Křivkový integrál vektorové funkce

Předpokládáme, že

- $\mathcal{C}$ je jednoduchá hladká křivka
- $\vec{f}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ je definovaná a omezená na $\mathcal{C}$
- $\vec{\tau}(x,y) = (\tau_1(x,y), \tau_2(x,y))$ je jednotkový tečný vektor podél $\mathcal{C}$

Křivkový integrál $\vec{f}$ podél $\mathcal{C}$ definujeme jako

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{f}\, d\vec{s} \;\equiv\; \int\limits_{\mathcal{C}} \vec{f}\cdot\vec{\tau}\; ds\,,$$

pokud integrál vpravo existuje. Podobně v R^3.

Jestliže $P(t) = [x(t), y(t)]$ je parametrizace $\mathcal{C}$ na $< a, b >$ **souhlasná** s orientací křivky $\mathcal{C}$, platí $\vec{\tau}(x,y) = \frac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|}$,

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{f}\cdot\vec{\tau}\; ds = \int\limits_a^b \vec{f}(P(t))\cdot\frac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|}\cdot\|\dot{P}(t)\|\; dt = \int\limits_a^b \vec{f}(P(t))\cdot\dot{P}(t)\; dt\ ,$$

takže můžeme psát zkráceně

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{f}\, d\vec{s} \;= \int\limits_a^b \vec{f}(P(t))\cdot\dot{P}(t)\; dt\ .$$

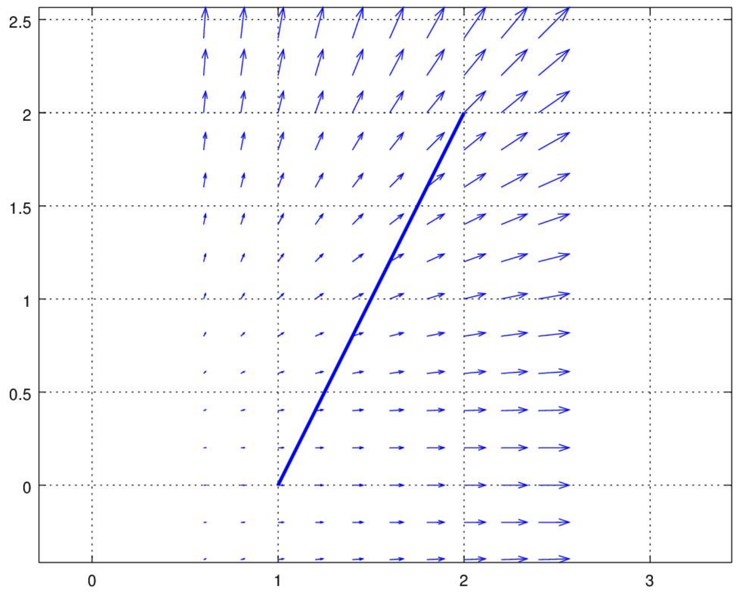
Je-li parametrizace nesouhlasná (opačná), je $\vec{\tau}(x,y) = -\frac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|}$
a před integrál vpravo musíme psát minus.

Pokud $\mathcal{C}$ je uzavřená křivka, nazýváme integrál **cirkulace** $\vec{f}$ podél $\mathcal{C}$ a značíme

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} \vec{f}\, d\vec{s}\ .$$

Příklad 9.7

Určete práci síly $\vec{f} = (x^2, y^2)$ podél úsečky $\overrightarrow{AB}$, $A = [1, 0]$, $B = [2, 2]$.



Velikost šipek na obrázku je kvůli přehlednosti několikanásobně zmenšená.

Řešení: práci lze spočítat jako křivkový integrál $\vec{f}$ podél $\mathcal{C} \equiv \overrightarrow{AB}$.
Parametrizace úsečky (souhlasná s její orientací):
$P(t) = A + (B - A)\,t = [1 + t,\ 2t\,],\ t \in < 0, 1 >$
$\dot{P}(t) = (1, 2)$

$$W = \int\limits_{\mathcal{C}} \vec{f}\, d\vec{s} = \int\limits_{\overrightarrow{AB}} (x^2, y^2)\, d\vec{s} = \int\limits_0^1 \underbrace{((1+t)^2, (2t)^2)}_{\vec{f}(P(t))} \cdot \underbrace{(1, 2)}_{\dot{P}(t)}\, dt = \int\limits_0^1 1 + 2t + t^2 + 8t^2\, dt = 5$$

Příklad 9.8

Určete práci síly $\vec{f} = ((x+y)^2, -(x-y)^2)$ podél křivky $\mathcal{C}: \; y = x^2, \; x \in <0,1>$, z bodu [1,1] do bodu [0,0].

