Typy bodů rovnováhy autonomní lineární soustavy

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\,\mathbf{X} + \mathbf{B}\,, \qquad \mathbf{A}\ \ldots n \times n\,, \quad \det(\mathbf{A}) \neq 0$$

BR je *bod rovnováhy* (izolovaný) $\iff$ $\mathrm{BR} = -\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$

Fázové obrazy příkladů z minulého cvičení:

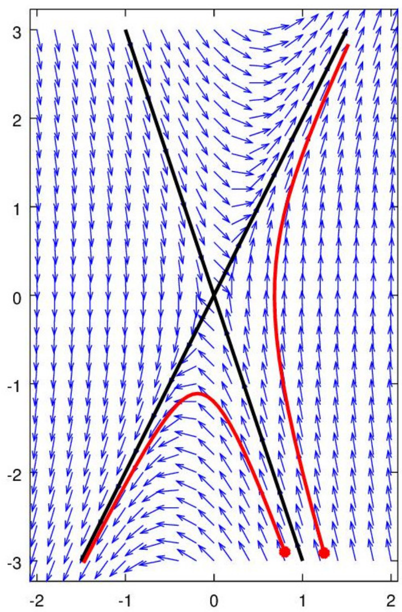
I Reálná vlastní čísla, různá (tedy i vlastní vektory jsou reálné a různé)

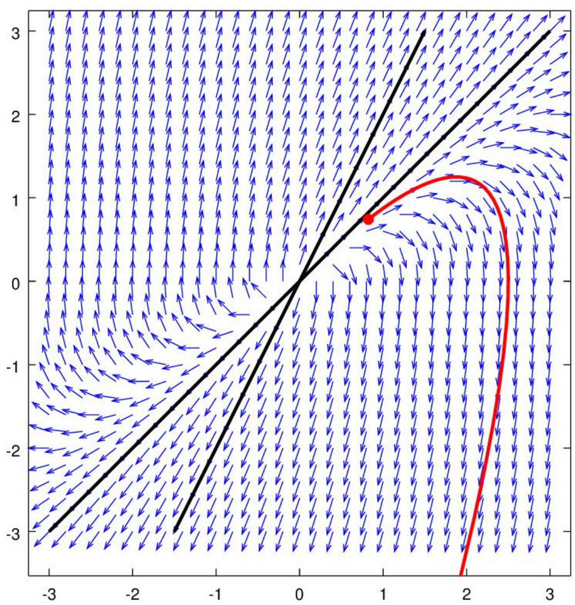
Příklad 11.1 $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}\,, \quad \lambda_1 = 2,\ \mathbf{V}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = -3,\ \mathbf{V}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{X} = c_1\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad t \in R,\ c_1, c_2 \in R$$

Příklad 12.1 $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}\,, \quad \lambda_1 = 1,\ \mathbf{V}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 2,\ \mathbf{V}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{X} = c_1\,\mathrm{e}^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad t \in R,\ c_1, c_2 \in R$$





Vlevo př. 11.1: typ *sedlo*. Vpravo př. 12.1: typ *uzel* (bikritický, nestabilní).
Červeně jsou vyznačeny některé *fázové trajektorie*, počáteční podmínka pro $t = 0$ je označena puntíkem. Je zobrazena jen část trajektorie na vhodném intervalu $t \in < 0, t_{max} >$.

Obrázky jsou pořízené v Octave (resp. Matlabu), na skript vede odkaz u programu cvičení (vyznačené příkazy je potřeba upravit pro konkrétní příklad).

II Komplexní vlastní čísla (tedy neexistují reálné vlastní vektory)

Příklad 11.2 $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\lambda_{1,2} = -2 \pm 2i$,

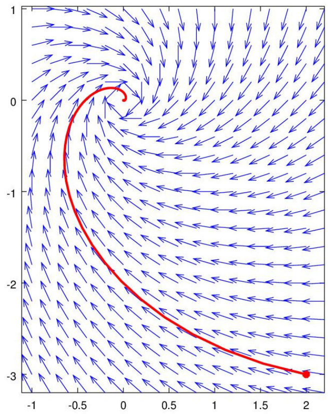
$$\mathbf{X}_O = c_1\, e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{bmatrix} + c_2\, e^{-2t} \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{bmatrix}, \quad t \in R,\ c_1, c_2 \in R$$

