Soustavy diferenciálních rovnic

Soustava dif. rovnic v normálním tvaru:

$$\begin{array}{lcl} y_1' & = & f_1(t, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' & = & f_2(t, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots & & \ldots \quad \ldots \\ y_n' & = & f_n(t, y_1, \ldots, y_n) \end{array}$$

kde $[t, y_1, y_2, \ldots y_n] \in G \subset R^{n+1}$, G je oblast (otevřená souvislá množina), f_i spoj. v G.

Vektorový zápis:

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}(t))\,, \quad \text{kde } \mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \mathbf{Y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix}, \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} f_1(t, y_1, \ldots, y_n) \\ f_2(t, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1, \ldots, y_n) \end{bmatrix} \tag{1}$$

kde $[t, \mathbf{Y}] \equiv [t, y_1, y_2, \ldots y_n] \in G$.

Řešení rovnice (1) v G: vektorová funkce $\mathbf{Y}(t)$ def. na intervalu I, která má na I spojitou derivaci $\mathbf{Y}'(t)$, splňuje rovnici (1) a pro kterou platí $t \in I \;\Rightarrow\; [t, \mathbf{Y}(t)] \equiv [t, y_1, y_2, \ldots y_n] \in G$.

Maximální řešení v G: takové, které nelze prodloužit v G.

Integrální křivka v G: graf řešení, tj. $\{[t, y_1(t), y_2(t), \ldots y_n(t)],\, x \in I\} \subset R^{n+1}$.

Jacobiho matice soustavy:

$$\mathbf{J_Y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Počáteční (Cauchyho) úloha:

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}(t))\,, \quad \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}^{(0)}$$

Věta - o existenci a jednoznačnosti řešení

Nechť všechny funkce $f_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ a jejich parciální derivace $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t, y_1, \ldots, y_n)$ jsou spojité v oblasti $G \subset R^{n+1}$ (tj. $\mathbf{F}$ a $\mathbf{J_Y}$ jsou spojité v G).

Pak pro každý bod $[t_0,\, \mathbf{Y}^{(0)}] \in G$ existuje právě jedno maximální řešení úlohy (1), pro které $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}^{(0)}$. Jinými slovy: každým bodem $[t_0,\, \mathbf{Y}^{(0)}] \in G$ prochází právě jedna integrální křivka. O intervalu I max. řešení obecně nelze nic říct (jen že $t_0 \in I$).

Příklad 10.1 Je dána Cauchyho úloha

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & t\,\sqrt[3]{\ln(y_1)} + y_2 \\ y_2' & = & y_1^2 + y_3^2\,t \\ y_3' & = & \sqrt{y_2} - 3\,y_1 \end{array} \qquad y_1(2) = 3, \quad y_2(2) = 1, \quad y_3(2) = -1$$

(a) Zapište Jacobiho matici soustavy.

(b) Určete oblast existence a jednoznačnosti řešení.

Řešení

(a) $\quad f_1 = t\,\sqrt[3]{\ln(y_1)} + y_2\,, \quad f_2 = y_1^2 + y_3^2\,t\,, \quad f_3 = \sqrt{y_2} - 3\,y_1\,, \quad \mathbf{F}(t, y_1, y_2, y_3) = (f_1,\ f_2,\ f_3)^{\mathrm{T}}$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1} & \frac{\partial f_3}{\partial y_2} & \frac{\partial f_3}{\partial y_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{3\,y_1\cdot\sqrt[3]{\ln^2(y_1)}} & 1 & 0 \\ 2\,y_1 & 0 & 2\,y_3\,t \\ -3 & \frac{1}{2\,\sqrt{y_2}} & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{D}(f_1):\ y_1 > 0 \\ \mathcal{D}(f_2):\ \text{žádná podmínka} \\ \mathcal{D}(f_3):\ y_2 \geq 0 \end{array}\right\} \quad \mathcal{D}(\mathbf{F}) = R \times (0, \infty) \times \langle 0, \infty) \times R$$

Oblast, kde je $\mathbf{F}(t, y_1, y_2, y_3)$ definovaná (a je tam i spojitá): $\quad \Omega = R \times (0, \infty) \times (0, \infty) \times R$

Spojitost parciálních derivací vzhledem k y_i (tj. spojitost všech prvků Jacobiho matice):

přibude podmínka $\ln^2(y_1) \neq 0$, tj. $y_1 \neq 1$

parciální derivace vzhledem k y_i jsou spojité na oblastech

$\Omega_1 = R \times (0, 1) \times (0, \infty) \times R$

$\Omega_2 = R \times (1, \infty) \times (0, \infty) \times R$

Počáteční podmínky (tj. bod [2, 3, 1, -1]) leží v oblasti Ω_2.