Řešení: práci určíme jako křivkový integrál $\vec{f}$ podél $\mathcal{C}$.
Křivka je popsána jako graf funkce, tak ji parametrizujeme standardně jako
$P(t) = [t, \; t^2], \; t \in <0,1>, \quad P(0) = [0,0] \quad \Rightarrow$ parametrizace je nesouhlasná
$\dot{P}(t) = (1, 2t)$

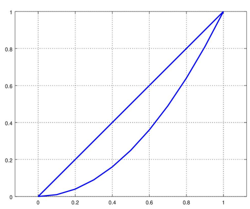
$$W = \int_{\mathcal{C}} \vec{f}\, d\vec{s} = \int_{\mathcal{C}} ((x+y)^2, -(x-y)^2)\, d\vec{s} = \boxed{-} \int_0^1 \underbrace{((t+t^2)^2, -(t-t^2)^2)}_{\vec{f}(P(t))} \cdot \underbrace{(1, 2t)}_{\dot{P}(t)}\, dt =$$

$$= -\int_0^1 (t+t^2)^2 \cdot 1 - (t-t^2)^2 \cdot 2t\, dt = \int_0^1 -(t^2 + 2t^2 + t^4) + 2t\,(t^2 - 2t^2 + t^4)\, dt =$$

$$= \int_0^1 2t^5 - 5t^4 - t^2\, dt = \left[2\,\frac{t^6}{6} - t^5 - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = -1$$

Příklad 9.9

Určete cirkulaci $\vec{f} = ((x+y)^2, -(x-y)^2)$ podél křivky $\mathcal{C}$, která je určena jako hranice množiny $M = \{[x,y] \in R^2 : \; x \in <0,1>, \; x^2 \leq y \leq x\}$ a je orientována v záporném směru (= ve směru hodinových ručiček).



Řešení:

$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_1$ je křivka z minulého příkladu, $\mathcal{C}_2$ je úsečka z bodu [0,0] do [1,1].

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{f}\, d\vec{s} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{f}\, d\vec{s} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{f}\, d\vec{s}\,, \qquad \int_{\mathcal{C}_1} \vec{f}\, d\vec{s} = -1 \quad \text{– výsledek min. příkladu}$$

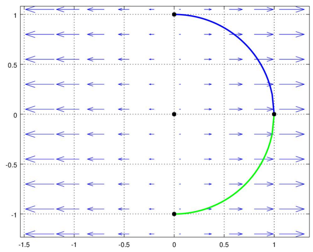
$$\int_{\mathcal{C}_2} \vec{f}\, d\vec{s} = \int_0^1 \underbrace{((t+t)^2, -(t-t)^2)}_{\vec{f}(P(t))} \cdot \underbrace{(1,1)}_{\dot{P}(t)}\, dt = \int_0^1 4t^2\, dt = \left[4\,\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{f}\, d\vec{s} = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

Příklad 9.10

Určete práci síly $\vec{f} = (x, 0)$ podél částí kladně orientované kružnice $x^2 + y^2 = a^2$:

$\mathcal{C}_1 :\ x \geq 0,\ y \geq 0$ – znázorněna modře,
$\mathcal{C}_2 :\ x \geq 0,\ y \leq 0$ – znázorněna zeleně.
$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$



Velikost šipek na obrázku je kvůli přehlednosti jen asi čtvrtinová v porovnání s polem $\vec{f}$.