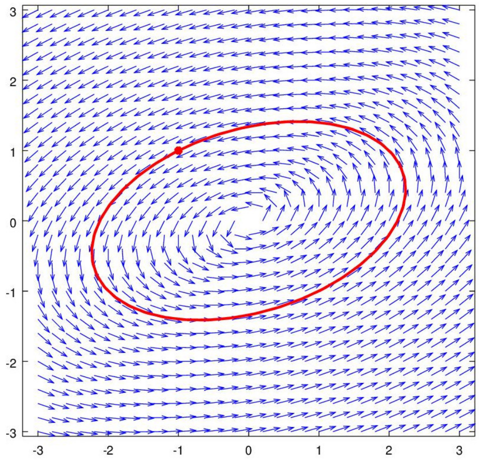
$$\mathbf{X} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 2\cos(2t) - 3\sin(2t) \\ -2\sin(2t) - 3\cos(2t) \end{bmatrix}, \quad t \in R$$

Příklad 11.4 $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$, $\mathbf{X}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_{1,2} = \pm 3i$,

$$\mathbf{X}_O = c_1 \begin{bmatrix} 5\cos(3t) \\ \cos(3t) + 3\sin(3t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 5\sin(3t) \\ \sin(3t) - 3\cos(3t) \end{bmatrix}, \quad t \in R,\ c_1, c_2 \in R$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -\cos(3t) - 2\sin(3t) \\ \cos(3t) - \sin(3t) \end{bmatrix}, \quad t \in R$$





Vlevo př. 11.2: typ *ohnisko* (stabilní). Vpravo př. 11.4: typ *střed.*
Červeně jsou vyznačeny některé trajektorie, počáteční podmínka pro $t = 0$ je označena puntíkem.
Vlevo je zobrazena jen část trajektorie na vhodném intervalu $t \in < 0, t_{max} >$.
Vpravo je periodická trajektorie na intervalu $t \in < 0, 2\pi/3 >$. [1]

[1] Periodická trajektorie v př. 11.4 je elipsa (v obecné poloze), jak se můžeme přesvědčit vyloučením parametru t z řešení:

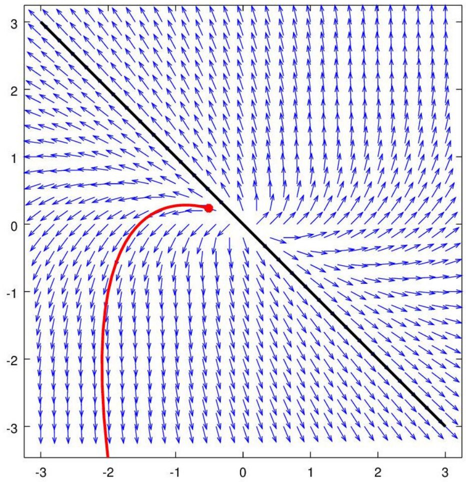
$$\begin{aligned} x &= -\cos(3t) - 2\sin(3t) \\ y &= \cos(3t) - \sin(3t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y &= -3\sin(3t) \quad /^2 \\ x - 2y &= -3\cos(3t) \ /^2 \\ (x+y)^2 + (x-2y)^2 &= 9 \\ 2x^2 - 2xy + 5y^2 &= 9 \end{aligned}$$

III Dvojnásobné vlastní číslo a jen jeden vlastní vektor

Příklad 11.5 $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}$, $\lambda_{1,2} = 2,\quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$

$$\mathbf{X} = c_1\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\,t\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} c_2\,t + c_1 - c_2 \\ -c_2\,t - c_1 \end{bmatrix}, \qquad t \in R,\ c_1, c_2 \in R$$



Př. 11.5: typ *uzel* (monokritický, nestabilní).

Jak lze poznat, o jaký typ vl. čísel jde, bez jejich výpočtu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - b\,c = \lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{\mathrm{tr}\,\mathbf{A}}\,\lambda + \underbrace{a\,d - b\,c}_{\det\mathbf{A}} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tr}\,\mathbf{A} &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det\mathbf{A} &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \end{aligned}\right\} \text{ tzv. invarianty matice}$$

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\,(\mathrm{tr}\,\mathbf{A} \pm \sqrt{D}\,), \qquad D = (\mathrm{tr}\,\mathbf{A})^2 - 4\,\det\mathbf{A}$$

- $\det\mathbf{A} = 0$ ...nejde o izolovaný bod rovnováhy, neklasifikujeme
- $\det\mathbf{A} < 0 \iff \lambda_1,\ \lambda_2$ reálné kořeny s opač. znaménky ...**sedlo**
- $\det\mathbf{A} > 0 \begin{cases} D > 0 \iff \lambda_1,\ \lambda_2 \text{ reálné, } \lambda_1 \neq \lambda_2, \text{ stejné znam.} \ldots \textbf{uzel}, \text{ as. stabilní pro } \lambda_i < 0 \\ D = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 \text{ reálné} \ldots \textbf{uzel}, \text{ asymptoticky stabilní pro } \lambda_i < 0 \\ D < 0, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A} \begin{cases} > 0 \ldots \textbf{ohnisko}, \text{ asymptoticky stabilní} \\ < 0 \ldots \textbf{ohnisko}, \text{ asymptoticky nestabilní} \\ = 0 \ldots \textbf{střed} \end{cases} \end{cases}$

Příklad 12.2 (zk. beta) Je dána lineární soustava

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

(a) Zapište fundamentální systém a obecné řešení.