Oblast existence a jednoznačnosti řešení je Ω_2.

Příklad 10.2 Je dána soustava dif. rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \ln(x+2) + \frac{y}{t} \\ \dot{y} &= x^2\, t + \sqrt{y-1} \end{aligned}$$

(a) Zapište Jacobiho matici soustavy.

(b) Určete oblasti existence a jednoznačnosti řešení.

Řešení

(a) $f_1(t,x,y) = \ln(x+2) + \frac{y}{t}$, $\quad f_2(t,x,y) = x^2\, t + \sqrt{y-1}$, $\quad \mathbf{F} = (f_1,\ f_2)^{\mathrm{T}}$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ & \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x+2} & \frac{1}{t} \\ & \\ 2\,x\,t & \frac{1}{2\sqrt{y-1}} \end{pmatrix}$$

(b)

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{D}(f_1):\ x > -2,\ t \neq 0 \\ \mathcal{D}(f_2):\ y \geq 1 \end{array}\right\} \quad \mathcal{D}(\mathbf{F}) = \{(-\infty,0) \cup (0,\infty)\} \times (-2,\infty) \times \langle 1,\infty)$$

Oblasti, kde je $\mathbf{F}$ definovaná:

$\Omega_1 = (-\infty,0) \times (-2,\infty) \times (1,\infty)$

$\Omega_2 = (0,\infty) \times (-2,\infty) \times (1,\infty)$

$f_1,\ f_2$ jsou spojité na Ω_1 a Ω_2 a mají tam i spojité parciální derivace vzhledem k x a y (všechny prvky Jacobiho matice soustavy jsou spojité).

Oblasti existence a jednoznačnosti řešení jsou Ω_1 a Ω_2.

Převedení rovnice vyššího řádu na soustavu rovnic 1. řádu

Je dána diferenciální rovnice n-tého řádu v normálním tvaru

$$y^n(t) = f(t, y, y', y'', \dots y^{n-1}) \quad \text{s poč. podm.} \quad y(t_0) = y_1^{(0)}, \quad y' t_0) = y_2^{(0)}, \quad \dots \quad y^{n-1}(t_0) = y_n^{(0)}$$

Diferenciální rovnici n-tého řádu převedeme na soustavu n diferenciálních rovnic 1. řádu: položíme $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$, $\dots y_n = y^{n-1}$, takže dostaneme

$$\mathbf{F}(t,\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y}(t_0) = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Příklad 10.3: Je dána Cauchyho úloha

$y'' \; = \; t\,y'\,y + \sqrt{y^2-1}\;, \quad y(1)=-4,\; y'(1)=2\;.$

Určete oblast existence a jednoznačnosti řešení úlohy.

Řešení

Nejdřív převedeme rovnici 2. řádu na soustavu 2 rovnic 1. řádu: položíme $y_1 = y,\; y_2 = y'$,

1. rovnice: zderivujeme $y_1 = y$ a dosadíme y_2 za y': $y_1' = y'$, takže $y_1' = y_2$

2. rovnice: dosadíme y_1, y_2 a y_2' za y, y' a y'' do dané rovnice: $y_2' \; = \; t\,y_2\,y_1 + \sqrt{y_1^2-1}$

Vektorově:

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ t\,y_2\,y_1 + \sqrt{y_1^2-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y}(1) = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ověření podmínek existence a jednoznačnosti řešení:

$f_1 = y_2$ a $f_2 = t\,y_2\,y_1 + \sqrt{y_1^2-1}$ jsou spojité pro $y_1^2 - 1 \ge 0$, tj. $y_1 \in (-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,\infty)$,

jejich derivace podle y_j:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 0\,, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = 1\,, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = t\,y_2 + \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2-1}}\,, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = t\,y_1$$

jsou spojité pro $y_1^2 - 1 \ge 0$, tj. $y_1 \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$.

