Operace s řadami

Příklad 3.1: určete součet řady $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{2}{3^k}\right)$

Řešení: řadu můžeme vyjádřit jako lin. kombinaci geometrických řad:

$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{2}{3^k}\right)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}+2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}, \quad q_1=\frac{1}{2},\ S_1=2,\ q_2=\frac{1}{3},\ S_2=\frac{3}{2}$, obě konv. absolutně,

výsledná řada tedy taky konverguje absolutně a její součet je $S_1+2S_2=2+2\cdot\frac{3}{2}=5$.

Obecně platí: pokud sčítané řady konvergují, jejich součet taky konverguje.

Násobení absolutně konvergentních řad:

$(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)=a_1b_1+a_2b_1+a_3b_1+a_1b_2+a_2b_2+a_3b_2+a_1b_3+a_2b_3+a_3b_3$

zobecnění na nekonečný součin:

$\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\right)\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k\right)=\sum\limits_{k=2}^{\infty}c_k, \quad$ kde $\ c_k=\sum\limits_{m=1}^{k-1}a_m\,b_{k-m},\ $ tj.

$c_2=a_1b_1,\ \ c_3=a_1b_2+a_2b_1,\ \ c_4=a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1,$ ... atd.

Příklad 3.2: zapište první tři (nenul.) členy součinu řad $\sum\limits_{k=2}^{\infty}c_k=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{36}{k^2}\right)\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{144}{(k+1)^2}\right)$

Řešení: obě řady konvergují absolutně, můžeme je tedy vynásobit, výsledná řada bude taky konvergovat absolutně. Diagonální schéma:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{36}{k^2}=36+9+4+\ldots \quad , \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{144}{(k+1)^2}=36+16+9+\ldots$

	36	9	4	...
36	$36\cdot36$	$36\cdot9$	$36\cdot4$	...
16	$16\cdot36$	$16\cdot9$	...	...
9	$9\cdot36$	...	...	...
...	...	...	...	...

$c_2=36\cdot36=1\,296$

$c_3=16\cdot36+36\cdot9=900$

$c_4=9\cdot36+16\cdot9+36\cdot4=612$

Řady funkcí

$\sum_k f_k(x)\ \equiv\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)\ =\ f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots$

Konvergence (bodová):

Řada $\sum_k f_k(x)$ **konverguje v bodě** x_0 $\Leftrightarrow$ *číselná* řada $\sum_k f_k(x_0)$ je konvergentní.

Obor konvergence O je množina bodů, v nichž řada konverguje. Viz Příklad 1.3 z 1. cvičení.

Součet řady: pro $x\in O$ je součet řady $S(x)$ limita částečných součtů $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)$:

$S(x)\equiv\sum_k f_k(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$

Mocninná řada se středem x_0 a koeficienty c_k je $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$

Interval konvergence je $I = (x_0 - R,\, x_0 + R)$, kde $R \in \langle 0, \infty)$ je **poloměr** konvergence
(*obor* konvergence O může zahrnovat navíc i jeden nebo oba krajní body)

Vlastnosti mocninné řady

1. konverguje *absolutně* na intervalu konvergence I, v krajních bodech může konvergovat absolutně, relativně nebo divergovat (nemusí se chovat v obou krajních bodech stejně; pouze absolutní konvergence nastává buď v obou krajních bodech, nebo v žádném)
2. diverguje na $(-\infty,\, x_0 - R) \cup (x_0 + R,\, \infty)$
3. součet řady $S(x)$ je *spojitá funkce* v oboru konv. O, na I má spojité i derivace všech řádů
4. na intervalu I lze řadu *derivovat* člen po členu
5. na intervalu I lze řadu *integrovat* člen po členu

Příklad 3.3 - dokažte, že následující řady konvergují absolutně v R, a zapamatujte si je:

- $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\ , \quad x \in \mathrm{R}$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\ , \quad x \in \mathrm{R}$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\ , \quad x \in \mathrm{R}$

(absolutní konvergence – použijte d'Alembertovo kritérium)

Příklad 3.4: rozviňte do mocninné řady o středu x_0 následující funkce:

(a) $\cos x^2, \quad x_0 = 0$ (b) $\mathrm{e}^x, \quad x_0 = 2$ (c) $\sin(-x^2), \quad x_0 = 0$

Řešení:

(a) dosadíme x^2 do rozvoje pro $\cos x$:

$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k}}{(2k)!}\ , \quad x \in \mathrm{R}$

(b) $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{(x-2)+2} = \mathrm{e}^2\, \mathrm{e}^{x-2}$ a dosadíme $x - 2$ do rozvoje pro e^x:

$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^2\, \mathrm{e}^{x-2} = \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2(x-2) + \mathrm{e}^2 \frac{(x-2)^2}{2!} + \mathrm{e}^2 \frac{(x-2)^3}{3!} + \mathrm{e}^2 \frac{(x-2)^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^2 \frac{(x-2)^k}{k!}\ , \quad x \in \mathrm{R}$

– použili jsme násobení mocninné řady konstantou, viz další strana

(c) dosadíme $-x^2$ do rozvoje pro $\sin x$:

$\sin(-x^2) = -x^2 + \frac{x^6}{3!} - \frac{x^{10}}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2(2k+1)}}{(2k+1)!}\ , \quad x \in \mathrm{R}$

Operace s mocninnými řadami

Sčítáme a násobíme jen řady se stejným středem x_0. Označme

$S_1(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k, \quad x \in (x_0 - R_1,\, x_0 + R_1)$

$S_2(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k\,(x-x_0)^k, \quad x \in (x_0 - R_2,\, x_0 + R_2), \qquad R = \min(R_1,\, R_2)$

- $\alpha \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k \equiv \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha \cdot a_k\,(x-x_0)^k = \alpha \cdot S_1(x)\ , \quad x \in (x_0 - R_1,\, x_0 + R_1)$
- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k + \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k\,(x-x_0)^k \equiv \sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)\,(x-x_0)^k = S_1(x) + S_2(x)\ , \quad x \in (x_0 - R,\, x_0 + R)$
- $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k\,(x-x_0)^k\right) \equiv \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-x_0)^k = S_1(x) \cdot S_2(x)\ , \quad x \in (x_0 - R,\, x_0 + R),$

  kde $c_k = \sum\limits_{m=0}^{k} a_m\, b_{k-m}$, tj. $c_0 = a_0 b_0, \quad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \quad c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \ldots$ atd.

  poznámka: mocninné řady konv. abs. uvnitř int. konvergence, lze tedy měnit pořadí členů

Příklad 3.5:

Určete poloměr konvergence součtu řad $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\,(x-2)^k$ a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}\,(x-2)^k$, tj. řady $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right)\,(x-2)^k$

Řešení:

Poloměr konvergence první řady: geometrická, $|q| = |\frac{x-2}{2}| < 1 \iff |x-2| < 2 \ \Rightarrow\ R_1 = 2$,

nebo: $\lim \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim \frac{|x-2|^{k+1}}{2^{k+1}}\,\frac{2^k}{|x-2|^k} = \frac{1}{2}\,|x-2| < 1 \iff |x-2| < 2 \ \Rightarrow\ R_1 = 2$.

Podobně určíme poloměr konvergence druhé řady $R_2 = 3$.

Poloměr konvergence R součtu řad je menší z nich, tj. $R = 2$.

Příklad 3.6: Určete první 4 nenulové členy rozvoje funkce $g(x)$ do mocninné řady se středem v bodě 0 a určete interval konvergence této řady:

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$$

Řešení: $g(x)$ je součinem funkcí, které snadno rozvineme do mocninných řad o středu $x_0 = 0$:

$\mathrm{e}^{2x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \ldots, \quad R_1 = \infty$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad R_2 = 1,$ pro součin řad použijeme diag. schéma:

	1	2	2	$\frac{4}{3}$
1	1	2	2	$\frac{4}{3}$
-1	-1	-2	-2	...
1	1	2	...	...
-1	-1	...	...	...

