Lineární soustavy s konstantními koeficienty (autonomní)

Homogenní soustava

$$\dot{\mathbf{X}} \;=\; \mathbf{A}\,\mathbf{X}\,, \quad \mathbf{A}\;\ldots n\times n\,, \quad \det(\mathbf{A})\neq 0$$

$\mathrm{e}^{\lambda\,t}\,\mathbf{V}$ je netriviální řešení $\iff$ λ je vl. číslo a $\mathbf{V}$ je vlastní vektor matice $\mathbf{A}$

Nehomogenní soustava

$$\dot{\mathbf{X}} \;=\; \mathbf{A}\,\mathbf{X}+\mathbf{B}$$

$\mathbf{X}=\mathbf{X}_H+\mathbf{X}_P$

$\mathbf{X}_P$ je *bod rovnováhy*, tj. $\dot{\mathbf{X}}_P=\mathbf{O}$: $\quad \mathbf{A}\,\mathbf{X}_P+\mathbf{B}=\mathbf{O} \iff \mathbf{X}_P=-\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$

Příklad 11.1 Najděte obecné řešení homogenní soustavy z př. 10.5, tj.

$$\dot{\mathbf{X}} \;=\; \begin{pmatrix}0 & 1\\ 6 & -1\end{pmatrix}\mathbf{X}$$

Řešení

- vlastní čísla: $\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 6 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda\,(1+\lambda)-6=\lambda^2+\lambda-6=0 \quad\Rightarrow\; \lambda_1=2,\;\lambda_2=-3$
- vlastní vektory:

  $\lambda_1=2$: $\quad -2\,x+y=0 \iff y=2\,x\,,\quad \mathbf{V}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

  $\lambda_2=-3$: $\quad 3\,x+y=0 \iff y=-3\,x\,,\quad \mathbf{V}^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$

$$\mathbf{X}_H=c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1\,t}\,\mathbf{V}^{(1)}+c_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2\,t}\,\mathbf{V}^{(2)}=c_1\,\mathrm{e}^{2\,t}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t}\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}\,,\qquad t\in R,\;c_1,c_2\in R$$

Příklad 11.2 Najděte řešení Cauchyho úlohy

$$\dot{\mathbf{X}} \;=\; \begin{pmatrix}-2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}\mathbf{X}\,,\qquad \mathbf{X}(0)=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$$

Řešení

- vlastní čísla: $\begin{vmatrix}-2-\lambda & 2\\ -2 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(2+\lambda)^2+4=\lambda^2+4\,\lambda+8=0 \quad\Rightarrow\; \lambda_{1,2}=-2\pm 2i$
- vlastní vektor k $\lambda_1=-2-2i$:

  $(-2+2+2i)\,x+2y=0 \iff y=-i\,x\,,\quad \mathbf{V}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$

  (vl. vekt. k λ_2 je komplexně sdružený, ale k nalezení reálného FS jej nepotřebujeme)

  máme jedno komplexní řešení $\mathbf{X}^{(1)}=\mathrm{e}^{\lambda_1\,t}\,\mathbf{V}^{(1)}=\mathrm{e}^{(-2-2i)\,t}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$

- nalezení reálného FS:
  pomocí Eulerovy formule vyjádříme reálnou a komplexní část komplexního řešení $\mathbf{X}^{(1)}$