Oblasti existence a jednoznačnosti řešení jsou tedy

$\Omega_1 = R \times (-\infty,-1) \times R$

$\Omega_2 = R \times \;(\;1,\;\infty\;)\; \times R$

Počáteční podmínka $[1,-4,2]$ leží v oblasti Ω_1, a proto oblast existence a jednoznačnosti řešení dané úlohy je Ω_1 .

Příklad 10.4 Je dána Cauchyho úloha

$(x-1)\,y''' + 2\,x\,y'' + 5 \; = \; 2\,x^2\,y'' + (x-1)\sqrt{(y')^2-2}\;, \quad y(0)=0,\; y'(0)=2,\; y''(0)=-1\;.$

Určete oblast existence a jednoznačnosti řešení úlohy.

Řešení

Nejdřív převedeme rovnici na normální (kanonický) tvar:

$$\begin{aligned}
(x-1)\,y''' &= -2\,x\,y'' + 2\,x^2\,y'' + (x-1)\sqrt{(y')^2-2} \; - 5 \\
(x-1)\,y''' &= 2\,x\,(x-1)\,y'' \; + (x-1)\sqrt{(y')^2-2} \; - 5 \\
y''' &= 2x\,y'' + \sqrt{(y')^2-2} \; - \; \frac{5}{x-1}
\end{aligned}$$

Pak položíme $y_1 = y,\; y_2 = y',\; y_3 = y''$ a převedeme ji na soustavu rovnic 1. řádu:

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ 2x\,y_3 + \sqrt{(y_2)^2-2} \; - \; \dfrac{5}{x-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Funkce $y_2,\ y_3$ a $2x\,y_3+\sqrt{(y_2)^2-2}\ -\frac{5}{x-1}$ i jejich derivace podle y_i ($\frac{\partial f_3}{\partial y_2}=\frac{y_2}{\sqrt{(y_2)^2-2}}$)
jsou spojité pro $x\neq 1$ a $y_2\notin\langle-\sqrt{2},\sqrt{2}\rangle$, tj. na oblastech

$\Omega_1=(-\infty,1)\times R\times(-\infty,-\sqrt{2})\times R$, $\Omega_2=(-\infty,1)\times R\times(\sqrt{2},\infty)\times R$

$\Omega_3=(1,\infty)\times R\times(-\infty,-\sqrt{2})\times R$, $\Omega_4=(1,\infty)\times R\times(\sqrt{2},\infty)\times R$

Počáteční podmínka $[0,0,2,-1]$ leží v oblasti Ω_2, a proto oblast existence a jednoznačnosti řešení dané úlohy je Ω_2 .

Lineární soustavy

Lineární soustava v normálním tvaru:

$$\begin{array}{rcl} x_1' &=& g_{10}(t)+g_{11}(t)\,x_1+\ \dots\ +g_{1n}(t)\,x_n \\ x_2' &=& g_{20}(t)+g_{21}(t)\,x_1+\ \dots\ +g_{2n}(t)\,x_n \\ \dots && \dots\ \ \dots \\ x_n' &=& g_{n0}(t)+g_{n1}(t)\,x_1+\ \dots\ +g_{nn}(t)\,x_n \end{array}$$

Vektorový zápis: $\mathbf{X}'=\mathbf{A}(t)\,\mathbf{X}+\mathbf{B}(t)\,,$ kde

$$\mathbf{X}\equiv\mathbf{X}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}(t)=\begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) & \dots & g_{1n}(t)\\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & \dots & g_{2n}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ g_{n1}(t) & g_{n2}(t) & \dots & g_{nn}(t)\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}(t)=\begin{bmatrix} g_{01}(t)\\ g_{02}(t)\\ \vdots\\ g_{0n}(t)\end{bmatrix}$$

Počáteční (Cauchyho) úloha:

$$\mathbf{X}'=\mathbf{A}(t)\,\mathbf{X}+\mathbf{B}(t)\,,\qquad \mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}^{(0)}$$

Věta - o existenci a jednoznačnosti řešení

Nechť všechny funkce $g_{ij}(x)$ jsou spojité na intervalu I (tj. $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou spojité na I).