(b) Ukažte, že soustava má má právě jeden bod rovnováhy, a určete jeho typ.

(c) Určete maximální řešení Cauchyho úlohy při počáteční podmínce $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) Zapište rovnice přímek, na kterých leží polopřímkové trajektorie dané soustavy. Určete tečný vektor τ v bodě $\mathbf{X}(0)$. Ve fázové rovině znázorněte fázovou trajektorii maximálního řešení C.ú.

Řešení

(a) • vlastní čísla: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 9 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 9 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -1$

• vlastní vektory: $\lambda_1 = 5$: $\quad -3\,x + y = 0 \iff y = 3\,x\,, \quad \mathbf{V}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -1$: $\quad 3\,x + y = 0 \iff y = -3\,x\,, \quad \mathbf{V}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

• $\mathrm{FS} = \left\{ \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\, \mathbf{V}^{(1)},\ \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\, \mathbf{V}^{(2)} \right\} = \left\{ \mathrm{e}^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ \mathrm{e}^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$

• $\mathbf{X} = c_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\, \mathbf{V}^{(1)} + c_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\, \mathbf{V}^{(2)} = c_1\, \mathrm{e}^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2\, \mathrm{e}^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad t \in R,\ c_1, c_2 \in R$

(b) • $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0 \;\Rightarrow\;$ matice je regulární, existuje jen jeden (izolovaný) BR

(soust. je homogenní $\Rightarrow$ BR = [0,0])

• vl. čísla mají opačná znamínka: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \;\Rightarrow\;$ typ BR je sedlo

(c) dosazení počáteční podmínky:

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{X}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} c_1 + c_2 = -4 \\ 3\,c_1 - 3\,c_2 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} c_1 = -2 \\ c_2 = -2 \end{matrix}$$

$$\mathbf{X} = -2\, \mathrm{e}^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 2\, \mathrm{e}^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad t \in R$$

(d) Jsou to přímky určené bodem rovnováhy a vlastními vektory, tj. mají rovnice

$$y = 3\,x\,,\ y = -3\,x\,, \qquad \tau = \dot{\mathbf{X}}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -36 \end{bmatrix}, \quad \tau \parallel \begin{bmatrix} -2 \\ -9 \end{bmatrix}$$

graf:
- osy, popis os
- přímky s polopřímkovými trajektoriemi, popis, která odpovídá λ_1, resp. λ_2, orientace polopř. trajekt.
- bod $\mathbf{X}(0)$, v něm vektor (rovnoběžný s) τ
- trajektorie (včetně orientace)

Příklad 12.3 (zk. alfa) Je dána lineární soustava s parametrem $p \in R$

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ p & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X}\,, \qquad \text{nebo jiný zápis:} \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= p\,x - 2\,y \end{aligned}$$

(a) Pro jaké hodnoty p má soustava izolovaný bod rovnováhy?
Kdy je typu sedlo? Kdy je typu střed? Zdůvodněte.
Dále pracujte s hodnotou $p = -4$:

(b) Zapište fundamentální systém a obecné řešení.

(c) Zapište parametrickou rovnici fázové trajektorie, která prochází bodem $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$.

(d) Znázorněte polopřímkové trajektorie dané soustavy (pokud existují). Určete tečný vektor τ v bodě $\mathbf{X}(0)$. Ve fázové rovině znázorněte fázovou trajektorii maximálního řešení C.ú.

