Trojný integrál - zobecněné cylindrické souřadnice

Příklad 8.5

Určete hmotnost tělesa M, které má hustotu $\rho(x,y,z) = z$ a tvar poloviny elipsoidu daného nerovnicemi

$$\frac{(x-5)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} + z^2 \le 1\,, \quad z \ge 0\,.$$

$$\widetilde{M}:\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le \sqrt{1 - \frac{(x-5)^2}{a^2} - \frac{(y+1)^2}{b^2}} = \sqrt{1-r^2}\,.$$

$$m = \iiint\limits_M \rho(x,y,z)\ dxdydz = \iiint\limits_M z\ dxdydz \left| \begin{array}{c} x = 5 + ar\cos\varphi \\ y = -1 + br\sin\varphi \\ z = z \\ dxdydz \to ab\,r\,drd\varphi dz \end{array} \right| = \iiint\limits_{\widetilde{M}} z\,ab\,r\,drd\varphi dz \ =^{FV}$$

$$=^{FV} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{\sqrt{1-r^2}} z\,ab\,r\ dz\ dr\ d\varphi = ab\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 r\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-r^2}} dr\ d\varphi = 2\pi\,ab\int\limits_0^1 \frac{(1-r^2)}{2}\ r\,dr =$$

$$= \pi\,ab\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\,\pi\,ab$$

Zobecněné sférické souřadnice

Příklad 8.6

Odvoďte vzorec pro objem elipsoidu W s poloosami $a,\ b,\ c$, tj.

$$W:\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$$

Elipsoid v zobecněných sférických souřadnicích: $\widetilde{W}: 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$

$$V = \iiint\limits_W 1\ dxdydz \left| \begin{array}{c} x = a\,r\cos\varphi\cos\vartheta \\ y = b\,r\sin\varphi\cos\vartheta \\ z = c\,r\sin\vartheta \\ dxdydz \to abc\,r^2\cos\vartheta\,drd\varphi d\vartheta \end{array} \right| = \iiint\limits_{\widetilde{W}} abc\,r^2\cos\vartheta\ drd\varphi d\vartheta \ =^{FV}$$

$$=^{FV} \int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} abc\,r^2\cos\vartheta\ d\vartheta\ d\varphi\ dr = abc\int\limits_0^1 r^2\ dr \cdot \int\limits_0^{2\pi} 1\ d\varphi \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\ d\vartheta =$$

$$= abc\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \cdot 2\pi \cdot [\sin\vartheta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = abc\,\frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot(1-(-1)) = \frac{4}{3}\,\pi\,abc$$

Příklad 8.7

Určete hmotnost tělesa M z př. 8.5 pomocí zobecněných sférických souřadnic, tj. $\rho(x,y,z) = z$,

$$M: \quad \frac{(x-5)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} + z^2 \le 1\,, \quad z \ge 0\,.$$

$$\widetilde{M}:\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\,.$$

$$m = \iiint\limits_M \rho(x,y,z)\ dxdydz = \iiint\limits_M z\ dxdydz \left| \begin{array}{c} x = 5 + a\,r\cos\varphi\cos\vartheta \\ y = -1 + b\,r\sin\varphi\cos\vartheta \\ z = r\sin\vartheta \\ dxdydz \to ab\,r^2\cos\vartheta\,drd\varphi d\vartheta \end{array} \right| =$$

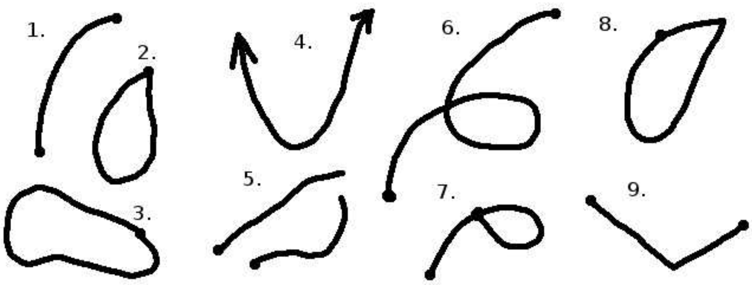
$$= \iiint\limits_{\widetilde{M}} r\sin\vartheta\,ab\,r^2\cos\vartheta\ drd\varphi d\vartheta =^{FV} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin\vartheta\,ab\,r^2\cos\vartheta\ d\vartheta\ d\varphi\ dr =$$