Pak pro každé $t_0\in I$ existuje právě jedno maximální řešení rovnice $\mathbf{X}'=\mathbf{A}(t)\,\mathbf{X}+\mathbf{B}(t)$ takové, že $\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}^{(0)}$. Toto řešení je definováno na *celém* intervalu I.

- množina všech řešení homogenní rovnice $\mathbf{X}'=\mathbf{A}(t)\,\mathbf{X}$ tvoří **lineární prostor** dimenze n
- **fundamentální systém řešení** hom. rovnice je jeho libovolná báze, tj. n LN řešení hom. rov.
  jak poznáme nezávislost $\mathbf{X}^{(1)},\mathbf{X}^{(2)},\dots\mathbf{X}^{(n)}$: $W(t)\neq 0$ aspoň v jednom bodě $t\in I$, kde
- **Wronskián** $W(t)=\begin{vmatrix} \mathbf{X}_1^{(1)}(t) & \mathbf{X}_1^{(2)}(t) & \dots & \mathbf{X}_1^{(n)}(t)\\ \mathbf{X}_2^{(1)}(t) & \mathbf{X}_2^{(2)}(t) & \dots & \mathbf{X}_2^{(n)}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{X}_n^{(1)}(t) & \mathbf{X}_n^{(2)}(t) & \dots & \mathbf{X}_n^{(n)}(t)\end{vmatrix}$ … determinant *fundamentální matice*
- **obecné řešení** $\begin{cases}\text{homog. rov.:} & \mathbf{X}_H(t)=c_1\,\mathbf{X}^{(1)}(t)+c_2\,\mathbf{X}^{(2)}(t)+\ \dots\ +c_n\mathbf{X}^{(n)}(t)\,,\ c_i\in R\\ \text{nehomog. rov.:} & \mathbf{X}=\mathbf{X}_H+\mathbf{X}_P \qquad (\mathbf{X}_P \text{ je partikulární řeš. nehomog. rov.})\end{cases}$

Příklad 10.5 Je dána soustava lin. dif. rovnic

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 6\,x - y\end{aligned}$$

(a) Zapište soustavu ve vektorovém tvaru.

(b) Dokažte, že

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} e^{2\,t} \\ 2\,e^{2\,t} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} e^{-3\,t} \\ -3\,e^{-3\,t} \end{bmatrix}$$

tvoří fundamentální systém pro $t \in R$.

(c) Zapište obecné řešení.

Řešení

(a)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \text{nebo} \qquad \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}, \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(b) Máme **dvě** rovnice 1. řádu, takže soustava je **druhého** řádu a FS tedy tvoří **dvě** (vektorové) funkce. Musíme ještě ukázat, že obě dané funkce $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{X}^{(2)}$ řeší (homogenní) soustavu a že jsou lineárně nezávislé (tj. Wronskián není nula).

- $\mathbf{X}^{(1)}$ řeší soustavu:

$$\mathrm{L} = \dot{\mathbf{X}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2\,e^{2\,t} \\ 4\,e^{2\,t} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e^{2\,t} \\ 2\,e^{2\,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,e^{2\,t} \\ 4\,e^{2\,t} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{L} = \mathrm{P}$$

  $\mathbf{X}^{(2)}$ řeší soustavu:

$$\mathrm{L} = \dot{\mathbf{X}}^{(2)} = \begin{bmatrix} -3\,e^{-3\,t} \\ 9\,e^{-3\,t} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3\,t} \\ -3\,e^{-3\,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\,e^{-3\,t} \\ 9\,e^{-3\,t} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{L} = \mathrm{P}$$

- $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{X}^{(2)}$ jsou lineárně nezávislé (tj. Wronskián není nula – stačí v jednom bodě intervalu):

$$W(t) \equiv W[\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}](t) = \begin{vmatrix} \underbrace{\begin{matrix} e^{2\,t} \\ 2\,e^{2\,t} \end{matrix}}_{\mathbf{X}^{(1)}} & \underbrace{\begin{matrix} e^{-3\,t} \\ -3\,e^{-3\,t} \end{matrix}}_{\mathbf{X}^{(2)}} \end{vmatrix}, \quad W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0$$

(c)

$$\mathbf{X}_H = c_1\,\mathbf{X}^{(1)} + c_2\,\mathbf{X}^{(2)} = c_1 \begin{bmatrix} e^{2\,t} \\ 2\,e^{2\,t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{-3\,t} \\ -3\,e^{-3\,t} \end{bmatrix} = c_1\,e^{2\,t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\,e^{-3\,t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad t \in R,\ c_1, c_2 \in R$$

Příklad 10.6 (zk. alfa)

(a) Zapište podmínky, které musí splňovat FS řešení homogenní rovnice $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{X}$ (kolik vektorových funkcí jej tvoří, jejich vlastnosti).