$c_0 = 1, \quad c_1 = -1 + 2 = 1, \quad c_2 = 1 - 2 + 2 = 1, \quad c_3 = -1 + 2 - 2 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

$g(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \ldots\ , \quad x \in (-1,\, 1)$

Příklad 3.7: určete poloměr konvergence R a obor konvergence O řad

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x+1)^{3k}}{8^k (k^2+1)}$ (b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (x-2)^k}{\sqrt{k^2+4}}$

Řešení:

$$\text{(a)} \quad \lim \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim \frac{|x+1|^{3(k+1)}}{8^{k+1}((k+1)^2+1)} \cdot \frac{8^k(k^2+1)}{|x+1|^{3k}} = \frac{|x+1|^3}{8} \lim \frac{k^2+1}{(k+1)^2+1} < 1$$

$$\iff \quad |x+1|^3 < 8 \quad \iff \quad |x+1| < 2 \ \Rightarrow \ R = 2,\ x_0 = -1,\ I = (-3,\, 1)$$

krajní body:

$x = -3$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-2)^{3k}}{8^k (k^2+1)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{4k} 2^{3k}}{8^k (k^2+1)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ ... konv. abs. (porovnání s Dirichlet. řadou $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$)

$x = 1$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{3k}}{8^k (k^2+1)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$ ... konv. abs. (jako výše)

$$\text{(b)} \quad \lim \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim \frac{|x-2|^{k+1}}{\sqrt{(k+1)^2+4}} \cdot \frac{\sqrt{k^2+4}}{|x-2|^k} = |x-2| \lim \frac{\sqrt{k^2+4}}{\sqrt{(k+1)^2+4}} < 1$$

$$\iff \quad |x-2| < 1 \ \Rightarrow \ R = 1,\ x_0 = 2,\ I = (1,\, 3)$$

krajní body:

$x = 1$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(-1)^k}{\sqrt{k^2+4}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{\sqrt{k^2+4}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{k^2+4}}$ ... diverguje (porovnání s Dirich. řadou $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$)

$x = 3$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 1^k}{\sqrt{k^2+4}}$ ... konv. relativně (Leibniz. kritérium - alternující řada, abs. hodnoty divergují)

Jak zkoumat konvergenci dané mocninné řady $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-x_0)^k$

Doporučený postup:

1. Pokud je řada geometrická, určíme q a z podmínky $|q| < 1$ interval konvergence I. V něm řada konverguje absolutně, všude jinde diverguje, tj. obor konvergence O se rovná I. Pro takovou řadu umíme najít i součet – víme o ní všechno.

2. Určíme interval konvergence I pomocí d'Alembertova kritéria. V něm řada konverguje absolutně. Pro krajní body intervalu I vyjde limita v d'Alembertově kritériu rovna 1, o konvergenci tedy podle tohoto kritéria nelze rozhodnout. Všude mimo I a jeho krajní body řada diverguje.

3. Zjistíme, zda do oboru konvergence O patří i některý z krajních bodů intervalu I (musíme použít nějaké jiné kritérium než d'Alembertovo). V krajních bodech I nemusí být konvergence absolutní, lze tedy uplatnit i Leibnizovo kritérium.

Taylorova řada funkce

Nechť reálná funkce f je definovaná v okolí bodu x_0 a má v něm derivace všech řádů.
Taylorova řada funkce f o středu x_0 je

$$f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2!}\,(x-x_0)^2 + \dots + \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n + \dots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k$$

Věta o jednoznačnosti rozvoje funkce do mocninné řady

Mají-li dvě mocninné řady stejný střed x_0 a stejný součet v nějakém okolí x_0, pak jsou totožné (mají stejné koeficienty a tedy i stejný obor konvergence):

jestliže $\quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k\,(x-x_0)^k$ pro $x \in U(x_0)$, $\quad$ pak $a_k = b_k \;\forall\, k$

Takže každá mocninná řada je Taylorovou řadou svého součtu na intervalu konvergence a úloha *rozviňte funkci $f(x)$ do mocninné řady* znamená totéž jako *napište Taylorovu řadu funkce $f(x)$*.
(Viz příklady 1.7, 1.8 z 1. cvičení a příklady 3.3, 3.4 a 3.6.)

Příklad 3.8: Napište Taylorovu řadu funkce $f(x) = \frac{6}{x}$ se středem $x_0 = -2$.
Určete poloměr R a interval I konvergence.

$$\frac{6}{x} = \frac{6}{(x+2)-2} = \frac{6}{-2+(x+2)} = \frac{6}{-2(1-\frac{(x+2)}{2})} = \frac{-3}{1-\frac{x+2}{2}}$$

– součet geometrické řady pro $a_0 = -3,\; q = \frac{x+2}{2}$

$|q| < 1 \;\Leftrightarrow\; |\frac{x+2}{2}| < 1 \;\Leftrightarrow\; |x+2| < 2 \;\Rightarrow\; I = (-4,\, 0),\; R = 2$

$f(x) = -3 - 3\cdot\frac{x+2}{2} - 3\cdot\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 - 3\cdot\left(\frac{x+2}{2}\right)^3 - \;\dots\; = \sum\limits_{k=0}^{\infty} -3\cdot\left(\frac{x+2}{2}\right)^k, \quad x \in (-4,\, 0)$

Příklad 3.9: Napište Taylorovu řadu funkce $f(x) = \frac{x^2}{1+3x}$ se středem $x_0 = 0$.
Určete poloměr R a interval I konvergence.

