Autonomní soustavy 2. řádu

Autonomní soustava 2. řádu v normálním tvaru:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{bmatrix}, \quad \text{nebo po složkách} \quad \begin{array}{l} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{array}, \quad P,\, Q \in \mathcal{C}^1(H), \quad \text{oblast } H \subset R^2 \tag{1}$$

řešení soustavy (1) má tvar $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, $t \in (a,b)$ (max. řešení: $t \in R$)

integrální křivka: graf řešení, tj. $[\,t, x(t), y(t)] \subset R^3$

trajektorie: graf oboru hodnot řešení, tj. $[x(t), y(t)] \subset R^2$

fázová rovina: rovina xy

fázový obraz: množina všech trajektorií

$h(\mathbf{X})$ se nazývá **první integrál soustavy** (1) $\iff$ $\mathbf{F}(\mathbf{X}) \cdot \nabla h(\mathbf{X}) = 0$

rovnice trajektorií: $h(\mathbf{X}) = c$, jsou řešeními rovnice
$Q(x,y)\mathrm{d}x - P(x,y)\mathrm{d}y = 0$ (pak $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \equiv \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{P}{Q}$, nebo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \equiv \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{Q}{P}$, nebo $P = Q = 0$)

$\mathbf{X} = [x,y]$ je **singulární bod** rovnice (1) $\iff$ $P(x,y) = 0$ a $Q(x,y) = 0$

$\mathbf{X}(t)$ je **stacionární řešení** rovnice (1) $\iff$ $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_R$, $t \in R$, $\mathbf{X}_R$ . . . **bod rovnováhy**

$\mathbf{X}_R$ se nazývá **izolovaný** $\iff$ existuje jeho okolí, které neobsahuje žádný jiný bod rovnováhy

Cauchyho úloha:

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = P(x,y) & x(t_0) = x_0 \\ \dot{y} = Q(x,y) & y(t_0) = y_0 \end{array}, \qquad \text{nebo vektorově:} \quad \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}(t_0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Jacobiho matice soustavy:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Věta

$\mathbf{X}_R$ je bod rovnováhy rovnice (1) $\iff$ $\mathbf{X}_R$ je singulární bod.

Věta - o existenci a jednoznačnosti řešení

Nechť funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ a všechny jejich parciální derivace jsou spojité v oblasti $H \subset R^2$ (tj. P, Q a $\mathbf{J}$ jsou spojité v H).

Pak každým bodem $[x_0,\, y_0] \in H$ prochází právě jedna trajektorie.
Volně řečeno: celá oblast H je pokryta trajektoriemi, které se navzájem nikde nekříží.

Nemáme obecný návod, jak najít fázové trajektorie, resp. první integrál, autonomních nelineárních rovnic (jen pro exaktní rovnice – a ani pro ty neumíme najít řešení, pouze trajektorie).

Příklad 13.1 Je dána soustava dif. rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \ln(2x+y) + \frac{1}{x} \\ \dot{y} &= x^2 + \sqrt{y+1} \end{aligned}$$

(a) Zapište Jacobiho matici soustavy.

(b) Zapište postačující podmínky existence a jednoznačnosti max. řešení C. ú. pro danou soustavu.

(c) Ve fázové rovině znázorněte a zapište oblasti, v nichž každým bodem prochází právě jedna trajektorie.

(d) Zapište všechny oblasti existence a jednoznačnosti řešení (v R^3).

Řešení

(a) $P(x,y) = \ln(2x+y) + \frac{1}{x}$, $\quad Q(x,y) = x^2 + \sqrt{y+1}$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{2x+y} - \frac{1}{x^2} & \frac{1}{2x+y} \\ 2\,x & \frac{1}{2\sqrt{y+1}} \end{pmatrix}$$

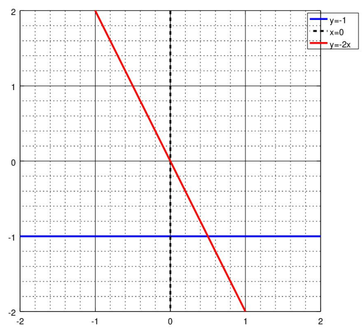
(b) P, Q a $\mathbf{J}$ jsou spojité v oblasti $H \subset R^2$:

$P:\ 2x+y>0, x \neq 0$

$Q:\ y > -1$ (podmínky pro oblasti, tj. bez hranice)

$\mathbf{J}$: žádná další podmínka

(c) $H_1 = \{[x,y] \in R^2 :\ y > -2x,\ x < 0\}$
$H_2 = \{[x,y] \in R^2 :\ y > -2x,\ x > 0,\ y > -1\}$



hraniční přímky oblastí H_1 a H_1 (to ještě není znázornění těch oblastí!)

