Číselné řady – kritéria konvergence

I Řady s kladnými členy: $a_k > 0$

Příklad 2.1: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ ... geometrická řada, $q = \frac{1}{3} < 1 \quad \Rightarrow$ konverguje

$$\text{pozorování:} \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^k} = \frac{1}{3} = q$$

■ **d'Alembertovo kritérium (podílové limitní)**: nechť $a_k > 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q$. Pak platí

- $q < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_k a_k$ konverguje
- $q > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_k a_k$ diverguje

Příklad 2.2: **(a)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^4}$ **(b)** e^3 : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$ **(c)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ **(d)*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

Řešení:

(a) $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim \frac{2^{k+1}}{(k+1)^4} \cdot \frac{k^4}{2^k} = \lim 2 \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^4 = 2 > 1 \ \Rightarrow$ diverguje

(b) $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim \frac{3^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{3^k} = \lim \frac{3}{k+1} = 0 < 1 \ \Rightarrow$ konverguje

(c) $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k}{1} = \lim \frac{k}{k+1} = 1 \ \Rightarrow$ dle d'Al. nelze rozhodnout

(d) $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} = \lim \frac{k+1}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{1} = \lim \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1 \ \Rightarrow$ konverguje
– z 1. semestru jsme použili $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

■ **Integrální kritérium**:

Nechť $f(x)$ je spojitá a nerostoucí v $\langle m, \infty)$ a nechť $f(k) = a_k$ pro $k \geq m$. Potom

- $\sum_k a_k$ konverguje $\iff$ konverguje $\int\limits_m^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

Příklad 2.3 – Dirichletova řada: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, $p > 0$

- $p = 1$: $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^{\infty} = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje
- $p \neq 1$:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\infty} x^{-p}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^{\infty} = \begin{cases} \infty & \text{pro } p < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{diverguje} \\ \frac{1}{p-1} & \text{pro } p > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{konverguje} \end{cases}$$

Dirichletova řada konverguje, právě když $p > 1$.

■ **Srovnávací kritérium**: nechť $a_k \geq b_k$ pro $k > m,\ a_k > 0,\ b_k > 0$. Pak platí

- $\sum_k a_k$ konverguje $\quad\Rightarrow\ \sum_k b_k$ konverguje
- $\sum_k b_k$ diverguje $\quad\Rightarrow\ \sum_k a_k$ diverguje

Příklad 2.4: **(a)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{k^2}$ **(b)** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ **(c)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$

Řešení:

(a) $\sin x \leq x$ pro $x \geq 0 \ \Rightarrow\ \sin\frac{\pi}{k^2} \leq \frac{\pi}{k^2}\ \Rightarrow$ konverguje

(b) $\ln x < x$ pro $x > 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{\ln k} \geq \frac{1}{k}\ \Rightarrow$ diverguje

(c) $\frac{1}{k^2+k} \leq \frac{1}{k^2}\ \Rightarrow$ konverguje

■ **Podílové srovnávací kritérium**: nechť $a_k > 0,\ b_k > 0$ a $\lim\frac{a_k}{b_k} = L \in R,\ L \neq 0$. Potom

- $\sum_k a_k$ konverguje $\quad\Longleftrightarrow\quad \sum_k b_k$ konverguje

Příklad 2.5: **(a)** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{3}{k^2-k}$ **(b)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{k^3+k^2}$

Řešení:

(a) $a_k = \frac{3}{k^2-k}$, zvolme $b_k = \frac{1}{k^2}$: $\lim\frac{a_k}{b_k} = \lim\frac{3\,k^2}{k^2+k} = 3 \neq 0,\ \ b_k$ konverguje $\Rightarrow\ a_k$ taky konverguje.

(b) $a_k = \frac{(k+1)^2}{k^3+k^2} = \frac{k^2+2\,k+1}{k^3+k^2}$, zvolme $b_k = \frac{1}{k}$: $\lim\frac{a_k}{b_k} = \lim\frac{k^3+2\,k^2+k}{k^3+k^2} = 1 \neq 0$,

b_k diverguje $\Rightarrow\ a_k$ taky diverguje.

II Alternující řada: $\quad \sum_k (-1)^k\, c_k, \quad c_k > 0$

■ **Leibnizovo kritérium**: nechť c_k je **nerostoucí** a $\lim c_k = 0$.