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathrm{e}^{(-2-2i)\,t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-2\,t}(\cos(-2\,t) + i\sin(-2\,t)) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-2\,t}(\cos(2\,t) - i\sin(2\,t)) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{e}^{-2\,t} \begin{bmatrix} \cos(2\,t) - i\sin(2\,t) \\ -i\,(\cos(2\,t) - i\sin(2\,t)) \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-2\,t} \begin{bmatrix} \cos(2\,t) - i\sin(2\,t) \\ -i\cos(2\,t) - \sin(2\,t) \end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{e}^{-2\,t} \left(\begin{bmatrix} \cos(2\,t) \\ -\sin(2\,t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -\sin(2\,t) \\ -\cos(2\,t) \end{bmatrix} \right) \quad , \quad \mathrm{FS} = \left\{ \mathrm{e}^{-2\,t} \begin{bmatrix} \cos(2\,t) \\ -\sin(2\,t) \end{bmatrix},\ \mathrm{e}^{-2\,t} \begin{bmatrix} \sin(2\,t) \\ \cos(2\,t) \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_H = c_1\,\mathrm{e}^{-2\,t} \begin{bmatrix} \cos(2\,t) \\ -\sin(2\,t) \end{bmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-2\,t} \begin{bmatrix} \sin(2\,t) \\ \cos(2\,t) \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-2\,t} \begin{bmatrix} c_1\cos(2\,t) + c_2\sin(2\,t) \\ -c_1\sin(2\,t) + c_2\cos(2\,t) \end{bmatrix},\ t \in R,\ c_1, c_2 \in R$$

- dosazení počáteční podmínky:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 \\ -c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow\ c_1 = 2,\ c_2 = -3$$

$$\mathbf{X}(t) = \mathrm{e}^{-2\,t} \begin{bmatrix} 2\cos(2\,t) - 3\sin(2\,t) \\ -2\sin(2\,t) - 3\cos(2\,t) \end{bmatrix}, \quad t \in R$$

Příklad 11.3 Najděte řešení Cauchyho úlohy

$$\dot{\mathbf{X}} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Řešení

- vlastní čísla: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -2$

- vlastní vektory:

  $\lambda_1 = 4$: $\quad -3\,x + 3\,y = 0 \iff y = x\,, \quad \mathbf{V}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

  $\lambda_2 = -2$: $\quad 3\,x + 3\,y = 0 \iff y = -x\,, \quad \mathbf{V}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{X}_H = c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1\,t}\,\mathbf{V}^{(1)} + c_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2\,t}\,\mathbf{V}^{(2)} = c_1\,\mathrm{e}^{4\,t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-2\,t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad t \in R,\ c_1, c_2 \in R$$

- partikulární řešení – bod rovnováhy BR:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + 3\,y &= 1 \\ 3\,x + y &= -5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x = -2\,,\ y = 1$$

  $BR = [-2,\ 1]$ – jediné řešení, protože matice soustavy je regulární

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_H + \mathbf{X}_P = c_1\,\mathrm{e}^{4\,t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-2\,t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in R,\ c_1, c_2 \in R$$

- dosazení počáteční podmínky:

$$\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = \mathbf{X}(0) = c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix}c_1+c_2-2=4\\ c_1-c_2+1=3\end{matrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix}c_1=4\\ c_2=2\end{matrix}$$

$$\mathbf{X}(t) = 4\,\mathrm{e}^{4\,t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + 2\,\mathrm{e}^{-2\,t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}, \quad t\in R$$

Příklad 11.4 Najděte řešení Cauchyho úlohy

$$\dot{\mathbf{X}} \;=\; \begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & -1\end{pmatrix}\mathbf{X}\,, \qquad \mathbf{X}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

Řešení

- vlastní čísla: $\begin{vmatrix}1-\lambda & -5\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda)+10 = -(1-\lambda^2)+10 = \lambda^2+9 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3i$

- vlastní vektor k $\lambda_1 = 3i$:

  $(1-3i)\,x - 5\,y = 0 \iff 5\,y = (1-3i)\,x\,, \quad \mathbf{V}^{(1)} = \begin{bmatrix}5\\1-3i\end{bmatrix}$

  máme jedno komplexní řešení $\mathbf{X}^{(1)} = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,\mathbf{V}^{(1)} = \mathrm{e}^{3i\,t}\begin{bmatrix}5\\1-3i\end{bmatrix}$

- nalezení reálného FS – použitím Eulerovy formule:

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathrm{e}^{3i\,t}\begin{bmatrix}5\\1-3i\end{bmatrix} = (\cos(3\,t)+i\sin(3\,t))\begin{bmatrix}5\\1-3i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\cos(3\,t)+i\,5\sin(3\,t)\\(1-3i)\,(\cos(3\,t)+i\sin(3\,t))\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}5\cos(3\,t)+i\,5\sin(3\,t)\\ \cos(3\,t)+i\sin(3\,t)-i\,3\cos(3\,t)+3\,\sin(3\,t)\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}5\cos(3\,t)\\ \cos(3\,t)+3\,\sin(3\,t)\end{bmatrix} + i\begin{bmatrix}5\sin(3\,t)\\ \sin(3\,t)-3\,\cos(3\,t)\end{bmatrix} \;,$$

$$\mathrm{FS} = \left\{\begin{bmatrix}5\cos(3\,t)\\ \cos(3\,t)+3\,\sin(3\,t)\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}5\sin(3\,t)\\ \sin(3\,t)-3\,\cos(3\,t)\end{bmatrix}\right\}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_H = c_1\begin{bmatrix}5\cos(3\,t)\\ \cos(3\,t)+3\,\sin(3\,t)\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}5\sin(3\,t)\\ \sin(3\,t)-3\,\cos(3\,t)\end{bmatrix},\ \ t\in R,\ c_1,c_2\in R$$

- dosazení počáteční podmínky:

$$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \mathbf{X}(\tfrac{\pi}{2}) = c_1\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-5\\-1\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix}-5\,c_2 = 2\\ -3\,c_1 - c_2 = 1\end{matrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix}c_1 = -\frac{1}{5}\\ c_2 = -\frac{2}{5}\end{matrix}$$

$$\mathbf{X} = -\tfrac{1}{5}\begin{bmatrix}5\cos(3\,t)\\ \cos(3\,t)+3\,\sin(3\,t)\end{bmatrix} - \tfrac{2}{5}\begin{bmatrix}5\sin(3\,t)\\ \sin(3\,t)-3\,\cos(3\,t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\cos(3\,t)-2\,\sin(3\,t)\\ \cos(3\,t)-\sin(3\,t)\end{bmatrix},\ \ t\in R$$

Příklad 11.5 Najděte řešení Cauchyho úlohy

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}\,, \qquad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Řešení

- vlastní čísla: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2$

- vlastní vektor:

  $\lambda = 2$: $\quad -x - y = 0 \iff y = -x\,, \quad \mathbf{V}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

- jedno řešení je tedy $\mathbf{X}^{(1)} = \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, druhé (nezávislé) řešení hledáme ve tvaru

  $\mathbf{X}^{(2)} = t\,\mathbf{X}^{(1)} + \mathrm{e}^{2t}\,\mathbf{Z} = t\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{2t}\,\mathbf{Z}$, kde $\mathbf{Z}$ řeší $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{Z} = \mathbf{V}^{(1)}$ (tj. $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2\,\mathbf{Z} = \mathbf{O}$):

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_z \\ y_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_z \\ y_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -x_z - y_z = 1 \\ x_z + y_z = -1 \end{matrix}\,, \quad \text{např. } \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^{(2)} = t\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} t-1 \\ -t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = c_1\,\mathbf{X}^{(1)} + c_2\,\mathbf{X}^{(2)} = c_1\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} t-1 \\ -t \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} c_1 - c_2 + c_2\,t \\ -c_1 - c_2\,t \end{bmatrix}\,, \ t \in R,\ c_1, c_2 \in R$$

- dosazení počáteční podmínky:

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 \\ -c_1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} c_1 - c_2 = -5 \\ -c_1 = 2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} c_1 = -2 \\ c_2 = 3 \end{matrix}$$

$$\mathbf{X}(t) = -2\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 3\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} t-1 \\ -t \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} -5 + 3\,t \\ 2 - 3\,t \end{bmatrix}\,, \quad t \in R$$