(d) Oblasti existence a jednoznačnosti řešení jsou: $\quad \Omega_1 = R \times H_1, \quad \Omega_2 = R \times H_2$

Příklad 13.2 Je dána soustava dif. rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x\,y \\ \dot{y} &= y^2+1 \end{aligned}$$

(a) Ukažte, že $h(x,y) = x^2(1+y^2)$ je prvním integrálem soustavy.

(b) Ukažte, že i funkce $g(x,y) = \frac{1}{x^2(1+y^2)}$ a $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2(1+y^2)}$ jsou první integrály soustavy.

(c) Určete rovnici fázové trajektorie procházející bodem M = [-3,2].

Řešení

(a) první integrál má splňovat rovnici $\mathbf{F}(\mathbf{X}) \cdot \nabla h(\mathbf{X}) = 0$:

$\frac{\partial h}{\partial x} = 2x\,(1+y^2)\,, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 2y\,x^2\,, \quad \nabla h(\mathbf{X}) = (\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}) = (2x\,(1+y^2),\, 2y\,x^2)$

$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \cdot \nabla h(\mathbf{X}) = (-x\,y,\, y^2+1) \cdot (2x\,(1+y^2),\, 2y\,x^2) = -x\,y\,2x\,(1+y^2) + (y^2+1)\,2y\,x^2 = 0$

Poznámka: $h(x,y)$ není potenciál pole $(y^2+1,\, x\,y)$ – ten ani neexistuje, protože rovnice není exaktní

(b) $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{2x\,(1+y^2)}{x^4(1+y^2)^2} = -\frac{2}{x^3(1+y^2)}\,, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{2y\,x^2}{x^4(1+y^2)^2} = -\frac{2y}{x^2(1+y^2)^2}$

$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \cdot \nabla g(\mathbf{X}) = (-x\,y,\, y^2+1) \cdot (-\frac{2}{x^3(1+y^2)}, -\frac{2y}{x^2(1+y^2)^2}) = \frac{2x\,y}{x^3(1+y^2)} - \frac{(y^2+1)\cdot 2y}{x^2(1+y^2)^2} = 0$

$g(\mathbf{X})$ je prvním integrálem jen v oblastech $H_1 = (-\infty,0) \times R$ a $H_2 = (0,\infty) \times R$, ne v R^2

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\,(1+y^2)\,\mathrm{e}^{x^2(1+y^2)}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,x^2\,\mathrm{e}^{x^2(1+y^2)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{X}) \cdot \nabla f(\mathbf{X}) &= (-x\,y,\, y^2+1) \cdot (2x\,(1+y^2)\,\mathrm{e}^{x^2(1+y^2)},\, 2y\,x^2\,\mathrm{e}^{x^2(1+y^2)}) = \\ &= -x\,y\,2x\,(1+y^2)\,\mathrm{e}^{x^2(1+y^2)} + (y^2+1)\,2y\,x^2\,\mathrm{e}^{x^2(1+y^2)} = 0 \end{aligned}$$

(c) Můžeme zvolit kterýkoliv z prvních integrálů, např. $h(x,y)$.

Všechny fázové trajektorie jsou popsány rovnicemi $h(x,y) = c$,

$h(M) = h(-3,2) = (-3)^2(1+2^2) = 9 \cdot 5 = 45 \;\Rightarrow\; c = 45\,,$

rovnice trajektorie procházející bodem M je $x^2(1+y^2) = 45$

Jak bychom nějaký první integrál soustavy našli? Například separací proměnných:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \equiv \frac{\dot{y}}{\dot{x}} &= \frac{y^2+1}{-x\,y} \\ \int \frac{y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y &= \int -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ \frac{1}{2}\ln(y^2+1) &= -\ln|x| + c \\ \ln(y^2+1) &= -2\,\ln|x| + 2c \\ \ln(x^2\,(y^2+1)) &= 2c \end{aligned}$$

pozn.: separovatelnou rovnici lze vždy zapsat jako exakt. rovnici, viz druhý řádek výše:

$\frac{y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 0$

Newtonské soustavy

$$\ddot{x} + g(x) = 0\,, \qquad \text{totéž jako soustava:} \quad \begin{array}{rrl} \dot{x} = & y & \equiv P(x,y) \\ \dot{y} = & -g(x) & \equiv Q(x,y) \end{array}$$

fázové trajektorie: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \equiv \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-g(x)}{y}$, lze řešit separací proměnných: $\int y\,\mathrm{d}y = -\int g(x)\mathrm{d}x$

1. integrál: $y\,\mathrm{d}y + g(x)\mathrm{d}x = 0$ ...exaktní rovnice, navíc zde platí $h(x,y) = \int y\,\mathrm{d}y + \int g(x)\mathrm{d}x$

Příklad 13.3 (zk. beta): Je dána soustava dif. rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -2\,x\,(x-1) \end{aligned}$$

(a) Zapište Jacobiho matici a ukažte, že každým bodem fázové roviny prochází právě jedna trajektorie.