$$= 2\pi\,ab \int\limits_0^1 r^3\ dr \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\ \cos\vartheta\ d\vartheta = 2\pi\,ab\,\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\vartheta}{2} d\vartheta =$$

$$= \pi\,ab\,\frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{\cos 2\vartheta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\,ab\,\frac{1}{2}\,(-\frac{-1}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}\,\pi\,ab$$

Příklad:

Zdůvodněte, které z následujících křivek nelze parametrizovat jako jednoduché hladké křivky.
Počáteční a koncový bod jsou zdůrazněny puntíkem. Šipka značí, že křivka neomezeně pokračuje.



1. až 3. lze, ostatní ne, protože:
4. není omezená
5. není spojitá (nedá se nakreslit "jedním tahem")
6. protíná sebe sama
7. koncový bod splývá s jiným bodem křivky než s počátečním
8. a 9. křivka není hladká (je na ní "zlom")
   – u křivky 2. to nevadí, protože začátek a konec uzavřené křivky nemusí hladce navazovat

Jednoduchá hladká křivka je dána jako obor hodnot **parametrizace**

$P(t) : < a, b > \to E_2$ (resp. E_3)

$P(t) = [x(t), y(t)]$ (resp. $P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$)

Pro funkci $P(t)$ musí platit, že

- je spojitá na $< a, b >$ (a tedy i omezená)
- je prostá na $< a, b >$, s možnou výjimkou $P(a) = P(b)$
- $\dot{P}(t)$ je spojitá, omezená a $\|\dot{P}(t)\| \neq 0$ na (a, b)

Orientace křivky souhlasná s parametrizací je z $P(a)$ do $P(b)$, v opačném směru je nesouhlasná.

Jednoduchá po částech hladká křivka

vznikne pospojováním "navazujících" jednoduchých hladkých křívek
– např. křivky 8. a 9. výše (přesná definice viz skripta)

■ **Parametrizace grafu funkce** $y = f(x)$ nebo $x = f(y)$

- $y = 2x^2 + 3,\ x \in < -1, 3 >\ \ldots\ P(t) = [t,\ 2t^2 + 3],\ t \in < -1, 3 >$
- $y = 2x^2 + 3,\ y \leq 5\ \ldots\ P(t) = [t,\ 2t^2 + 3],\ t \in < -1, 1 >$

  V obou případech $\dot{P}(t) = (1,\ 4t),\ \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{1 + 16\,t^2} \neq 0$

- $x = 2y^2 + 3,\ y \in < -1, 3 >\ \ldots\ P(t) = [2t^2 + 3,\ t],\ t \in < -1, 3 >$
- $x = \text{arctg}\ y,\ y \in < 0, 5 >\ \ldots\ P(t) = [\text{arctg}\ t,\ t],\ t \in < 0, 5 >$

  nebo lze třeba přejít k inverzní funkci:

  $\text{tg}\ x = y,\ x \in < 0, \text{arctg}\ 5 >\ \ldots\ P(t) = [t,\ \text{tg}\ t],\ t \in < 0, \text{arctg}\ 5 >$

Při tomto typu parameterizace grafu funkce nenastane $\|\dot{P}(t)\| = 0$.

■ Parametrizace úsečky z bodu A do bodu B

$\mathbf{X} = \mathbf{A} + t\,(\mathbf{B} - \mathbf{A})$, $t \in < 0, 1 >$

po složkách:

$x = a_x + t\,(b_x - a_x)$
$y = a_y + t\,(b_y - a_y)$
$z = a_z + t\,(b_z - a_z)$ ... ve 3D

Při tomto typu parameterizace úsečky nenastane $\|\dot{P}(t)\| = 0$.