Jiný způsob nalezení FS a obecného řešení:

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathrm{e}^{\lambda t}\,(\mathbf{I} + t\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^{(2)} = \mathrm{e}^{\lambda t}\,(\mathbf{I} + t\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} -t \\ 1+t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = c_1\,\mathbf{X}^{(1)} + c_2\,\mathbf{X}^{(2)} = c_1\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} -t \\ 1+t \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} c_1 - t\,(c_1 + c_2) \\ c_2 + t\,(c_1 + c_2) \end{bmatrix}$$

- dosazení počáteční podmínky:

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} c_1 = -5 \\ c_2 = 2 \end{matrix}$$

$$\mathbf{X}(t) = -5\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix} + 2\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} -t \\ 1+t \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} -5 + 3\,t \\ 2 - 3\,t \end{bmatrix}\,, \quad t \in R$$

Eliminační metoda

Příklad 11.6 Určete obecné řešení soustavy z př. 10.5 a 11.1, tj.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= 6\,x - y\end{aligned}$$

Řešení

1. Z první rovnice vyjádříme y: $\quad y = \dot{x}$

2. Derivujeme: $\quad \dot{y} = \ddot{x}$

3. Obě funkce y a $\dot{y}$ dosadíme do druhé rovnice a určíme x:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= 6\,x - y\\ \ddot{x} &= 6\,x - \dot{x}\\ \ddot{x} + \dot{x} - 6\,x &= 0\end{aligned}$$

$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 2,\; \lambda_2 = -3, \quad \mathrm{FS} = \{\mathrm{e}^{2\,t},\, \mathrm{e}^{-3\,t}\}, \quad \boxed{x = c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} + c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t}}$

4. Dopočítáme y (z rovnice, kterou jsme si vyjádřili v 1. kroku): $\boxed{y = \dot{x} = 2\,c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} - 3\,c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t}}$

vektorově: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} + c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t}\\ 2\,c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} - 3\,c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t}\end{bmatrix} = c_1\,\mathrm{e}^{2\,t}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t}\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}, \quad t \in R,\; c_1, c_2 \in R$

Příklad 11.7 Určete obecné řešení nehomogenní soustavy

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 4\,y - 2\,x + 3\,\mathrm{e}^{3t}\\ \dot{y} &= x + y - 2\,\mathrm{e}^{3\,t}\end{aligned}$$

Řešení

1. Z druhé rovnice vyjádříme x (abychom se vyhnuli zlomkům): $\quad x = \dot{y} - y + 2\,\mathrm{e}^{3\,t}$

2. Derivujeme: $\quad \dot{x} = \ddot{y} - \dot{y} + 6\,\mathrm{e}^{3\,t}$

3. Obě funkce x a $\dot{x}$ dosadíme do první rovnice a určíme y:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 4\,y - 2\,x + 3\,\mathrm{e}^{3t}\\ \ddot{y} - \dot{y} + 6\,\mathrm{e}^{3\,t} &= 4\,y - 2\,(\dot{y} - y + 2\,\mathrm{e}^{3\,t}) + 3\,\mathrm{e}^{3t}\\ \ddot{y} + \dot{y} - 6\,y &= -7\,\mathrm{e}^{3\,t}\end{aligned}$$

řešení homogenní rovnice:

$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 2,\; \lambda_2 = -3, \quad \mathrm{FS} = \{\mathrm{e}^{2\,t},\, \mathrm{e}^{-3\,t}\}, \quad y_H = c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} + c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t}$

partikulární řešení:

$y_P = c\,\mathrm{e}^{3\,t}, \quad \dot{y}_P = 3\,c\,\mathrm{e}^{3\,t}, \quad \ddot{y}_P = 9\,c\,\mathrm{e}^{3\,t},$ dosadíme do nehomogenní rovnice:

$$\begin{aligned}9\,c\,\mathrm{e}^{3\,t} + 3\,c\,\mathrm{e}^{3\,t} - 6\,c\,\mathrm{e}^{3\,t} &= -7\,\mathrm{e}^{3\,t}\\ 6\,c\,\mathrm{e}^{3\,t} &= -7\,\mathrm{e}^{3\,t} \quad \Rightarrow \; c = -\frac{7}{6}\end{aligned}$$

$\boxed{y = y_H + y_P = c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} + c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t} - \tfrac{7}{6}\,\mathrm{e}^{3\,t}} \quad t \in R,\; c_1, c_2 \in R$

4. Dopočítáme x (z rovnice, kterou jsme si vyjádřili v 1. kroku):
$\dot{y} = 2\,c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} - 3\,c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t} - 3\cdot\frac{7}{6}\,\mathrm{e}^{3\,t}$

$$x = \dot{y} - y + 2\,\mathrm{e}^{3\,t} = \underbrace{2\,c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} - 3\,c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t} - 3\cdot\frac{7}{6}\,\mathrm{e}^{3\,t}}_{\dot{y}} - (\underbrace{c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} + c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t} - \frac{7}{6}\,\mathrm{e}^{3\,t}}_{y}) + 2\,\mathrm{e}^{3\,t}$$

$x = c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} - 4\,c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t} + (-3\cdot\frac{7}{6} + \frac{7}{6} + 2)\,\mathrm{e}^{3\,t} = c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} - 4\,c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t} - \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3\,t}$

$\boxed{x = c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} - 4\,c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t} - \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3\,t}}\qquad t\in R,\ c_1, c_2\in R$

vektorově:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} - 4\,c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t} - \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3\,t} \\ c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} + c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t} - \frac{7}{6}\,\mathrm{e}^{3\,t} \end{bmatrix} = c_1\,\mathrm{e}^{2\,t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t}\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{3\,t}\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix},\quad t\in R,\ c_1, c_2\in R$$

Zkouška: mohli bychom dosadit řešení x a y do zadaných dvou rovnic.
Nebo můžeme využít struktury řešení soustavy lin. rovnic, zapsat si všechno ve vektorovém tvaru a rozdělit si zkoušku na dvě části.
Zadaná soustava rovnic ve vektorovém tvaru:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \mathrm{e}^{3\,t}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Řešení, jehož správnost chceme ověřit: $\quad\mathbf{X} = c_1\,\mathrm{e}^{2\,t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t}\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{3\,t}\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

Známe jeho strukturu: $\mathbf{X} = \mathbf{X}_H + \mathbf{X}_P$,

$$\mathbf{X}_H = c_1\,\mathrm{e}^{2\,t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t}\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{X}_P = -\frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{3\,t}\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix},\quad \mathrm{FS} = \left\{\mathrm{e}^{2\,t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathrm{e}^{-3\,t}\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

- Ověříme, že FS je správně: $W(t) = \mathrm{e}^{2\,t}\mathrm{e}^{-3\,t}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-t}\cdot(1+4) = 5\,\mathrm{e}^{-t} \neq 0,\ t\in R$

– obě (vektorové) funkce jsou lineárně nezávislé. Ještě navíc musí řešit homogenní rovnici:

první funkce:

$$\mathrm{L}{=}2\,\mathrm{e}^{2\,t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \mathrm{P}{=}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2\,t} \\ \mathrm{e}^{2\,t} \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{2\,t}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{2\,t}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\,\mathrm{e}^{2\,t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \mathrm{L}{=}\mathrm{P}$$

druhá funkce:

$$\mathrm{L}{=}-3\,\mathrm{e}^{-3\,t}\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \mathrm{P}{=}\mathrm{e}^{-3\,t}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-3\,t}\begin{bmatrix} 12 \\ -3 \end{bmatrix} = -3\,\mathrm{e}^{-3\,t}\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \mathrm{L}{=}\mathrm{P}$$