Řešení:

$P(t) = [a\cos t,\ a\sin t\,]$, parametrizace je souhlasná

$\dot{P}(t) = (-a\sin t,\ a\cos t)$

$\mathcal{C}_1 :\ t \in< 0, \frac{\pi}{2} >$, $\qquad \mathcal{C}_2 :\ t \in< -\frac{\pi}{2}, 0 >$

$$W_1 = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{f}\, d\vec{s} \; = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(a\cos t, 0)}_{\vec{f}(P(t))} \cdot \underbrace{(-a\sin t,\ a\cos t)}_{\dot{P}(t)}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -a^2 \cos t\, \sin t + 0\, dt =$$

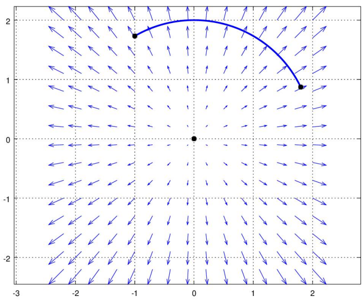
$$= -\frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt = -\frac{a^2}{2} \left[-\frac{\cos 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{a^2}{4}(-\cos\pi + \cos 0) = -\frac{a^2}{2}$$

$$W_2 = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{f}\, d\vec{s} \; = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \underbrace{(a\cos t, 0)}_{\vec{f}(P(t))} \cdot \underbrace{(-a\sin t,\ a\cos t)}_{\dot{P}(t)}\, dt = \cdots = -\frac{a^2}{4}(-\cos 0 + \cos(-\pi)) = \frac{a^2}{2}$$

$$W = W_1 + W_2 = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$$

Příklad 9.11

Určete práci síly $\vec{f} = (x, y)$ podél křivky $\mathcal{C}$ (je to část kladně orientované kružnice):
$\mathcal{C}: \;\; P(t) = [2\cos t, \;\; 2\sin t], \;\; t \in < \varphi_1, \varphi_2 > .$



Velikost šipek na obrázku je kvůli přehlednosti několikanásobně zmenšená.

Řešení:

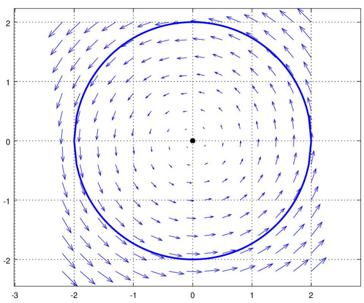
$\dot{P}(t) = (-2\sin t, \;\; 2\cos t)$

$$W = \int_{\mathcal{C}} \vec{f}\, d\vec{s} \;\; = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \underbrace{(2\cos t, \;\; 2\sin t\,)}_{\vec{f}(P(t))} \cdot \underbrace{(-2\sin t, \;\; 2\cos t)}_{\dot{P}(t)} \; dt =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} 4\cos t \;\; \sin t \;\; - 4\sin t \;\; \cos t \, dt = 0$$

Příklad 9.12

Určete cirkulaci $\vec{f} = (y, -x)$ podél záporně orientované kružnice $x^2 + y^2 = 4$.



Velikost šipek na obrázku je kvůli přehlednosti několikanásobně zmenšená.

Řešení:

$\mathcal{C}:\ \ P(t) = [2\cos t,\ 2\sin t\,], \quad t \in < 0, 2\pi >$, parametrizace je nesouhlasná

$\dot{P}(t) = (-2\sin t,\ 2\cos t)$

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} \vec{f}\, d\vec{s} = \boxed{-} \int\limits_0^{2\pi} \underbrace{(2\sin t,\ -2\cos t)}_{\vec{f}(P(t))} \cdot \underbrace{(-2\sin t,\ 2\cos t)}_{\dot{P}(t)}\, dt = 4 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t\, dt = 8\pi$$

Příklad 9.13

Určete práci síly $\vec{f} = (y, z, x)$ podél úsečky z bodu A=[2,0,0] do bodu B=[2,2,4].

$\overrightarrow{AB}:\ \ X = A + (B - A)\,t,\ \ t \in < 0, 1 >$

$x = 2 + 0\,t$
$y = 0 + 2t$
$z = 0 + 4t$

$P(t) = [2,\ 2t,\ 4t\,]$

$\dot{P}(t) = (0,\ 2,\ 4)$

$$W = \int\limits_{\overrightarrow{AB}} \vec{f}\, d\vec{s} = \int\limits_0^1 \underbrace{(2t,\ 4t,\ 2)}_{\vec{f}(P(t))} \cdot \underbrace{(0,\ 2,\ 4)}_{\dot{P}(t)}\, dt = \int\limits_0^1 2t\cdot 0 + 4t\cdot 2 + 2\cdot 4\, dt = \int\limits_0^1 8t + 8\, dt =$$

$$= \left[4t^2 + 8t\right]_0^1 = 12$$