Pak $\sum_k (-1)^k\, c_k$ konverguje a platí odhad $|R_n| \equiv |\sum\limits_{n+1}^{\infty}(-1)^k\, c_k| \leq c_{n+1}$

Příklad 2.6: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ … alternující harmonická řada: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$

Dokažte, že konverguje. Jaká vznikne chyba, když místo jejího součtu sečteme jen prvních 5 členů?

Řešení: alternující, posloupnost abs. hodnot je nerostoucí: $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$, $\lim\frac{1}{k} = 0$,

– tedy podle Leibnizova kritéria konverguje, $|R_5| \leq c_6 = \frac{1}{6}$

Absolutní a relativní konvergence

- Řada $\sum_k a_k$ konverguje *absolutně* $\iff$ řada $\sum_k |a_k|$ konverguje.
- Řada $\sum_k a_k$ konverguje *relativně* $\iff$ řada $\sum_k a_k$ konverguje a řada $\sum_k |a_k|$ diverguje.

Všechny řady s kladnými členy (příklady 2.1 až 2.5) buď konvergují absolutně, nebo divergují. Alternující harmonická řada (příklad 2.6) nekonverguje absolutně, ale konverguje relativně.

Jak zkoumat konvergenci dané číselné řady $\sum_k a_k$

Doporučený postup:

1. Pokud je řada geometrická, určíme q a ověříme, zda $|q| < 1$ (pak řada konverguje *absolutně*, jinak diverguje). Pro takovou řadu umíme najít i součet - víme o ní všechno.
2. Ověříme *nutnou* podmínku konvergence řady, tj. zda $\lim a_k = 0$. Pokud to neplatí, řada diverguje.
3. Je-li řada alternující, zkusíme uplatnit Leibnizovo kritérium (zjistíme tak ale pouze *relativní* konvergenci).
4. Zkusíme zjistit, zda řada konverguje *absolutně* pomocí některého z kritérií na řady s kladnými členy, které použijeme na řadu $\sum_k |a_k|$ (nejjednodušší je asi začít d'Alembertovým kritériem).

Příklad 2.8:
zjistěte, zda řady konvergují (K) – absolutně (A) nebo relativně (R) – nebo divergují (D)

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$ **(b)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-7)^k}{k!}$ **(c)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ **(d)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k-1}}{k+2}$ **(e)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin^k(\frac{\pi}{4})$

(f) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ **(g)** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ **(h)** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$ **(i)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\ln 5)^k$

Výsledky:

(a) KA, geom.řada
(b) KA, d'Alemb. krit.
(c) KR, Leib. krit., podíl. srov. s odpovídající Dirichletovou řadou
(d) D, podíl. srov. s odpovídající Dirichletovou řadou
(e) KA, geom.řada
(f) D, srov. s odpovídající Dirichletovou řadou
(g) D, integrální krit.
(h) KA, integrální krit.
(i) D, geom.řada

Příklad 2.7: Je dána mocninná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+2)^{2k}}{9^k(k+3)}$$

Určete interval konvergence a chování řady v krajních bodech.

Řešení: interval konvergence – d'Alemb. krit. (počítáme pro libovolné pevně zvolené x):

$$\lim \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim \frac{|x+2|^{2(k+1)}}{9^{k+1}(k+4)} \cdot \frac{9^k(k+3)}{|x+2|^{2k}} = \lim \frac{1}{9} \frac{k+3}{k+4} \cdot \frac{|x+2|^{2k+2}}{|x+2|^{2k}} = \frac{1}{9}|x+2|^2 \lim \frac{k+3}{k+4} =$$

$$= \frac{1}{9}|x+2|^2 < 1 \iff |x+2|^2 < 9 \iff |x+2| < 3 \iff x \in (-5,\, 1) \quad \text{– konv. absolutně}$$

$$\frac{1}{9}|x+2|^2 > 1 \iff |x+2|^2 > 9 \iff |x+2| > 3 \iff x \in (-\infty,\, -5) \cup (1,\, \infty) \text{ – diverg.}$$

krajní body:

$x = 1$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{3^{2k}}{9^k(k+3)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+3}$ – diverguje (podílové srovnávací kritérium, Dirichletova řada $\sum \frac{1}{k}$)

$x = -5$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{2k}}{9^k(k+3)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{k+3} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+3}$ – diverguje (jako výše)