(b) Je dána Cauchyho úloha

$$\dot{\mathbf{X}} \;=\; \frac{1}{t^3-1}\begin{pmatrix} 2\,t^2 & -2\,t \\ -1 & t^2 \end{pmatrix}\mathbf{X}\,, \qquad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Určete interval J maximálního řešení (zdůvodněte).

(c) Dokažte, že

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} t^2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$$

tvoří fundamentální systém řešení soustavy na J.

(d) Určete maximální řešení soustavy.
Prémie: vyloučením t lze získat řešení ve tvaru $x = g(y)$. Jaká je to křivka?

Řešení

(a) FS musí obsahovat n funkcí, kde n je řád soustavy (počet rovnic).
Tyto funkce musí být lineárně nezávislé a každá z nich musí být řešením homogenní soustavy.

(b) Všechny koeficienty rovnice jsou spojité na intervalech $I_1 = (-\infty, 1)$ a $I_2 = (1, \infty)$ a ty už nelze prodloužit. Počáteční podmínka je zadaná v bodě $t_0 = 0 \in I_1$, takže $J = (-\infty, 1)$.

(c) Máme 2 rovnice (prvního řádu), soustava je tedy 2. řádu a FS musí tvořit 2 vektorové funkce. Daná sousava je homogenní. Musíme ukázat, že obě zadané funkce ji řeší a že jsou lineárně nezávislé (tj. aspoň v jednom bodě intervalu $J = (-\infty, 1)$ je Wronskián nenulový, např. pro $t = 0$).

- $\mathbf{X}^{(1)}$ řeší soustavu:

$$\text{L}=\dot{\mathbf{X}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2\,t \\ 0 \end{bmatrix}, \;\; \text{P}=\tfrac{1}{t^3-1}\begin{pmatrix} 2\,t^2 & -2\,t \\ -1 & t^2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} t^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{t^3-1}\begin{bmatrix} 2\,t^4 - 2\,t \\ -t^2 + t^2 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{t^3-1}\begin{bmatrix} 2\,t\,(t^3-1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,t \\ 0 \end{bmatrix}, \;\; \text{L=P}$$

  $\mathbf{X}^{(2)}$ řeší soustavu:

$$\text{L}=\dot{\mathbf{X}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \;\; \text{P}=\tfrac{1}{t^3-1}\begin{pmatrix} 2\,t^2 & -2\,t \\ -1 & t^2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} = \tfrac{1}{t^3-1}\begin{bmatrix} 2\,t^2 - 2\,t^2 \\ -1 + t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \;\; \text{L=P}$$

- $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{X}^{(2)}$ jsou lineárně nezávislé:

$$W(t) = \left|\, \mathbf{X}^{(1)} \;\; \mathbf{X}^{(2)} \right| = \begin{vmatrix} t^2 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^3 - 1 \neq 0 \;\text{ pro } t \in J, \quad (\,\text{nebo } W(0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0\,)$$

(d) $\mathbf{X} = c_1\,\mathbf{X}^{(1)} + c_2\,\mathbf{X}^{(2)} = c_1 \begin{bmatrix} t^2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 &= \;\;\,2 \\ c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 &= -1 \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; c_1 = -1,\; c_2 = 2, \quad \mathbf{X} = -\begin{bmatrix} t^2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - t^2 \\ 2\,t - 1 \end{bmatrix}, \;\; t \in J$$

$$x = 2 - t^2,\; y = 2\,t - 1 \;\Rightarrow\; t = \tfrac{1}{2}(y+1), \quad x = 2 - \tfrac{1}{4}(y+1)^2 \;\;\ldots\text{parabola}$$