(b) Najděte body rovnováhy.

(c) Najděte (obecnou) rovnici fázových trajektorií a určete rovnici fázové trajektorie procházející bodem M = [1,2].

Řešení

(a) $P(x,y) = y\,, \quad Q(x,y) = -2\,x\,(x-1)$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4\,x+2 & 0 \end{pmatrix}$$

P, Q a $\mathbf{J}$ jsou spojité ve fázové rovině xy ($= R^2$), takže každým jejím bodem prochází právě jedna trajektorie.

(b) Body rovnováhy: má platit $P(x,y) = 0$ a zároveň $Q(x,y) = 0$, tj.

$y = 0, \quad -2\,x\,(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \; x = 0 \vee x = 1,$

$B_1 = [0,0],\; B_2 = [1,0]$

(c)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \equiv \frac{\dot{y}}{\dot{x}} &= \frac{-2\,x\,(x-1)}{y} \\ y\,\mathrm{d}y &= -2\,x\,(x-1)\,\mathrm{d}x \\ \int y\,\mathrm{d}y &= -\int 2\,x\,(x-1)\,\mathrm{d}x \\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{2}{3}\,x^3 + x^2 + c \end{aligned}$$

rovnice fázových trajektorií: $\frac{y^2}{2} + \frac{2}{3}\,x^3 - x^2 = c$

rovnici fázové trajektorie procházející bodem M = [1,2] určíme dosazením M do obecné rovnice a dopočítáním c:

$\frac{2^2}{2} + \frac{2}{3}\cdot 1^3 - 1^2 = c \quad \Rightarrow \; c = \frac{4}{2} + \frac{2}{3} - 1 = \frac{5}{3}$, rovnice je $\frac{y^2}{2} + \frac{2}{3}\,x^3 - x^2 = \frac{5}{3}$

Příklad 13.4 (zk. alfa): Je dána soustava dif. rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2\,y + 1 \\ \dot{y} &= \frac{1}{x} - y \end{aligned}$$

(a) Napište rovnici fázové trajektorie, která prochází bodem D = [1,-5].

(b) Ověřte, že bod B = [1,1] je bod rovnováhy, a najděte ostatní body rovnováhy.

(c) Zapište Jacobiho matici $\mathbf{J}$, označte $\mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathrm{B})$, tj. Jacobiho matici vyjádřenou v bodě B. Pro rovnici $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\,\mathbf{X}$ určete body rovnováhy a jejich typ.

Řešení

(a)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \equiv \frac{\dot{y}}{\dot{x}} &= \frac{\frac{1}{x} - y}{x - 2\,y + 1} \\ (x - 2\,y + 1)\,\mathrm{d}y &= (\frac{1}{x} - y)\,\mathrm{d}x \\ \underbrace{(y - \frac{1}{x})}_{M(x,y)}\,\mathrm{d}x + \underbrace{(x - 2\,y + 1)}_{N(x,y)}\,\mathrm{d}y &= 0 \end{aligned}$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$, všechny parc. der. M, N jsou spojité v $G_1 = (-\infty, 0) \times R$ a v $G_2 = (0, \infty) \times R$

$\Rightarrow$ rovnice je v těchto oblastech exaktní (viz př. 7.5), D $\in G_2$. Hledáme potenciál pole (M, N):

$h(x, y) = \int y - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\,y - \ln|x| + c(y)$

$h(x, y) = \int x - 2\,y + 1\,\mathrm{d}y = x\,y - y^2 + y + c(x)$

$h(x, y) = x\,y - \ln|x| - y^2 + y + c$

obecná rovnice trajektorií je $x\,y - \ln|x| - y^2 + y = c$, dosadíme do ní D = [1,-5]:

$c = 1 \cdot (-5) - \ln 1 - (-5)^2 - 5 = -5 - 0 - 25 - 5 = -35$

trajektorie procházející bodem D: $\quad x\,y - \ln|x| - y^2 + y = -35\,, \quad [x, y] \in G_2$

(b) B = [1,1] je bod rovnováhy: $M(\mathrm{B}) = 1 - 1 = 0$, $N(\mathrm{B}) = 1 - 2 + 1 = 0$

ostatní BR: $y - \frac{1}{x} = 0$, $x - 2\,y + 1 = 0$, dosazení $y = \frac{1}{x}$ z první rov. do druhé:

$x - \frac{2}{x} + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 2 + x = 0 \;\Rightarrow\; x = 1 \vee x = -2$

existuje ještě jeden BR o souřadnicích [-2, -1/2].