- Zbývá ověřit, že $\mathbf{X}_P$ máme správně:

$$\mathrm{L}{=}-\frac{3}{6}\,\mathrm{e}^{3\,t}\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{3\,t}\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{P}{=}-\frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{3\,t}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{3\,t}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{3\,t}\begin{bmatrix} 24 \\ 9 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{3\,t}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{3\,t}\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix}\right),\quad \mathrm{L}{=}\mathrm{P}$$

Dodatek: řešení **Příkladu 11.5** eliminační metodou

Příklad 11.5 Najděte řešení Cauchyho úlohy

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}\,, \qquad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Řešení

Soustavu si nejdřív přepíšeme jako dvě rovnice:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y & \qquad x(0) &= -5 \\ \dot{y} &= x + 3\,y & \qquad y(0) &= \ \ 2 \end{aligned}$$

Eliminační metoda:

1. Z první rovnice vyjádříme y: $\quad y = x - \dot{x}$
2. Derivujeme: $\quad \dot{y} = \dot{x} - \ddot{x}$
3. Obě funkce y a $\dot{y}$ dosadíme do druhé rovnice a určíme x:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= x + 3\,y \\ \dot{x} - \ddot{x} &= x + 3\,(x - \dot{x}) \\ \ddot{x} - 4\,\dot{x} + 4\,x &= 0 \end{aligned}$$

$\lambda^2 - 4\,\lambda + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = 2, \quad \mathrm{FS} = \{\mathrm{e}^{2\,t},\, t\,\mathrm{e}^{2\,t}\}, \quad \boxed{x = c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} + c_2\,t\,\mathrm{e}^{2\,t}}$

4. Dopočítáme y (z rovnice, kterou jsme si vyjádřili v 1. kroku):

$\dot{x} = 2\,c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} + c_2\,\mathrm{e}^{2\,t} + c_2\,t\,2\,\mathrm{e}^{2\,t}$

$y = x - \dot{x} = c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} + c_2\,t\,\mathrm{e}^{2\,t} - (2\,c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} + c_2\,\mathrm{e}^{2\,t} + c_2\,t\,2\,\mathrm{e}^{2\,t})$

$\boxed{y = -c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} - c_2\,\mathrm{e}^{2\,t} - c_2\,t\,\mathrm{e}^{2\,t}}$

vektorově: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} + c_2\,t\,\mathrm{e}^{2\,t} \\ -c_1\,\mathrm{e}^{2\,t} - c_2\,\mathrm{e}^{2\,t} - c_2\,t\,\mathrm{e}^{2\,t} \end{bmatrix} = (c_1 + c_2\,t)\,\mathrm{e}^{2\,t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{2\,t} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$

$t \in R,\ c_1, c_2 \in R$

Dosazení počátečních podmínek:

$x(0) = -5 = c_1\,, \quad y(0) = 2 = -c_1 - c_2 = 5 - c_2 \;\Rightarrow\; c_2 = 3$

$x = -5\,\mathrm{e}^{2\,t} + 3\,t\,\mathrm{e}^{2\,t}\,, \quad y = 5\,\mathrm{e}^{2\,t} - 3\,\mathrm{e}^{2\,t} - 3\,t\,\mathrm{e}^{2\,t} = 2\,\mathrm{e}^{2\,t} - 3\,t\,\mathrm{e}^{2\,t}\,, \quad t \in R$

vektorově: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5\,\mathrm{e}^{2\,t} + 3\,t\,\mathrm{e}^{2\,t} \\ 2\,\mathrm{e}^{2\,t} - 3\,t\,\mathrm{e}^{2\,t} \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{2\,t} \begin{bmatrix} -5 + 3\,t \\ 2 - 3\,t \end{bmatrix}, \quad t \in R$