- $\mathbf{A} = [2, -1],\ \mathbf{B} = [3, 2]$

  $\mathbf{B} - \mathbf{A} = (1, 3)$

  $x = \ \ 2 + t \qquad P(t) = [2 + t,\ -1 + 3t],\ t \in < 0, 1 >$
  $y = -1 + 3t \qquad \dot{P}(t) = (1, 3), \quad \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{1 + 3^2} = \sqrt{10} \neq 0$

  Vždycky se vyplatí udělat aspoň rychlou zkoušku počátečního a koncového bodu křivky:
  $\mathbf{A} = P(0) = [2, -1],\ \mathbf{B} = P(1) = [2 + 1,\ -1 + 3] = [3, 2]$.

- $\mathbf{A} = [2, -1, 6],\ \mathbf{B} = [3, 2, -2]$

  $\mathbf{B} - \mathbf{A} = (1, 3, -8)$

  $x = \ \ 2 + t$
  $y = -1 + 3t \qquad P(t) = [2 + t,\ -1 + 3t,\ 6 - 8t],\ t \in < 0, 1 >$
  $z = \ \ 6 - 8t \qquad \dot{P}(t) = (1, 3, -8), \quad \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{1 + 3^2 + (-8)^2} = \sqrt{74} \neq 0$

- parametrizace nikdy není jednoznačná - příklad:

  $\mathbf{A} = [-1, -2],\ \mathbf{B} = [1, 2]$

  $\mathbf{B} - \mathbf{A} = (2, 4)$

  $x = -1 + 2t \qquad P(t) = [-1 + 2t,\ -2 + 4t],\ t \in < 0, 1 >$
  $y = -2 + 4t \qquad \dot{P}(t) = (2, 4), \quad \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} \neq 0$

  nebo:

  $P(t) = [t,\ 2t],\ t \in < -1, 1 >$
  $\dot{P}(t) = (1, 2), \quad \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \neq 0$

  nebo:

  $P(t) = [t^2 - 1,\ 2(t^2 - 1)],\ t \in < 0, \sqrt{2} >$
  $\dot{P}(t) = (2t, 4t), \quad \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{4t^2 + 16t^2} = |t|\,\sqrt{20} \neq 0$ pro $t \in (0, \sqrt{2})$

  následující funkce má sice stejný graf, ale už nepopisuje jednoduchou hl. křivku:
  $P(t) = [t^3,\ 2t^3],\ t \in < -1, 1 >$
  $\dot{P}(t) = (3t^2, 6t^2), \quad \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{9t^4 + 36t^4} = t^2\,\sqrt{45} = 0$ pro $t = 0 \in (-1, 1)$

- změna orientace parametrizace - příklad:

  $y = 3x - 9,\ \ x \in < 1, 3 >$

  Parametrizace úsečky standardně jako funkce:

  $P(t) = [t,\ 4t - 9],\ t \in < 1, 3 >$
  $\dot{P}(t) = (1, 4), \quad \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{1 + 4^2} = \sqrt{17}$

  $P(1) = [1, -5],\ P(3) = [3, 3]$ ... úsečka je parametrizována z bodu $[1, -5]$ do bodu $[3, 3]$

Opačná parametrizace např. takto: $t \to -t, \quad < t_1, t_2 > \to < -t_2, -t_1 >$

$P(t) = [-t,\ -4t - 9],\ t \in < -3, -1 >$
$\dot{P}(t) = (-1, -4), \quad \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{1 + (-4)^2} = \sqrt{17}$

$P(-3) = [3, 3],\ P(-1) = [1, -5] \ldots$ úsečka je parametrizována z bodu $[3, 3]$ do bodu $[-1, 5]$

To není univerzální návod, jak změnit orientaci parametrizace křivek, ale často funguje. Ale obvykle není potřeba měnit parametrizaci křivky - důležité je pouze vědět, jestli použitá parametrizace je *souhlasná* s orientací křivky, nebo *opačná*.