(c) $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{x^2} & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathrm{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, rovnice $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\,\mathbf{X}$ viz cv. 11, 12:

homogenní lin. soustava s konstantními koeficienty má jediný BR = [0,0], je to sedlový bod (protože $\det \mathbf{A} = -1 - 2 = -3 < 0$).

nebo vypočítáme vl. čísla: $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ -\frac{1}{x^2} & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -(1 - \lambda)(1 + \lambda) - 2 = -1 + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 3 = 0$,

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ …reálná vl. čísla s opačnými znamínky (vl. vekt. jsou $(2, 1 \pm \sqrt{3})^{\mathrm{T}}$)

Grafické znázornění předchozího příkladu ve fázové rovině:

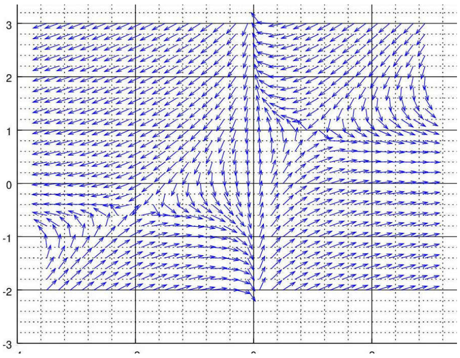


Figure 1: Fázové pole zahrnující oba body rovnováhy.

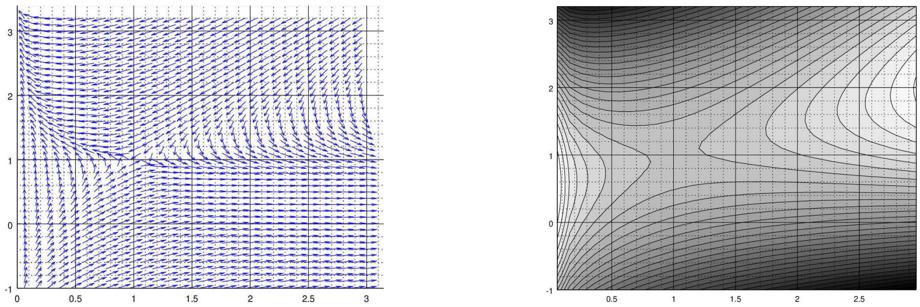


Figure 2: **Vlevo:** fázové pole v okolí BR = [1,1]. **Vpravo:** fázové trajektorie v okolí B = [1,1].

Ilustrace k bodu c) – co jsme vlastně spočítali? Lineární aproximaci v okolí bodu B:

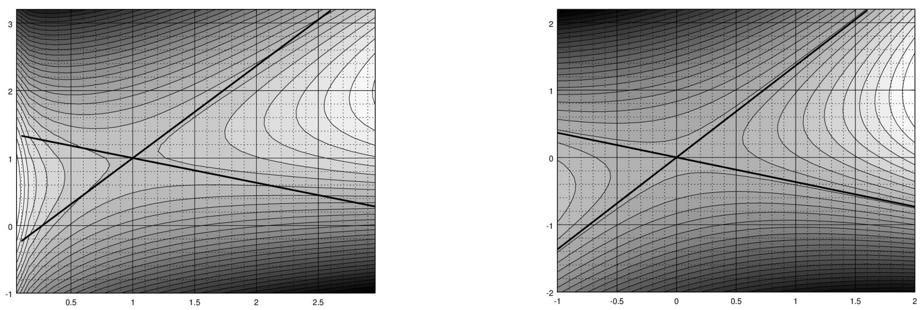


Figure 3: **Vlevo:** fázové trajektorie dané rovnice v okolí B = [1,1]. (přímky zde nepředstavují trajektorie původní rovnice, ale rovnice linearizované v okolí bodu B.) **Vpravo:** fázové trajektorie rovnice linearizované v okolí bodu B, tj. rovnice $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\,\mathbf{X}$, včetně jejích polopřímkových trajektorií (B je posunutý do počátku).

.