Řešení

(a) $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ p & -2 \end{vmatrix} = -2 + p$

- soustava má izolovaný BR $\iff$ její matice je regulární, tj. $\det \mathbf{A} \neq 0 \;\Rightarrow\; p \neq 2$
- typ BR je sedlo, když $\det \mathbf{A} < 0 \;\Rightarrow\; p < 2$
- typ BR je střed $\iff$ vlastní čísla jsou ryze imaginární – může nastat jen pro $\operatorname{tr} \mathbf{A} = 0$:
  $\operatorname{tr} \mathbf{A} = 1 - 2 = -1 \;\Rightarrow$ pro žádné p není BR typu střed

nebo jinak: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ p & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(2+\lambda) + p = \lambda^2 + \underbrace{1}_{-\lambda_1-\lambda_2} \cdot \lambda + \underbrace{p-2}_{\lambda_1 \cdot \lambda_2} = 0$

střed $\iff$ kořeny jsou ryze imaginární $\iff$ koeficient u λ je nula (a poslední koeficient je kladný), nenastane pro žádné p

sedlo $\iff$ kořeny jsou reálné, s opačnými znaménky:
$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\,(-1 \pm \sqrt{D}\,)\,, D > 0\,,$ jeden kořen je vždy záporný, druhý má být kladný:
$-1 + \sqrt{D} > 0 \iff \sqrt{D} > 1 \iff D > 1 \iff 1 - 4\,(p-2) > 1 \iff 4\,(p-2) < 0 \iff p < 2$

(b) $p = -4$:

- vlastní čísla: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 2,\; \lambda_2 = -3$
- vlastní vektory: $\lambda_1 = 2$: $-x - y = 0 \iff y = -x\,, \quad \mathbf{V}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

  $\lambda_2 = -3$: $4\,x - y = 0 \iff y = 4\,x\,, \quad \mathbf{V}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$
- $\mathrm{FS} = \left\{ \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,\mathbf{V}^{(1)},\; \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\,\mathbf{V}^{(2)} \right\} = \left\{ \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\; \mathrm{e}^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$
- $\mathbf{X} = c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,\mathbf{V}^{(1)} + c_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\,\mathbf{V}^{(2)} = c_1\,\mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad t \in R,\; c_1, c_2 \in R$

(c) dosazení počáteční podmínky:

$$\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix} = \mathbf{X}(0) = c_1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{c} c_1 + c_2 = 0\\ -c_1 + 4\,c_2 = 5\end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{c} c_1 = -1\\ c_2 = 1\end{array}$$

$$\mathbf{X} = -\mathrm{e}^{2\,t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \mathrm{e}^{-3\,t}\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}, \qquad t \in R$$

(d) $\tau(0,5) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -4 & -2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\-10\end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$, graf podle návodu v př. 12.2

Příklad 12.4 Je dána lineární soustava

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix}-4 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

Najděte body rovnováhy, určete jejich typ a načrtněte část fázové trajektorie procházející bodem $\mathbf{X}(0)$ v jeho okolí – nemusíte počítat její parametrické vyjádření.

Řešení

body rovnováhy jsou určené podmínkou $\dot{\mathbf{X}} = 0$, tedy: $\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}\mathbf{X} = -\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$

$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix}-4 & 2\\ -1 & -2\end{vmatrix} = 8 + 2 = 10 \neq 0 \;\Rightarrow$ ex. právě jedno řešení – jeden (izolovaný) BR:

$$\begin{array}{rl} -4\,x + 2\,y = & -4\\ -1\,x - 2\,y = & -1\end{array} \;\Rightarrow\; x = 1,\ y = 0\,, \qquad \boxed{\mathrm{BR} = [\,1,\,0\,]}\,.$$

$\det \mathbf{A} > 0$, takže vidíme hned, že nejde o sedlo, $\operatorname{tr}\mathbf{A} = -4 - 2 = -6 \neq 0$, takže to není ani střed.

K rozlišení mezi uzlem a ohniskem potřebujeme zjistit, jestli jsou vlastní čísla reálná (uzel), nebo komplexní (ohnisko):

$$\begin{vmatrix}-4-\lambda & 2\\ -1 & -2-\lambda\end{vmatrix} = \ \dots\ = \lambda^2 + 6\,\lambda + 10 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = -3 \pm i$$

Vl. čísla nejsou reálná, takže $\boxed{\text{BR je ohnisko}}$. Reálná část vl. čísel je záporná, takže jde o $\boxed{\text{stabilní}}$ ohnisko, to znamená, že všechny fázové trajektorie se k němu přibližují.

$$\tau(2,2) = \begin{pmatrix}-4 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-5\end{bmatrix}$$

Do grafu zakreslíme BR = [1, 0], bod $\mathbf{X}(0) = [\,2,\,2\,]$ a z něj vycházející vektor rovnoběžný a stejně orientovaný s τ, např. (0, -1). Fázová trajektorie procházející BR v něm má tečný vektor τ a spirálovitě se blíží k BR, takže v tomto případě se stáčí v záporném směru (po směru hodinových ručiček).