■ Parametrizace kružnice

Kružnice o středu $\mathbf{S} = [s_x, s_y]$ a poloměru R, v kladném směru (proti směru hodinových ručiček):

$x = s_x + R\cos t$
$y = s_y + R\sin t \qquad t \in < t_1, t_2 >$

$P(t) = [s_x + R\cos t,\ s_y + R\sin t] \ , \quad t \in < t_1, t_2 >$

$\dot{P}(t) = (-R\sin t,\ R\cos t), \quad \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R \neq 0$

Příklad

Parametrizujte část kladně orientované kružnice se středem v počátku, z bodu $\mathbf{A} = [-1, 0]$ do bodu $\mathbf{B} = [0, 1]$, a uveďte, jestli parametrizace je souhlasná nebo opačná.

Řešení: kružnice je orientována v kladném směru, tj. její část z $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ představuje tři čtvrtiny kružnice a tečný vektor např. v bodě $\mathbf{A}$ je $\tau = (0, -1)$.

$P(t) = [\cos t,\ \sin t] \ ,\ t \in < -\pi, \frac{\pi}{2} >$

$\dot{P}(t) = (-\sin t,\ \cos t), \quad \|\dot{P}(t)\| = 1$, platí $\mathbf{A} = P(-\pi),\ \dot{P}(-\pi) = (0, -1) = \tau$ – souhlasná orientace.

Příklad

Parametrizujte část záporně orientované kružnice se středem v počátku, z bodu $\mathbf{A} = [-1, 0]$ do bodu $\mathbf{B} = [0, 1]$, a uveďte, jestli parametrizace je souhlasná nebo opačná.

Řešení: kružnice je orientována záporně, tj. její část z $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ představuje čtvrt kružnice a tečný vektor např. v bodě $\mathbf{A}$ je $\tau = (0, 1)$.

$P(t) = [\cos t,\ \sin t] \ ,\ t \in < \frac{\pi}{2}, \pi >$

$\dot{P}(t) = (-\sin t,\ \cos t), \quad \|\dot{P}(t)\| = 1$, platí $\mathbf{A} = P(\pi),\ \dot{P}(\pi) = (0, -1) = -\tau$ – opačná orientace.

■ Ostatní

Příklad

Parametrizujte křivku tvaru dvou závitů pravotočivé šroubovice, která má osu z, výšku závitu a, začíná v bodě $\mathbf{A} = [0, 1, 0]$, končí v bodě $\mathbf{B} = [0, 1, 2a]$.

Řešení: v průmětu do roviny xy bod na křivce dvakrát oběhne kružnici o poloměru 1 v kladném směru, zvolíme tedy

$x = \cos t$
$y = \sin t \qquad t \in < \frac{\pi}{2},\ 4\pi + \frac{\pi}{2} > .$

Zároveň bod rovnoměrně stoupá ve směru osy z od nuly do $2a$, takže $z(t) = p\,t + q$:

$z(\frac{\pi}{2}) = p\,\frac{\pi}{2} + q = 0,$

$z(4\pi + \frac{\pi}{2}) = p\,(4\pi + \frac{\pi}{2}) + q = 2a,$

odečtením první rov. od druhé $p\,4\pi = 2a \ \Rightarrow p = \frac{a}{2\pi}$, dosazením do první rov. $q = -\frac{a}{4}$, tedy

$z(t) = \frac{a}{2\pi}\,t - \frac{a}{4}$

$P(t) = [\cos t,\ \sin t,\ \frac{a}{2\pi}\,t - \frac{a}{4}] \ ,\ t \in < \frac{\pi}{2},\ 4\pi + \frac{\pi}{2} >$

Zkouška krajních bodů: $\mathbf{A} = P(\frac{\pi}{2}) = [\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}, \frac{a}{2\pi}\,\frac{\pi}{2} - \frac{a}{4}] = [0, 1, 0]$, podobně $\mathbf{B}$.