)$ bodu $A = [x_0, y_0]$, pro kterou platí

- $z_0 = f(A)$
- $\forall\ [x, y] \in \mathcal{U}_\delta(A) :\ z = f(x, y) \in (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon) \quad \text{a} \quad F(x, y, f(x, y)) = 0$
- funkce $f(x, y)$ je spojitá a má spojité paarciální derivace v okolí $\mathcal{U}_\delta(A)$
- $\forall\ [x, y] \in \mathcal{U}_\delta(A)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = -\frac{\partial F}{\partial x}(P) \Bigg/ \frac{\partial F}{\partial z}(P), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(A) = -\frac{\partial F}{\partial y}(P) \Bigg/ \frac{\partial F}{\partial z}(P)$$

Má-li funkce $F(x, y, z)$ spojité i druhé parciální derivace, má také funkce $f(x, y)$ v okolí $\mathcal{U}_\delta(A)$ spojité druhé parciální derivace.

Příklad 13.1 Ilustrace funkce dvou proměnných zadané implicitně:
$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ ... rovnice popisuje povrch koule o poloměru 3
Kde tuto plochu můžeme vyjádřit jako graf funkce $z = f(x, y)$ dvou proměných?

Řešení:
Tento jednoduchý příklad umíme vyřešit explicitně: v okolí každého bodu $P = [x_0, y_0, z_0]$ takového, že $F(P) = 0$ a $z_0 \neq 0$, je
buď $z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ (pro $z_0 > 0$),
nebo $z = f(x, y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ (pro $z_0 < 0$).

Příklad 13.2
Ověřte,že vztahem $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ je definovaná implicitně funkce $z = f(x, y)$ v okolí bodu $P = [1, 2, 2]$. Potom označte $A = [1, 2]$ a
a) určete grad $f(A)$,
b) určete $\dfrac{\partial f}{\partial s}(A)$ pro $s = (-2, 3)$,
c) napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě dotyku P.

Řešení:
Nejdřív ověříme předpoklady věty o implicitní funkci:

- $F(P) = F(1, 2, 2) = 1^2 + 2^2 + 2^2 - 9 = 0$
- $F(x, y, z)$ má spojité parciální derivace v E_3
- $\dfrac{\partial F}{\partial z}(P) = 2z|_P = 4 \neq 0$

- předpoklady jsou v bodě P splněny a tedy platí tvrzení věty.

a) $\dfrac{\partial F}{\partial x}(P) = 2x|_P = 2, \quad \dfrac{\partial F}{\partial y}(P) = 2y|_P = 4$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = -\frac{\partial F}{\partial x}(P) \Big/ \frac{\partial F}{\partial z}(P) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(A) = -\frac{\partial F}{\partial y}(P) \Big/ \frac{\partial F}{\partial z}(P) = -\frac{4}{4} = -1$$

grad $f(A) = (-\frac{1}{2},\ -1)$

Porovnání s př. 13.1: $z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \tfrac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}|_{[1,2]} = -\tfrac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A) = \tfrac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}|_{[1,2]} = -1$$

b) $$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \text{grad } f \cdot \frac{s}{\|s\|} = (-\frac{1}{2},\ -1) \cdot \frac{(-2,3)}{\sqrt{4+9}} = \frac{1-3}{\sqrt{13}} = \frac{-2}{\sqrt{13}}$$

c) Rovnice tečné roviny:

$$z = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)\,(y - y_0)$$

$$z = 2 - \frac{1}{2} \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-2)$$

Rovnice normály:

$X = P + t\,\vec{n}, \quad \vec{n} = \text{grad } F(p) = (2,4,4)$

$x = 1 + 2t$

$y = 2 + 4t$

$z = 2 + 4t$

Příklad 13.3

Ověřte,že vztahem $F(x,y,z) = z^3 + 3x^2 z - 2xy = 0$ je definovaná implicitně funkce $z = f(x,y)$ v okolí bodu $P = [-1,-2,1]$.Označte $A = [-1,-2]$ a

a) určete grad $f(A)$,

b) kterým směrem f v bodě A neroste ani neklesá,

c) napište rovnici tečné roviny ke grafu f v bodě dotyku P.

Řešení:

Nejdřív ověříme předpoklady věty o implicitní funkci:

- $F(P) = F(-1,-2,1) = 1 + 3 - 2 \cdot (-2) \cdot (-1) = 0$
- $\frac{\partial F}{\partial x} = 6xz - 2y$

  $\frac{\partial F}{\partial y} = -2x$

  $\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + 3x^2 \quad \ldots$ parc. der. jsou spojité v E_3
- $\frac{\partial F}{\partial z}(P) = 3z^2 + 3x^2|_P = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot (-1)^2 = 6 \neq 0$

- předpoklady jsou v bodě P splněny a tedy platí tvrzení věty.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = -\dfrac{\partial F}{\partial x}(P) \Bigg/ \dfrac{\partial F}{\partial z}(P) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = -\dfrac{\partial F}{\partial y}(P) \Bigg/ \dfrac{\partial F}{\partial z}(P) = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

grad $f(A) = (\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3})$

b) f v bodě A neroste ani neklesá ve směru kolmém gradientu, tj. ve směru $s = (1, 1)$ (nebo opačném).

c) Rovnice tečné roviny:

$$z = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)\,(y - y_0)$$

$$z = 1 + \frac{1}{3} \cdot (x + 1) - \frac{1}{3} \cdot (y + 2)$$