$\frac{x^2}{1+3x}$ je součet geometrické řady pro $a_0 = x^2,\; q = -3x$

$|q| < 1 \;\Leftrightarrow\; |-3x| < 1 \;\Leftrightarrow\; |x| < \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; I = (-\frac{1}{3},\, \frac{1}{3}),\; R = \frac{1}{3}$

$f(x) = x^2 - x^2\cdot 3x + x^2\cdot(3x)^2 - x^2\cdot(3x)^3 - \;\dots\; = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-3)^k x^{k+2}, \quad x \in (-\frac{1}{3},\, \frac{1}{3})$

Příklad 3.10: Napište Taylorovu řadu funkce $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ se středem $x_0 = 1$.
Určete poloměr R a interval I konvergence.

$$\frac{x-1}{x+3} = \frac{x-1}{(x-1)+4} = \frac{x-1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{(x-1)}{4}} \quad\Rightarrow\; a_0 = \frac{x-1}{4},\; q = -\frac{x-1}{4}$$

$|q| < 1 \;\Leftrightarrow\; |x-1| < 4 \;\Rightarrow\; I = (-3,\, 5),\; R = 4$

$f(x) = \frac{x-1}{4} - \left(\frac{x-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{4}\right)^3 - \;\dots\; = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{x-1}{4}\right)^k, \quad x \in (-3,\, 5)$

Příklad 3.11: Napište Taylorovy řady o středu $x_0 = 0$ následujících funkcí:

(a) $\operatorname{arccotg} x$ (b) $\ln(1-x)$ (c) $\frac{1}{x^2+2x+1}$

Řešení:

(a) Využijeme toho, že derivace $(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$ představuje součet mocninné geometrické řady:

$\frac{-1}{1+x^2} = -1 + x^2 - x^4 + x^6 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} x^{2k}$, $x \in (-1, 1)$

Na intervalu konvergence ji můžeme integrovat člen po členu:

$$\int \frac{-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int (-1 + x^2 - x^4 + x^6 - \dots)\,\mathrm{d}x = -\int 1\,\mathrm{d}x + \int x^2\,\mathrm{d}x - \int x^4\,\mathrm{d}x + \int x^6\,\mathrm{d}x - \dots$$
$$= -x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \dots$$

Rozvoj $\operatorname{arccotg} x$ do mocninné řady dostaneme integrováním rovnice $(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$:

$\int (\operatorname{arccotg} x)'\,\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

$\operatorname{arccotg} x + c = -x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \dots$

konstantu c určíme dosazením x_0: $\operatorname{arccotg} 0 + c = 0 \iff c = -\frac{\pi}{2}$

Výsledek: $\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \dots = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, $x \in (-1, 1)$

(b) řešíme analogicky: $(\ln(1-x))' = \frac{-1}{1-x} = -1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - \dots$, $x \in (-1, 1)$

$\ln(1-x) = \int \frac{-1}{1-x}\,\mathrm{d}x = (-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots) + c$, $x \in (-1, 1)$

dosazením $x = 0$ určíme konstantu c, vyjde $c = 0$.

(c) Tady naopak využijeme toho, že integrál $\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$ představuje součet geom. řady:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{x+1} + c = c + (-1 + x - x^2 + x^3 - \dots) = c - 1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^{k+1}$$

Na intervalu konvergence $x \in (-1, 1)$ můžeme mocninnou řadu derivovat člen po členu:

$$\left(\frac{-1}{x+1} + c\right)' = \left(c - 1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^{k+1}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)\, x^k$$

Rozvoj $\frac{1}{x^2+2x+1}$ do mocninné řady dostaneme derivováním rovnice $\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{x+1} + c$:

$$\frac{1}{x^2+2x+1} = \left(\frac{-1}{x+1} + c\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)\, x^k, \quad x \in (-1, 1)$$