Fourierovy řady

Opakování

sudá a lichá funkce

sudá: $f(-x) = f(x)$ ... symetrie podle osy y
lichá: $f(-x) = -f(x)$ ... symetrie podle počátku

periodické prodloužení funkce

f je definovaná na intervalu $I = \langle -L,\, L)$ nebo $I = (-L,\, L\rangle$, perioda $p = 2L$
"opakovaně kopírujeme funkci na obě strany": definujeme $f(x + k\,p) = f(x),\; x \in I,\; k$ celé

sudé, resp. liché, prodloužení funkce

f je definovaná na intervalu $(0,\, L\rangle$
sudé prodloužení: pro $x \in (0,\, L)$ položíme $f(-x) = f(x)$ (lze doplnit $f(0) = \lim\limits_{x\to 0_+} f(x)$)
liché prodloužení: pro $x \in (0,\, L)$ položíme $f(-x) = -f(x)$ (lze doplnit $f(0) = 0$)

Příklad 4.1:
načrtněte grafy následujících funkcí a rozhodněte, zda jsou sudé, liché, nebo nic z toho
(a) x (b) x^2 (c) $|x|$ (d) $x+1$ (e) $\sin x$ (f) $\cos x$ (g) $|\sin x|$

Příklad 4.2: jsou dány funkce
(a) $y = |x|$ na $\langle -1,\, 1)$, $p = 2$ (b) $y = x$ na $(-2,\, 2\rangle$, $p = 4$
načrtněte graf jejich periodického prodloužení na intervalu $\langle -3,\, 4\rangle$

Příklad 4.3: jsou dány funkce
(a) $y = x$ na $(0,\, 2)$, $L = 2$ (b) $y = 2$ na $(0,\, 1)$, $L = 1$
načrtněte graf jejich sudého a lichého prodloužení,
pak načrtněte graf periodického prodloužení výsledné liché, resp. sudé, funkce na int. $\langle -4L,\, 4L\rangle$

Příklad 4.4: spočítejte následující integrály:
(a) $\int \sin(a\,x)\; \mathrm{d}x$ (b) $\int \cos(a\,x)\; \mathrm{d}x$ (c) $\int \cos\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right)\; \mathrm{d}x$ (d) $\int x\,\sin(a\,x)\; \mathrm{d}x$

Řešení:

(a) $\int \sin(a\,x)\; \mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\,\cos(a\,x) + c$

(b) $\int \cos(a\,x)\; \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\sin(a\,x) + c$

(c) $\int \cos\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right)\; \mathrm{d}x = \frac{L}{k\pi}\,\sin\left(\frac{k\pi}{L}\,x\right) + c$

(d)

$$\int x\,\sin(a\,x)\; \mathrm{d}x \left|\begin{array}{ll} u = x & v' = \sin(a\,x) \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{a}\,\cos(a\,x) \end{array}\right| = -\frac{x}{a}\,\cos(a\,x) + \int \frac{1}{a}\,\cos(a\,x)\; \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{x}{a}\,\cos(a\,x) + \frac{1}{a^2}\,\sin(a\,x) + c$$

Fourierova řada funkce

Nechť f je $2L$-periodická funkce integrovatelná na $\langle -L,\, L\rangle$ (např. f je po částech spojitá na $\langle -L,\, L\rangle$). Fourierova řada f se definuje jako

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi\, x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi\, x}{L} \right) \,, \qquad \text{kde}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, \mathrm{d}x \\ a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{k\pi\, x}{L}\, \mathrm{d}x \\ b_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{k\pi\, x}{L}\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f.

Věta: Nechť f je $2L$-periodická, *po částech hladká* funkce na $\langle -L,\, L\rangle$. Potom

- Fourierova řada bodově konverguje k f v každém bodě spojitosti,
- v každém bodě nespojitosti Fourierova řada konverguje k průměru limit f zprava a zleva.

Příklad 4.5 (zkouškový, beta): Je dána funkce

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \langle 0,\, 1\rangle \\ 0 & x \in (1,\, 2\rangle \end{cases}$$

(a) Na intervalu $\langle -4,\, 4\rangle$ zakreslete graf sudé funkce $\widetilde{f}(x)$ s periodou $p = 2L = 4$, která vznikne (sudým) prodloužením funkce $f(x)$ na interval $\langle -2,\, 2\rangle$ a následným periodickým rozšířením na interval $(-\infty,\, \infty)$.

(b) Vypočítejte koeficienty Fourierovy (kosinové) řady funkce $\widetilde{f}(x)$.

(c) Zapište výslednou Fourierovu řadu. Zapište součet jejích prvních tří nenulových členů.

(d) Určete součet $s(x)$ Fourierovy řady na intervalu $\langle -4,\, 4\rangle$ a načrtněte graf $s(x)$. Speciálně určete funkční hodnoty $s(0)$, $s(\pm 1)$, $s(\pm 2)$, $s(\pm 3)$.

(e) Rozviňte do kosinové Fourierovy řady funkci

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in \langle 0,\, 1\rangle \\ -1 & x \in (1,\, 2\rangle \end{cases}$$

Řešení:

(a)

(b) f je sudá, takže $b_k = 0 \ \forall k$

$a_0 = \frac{1}{L} \int\limits_{-L}^{L} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_{-2}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} 2\ \mathrm{d}x = 2$

$$a_k = \frac{1}{L} \int\limits_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{k\pi\, x}{L}\right) \mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} 2 \cos\left(\frac{k\pi\, x}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{4}{k\pi} \left[\sin\left(\frac{k\pi\, x}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{4}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right),\ \forall k > 0$$

$$a_k = \begin{cases} 0 \quad \text{pro } k \text{ sudé} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{4}{k\pi} \quad \text{pro } k \text{ liché} \end{cases}$$

$a_1 = \frac{4}{\pi},\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{4}{3\pi},\ a_4 = 0,\ a_5 = \frac{4}{5\pi},\ \ldots$

(c)

$$\widetilde{f}(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi\, x}{L}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{k\pi\, x}{2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi\, x}{2}\right) - \frac{4}{3\pi} \cos\left(\frac{3\pi\, x}{2}\right) + \ \ldots$$

(d) $s(0) = 2,\ \ s(\pm 1) = 1,\ \ s(\pm 2) = 0,\ \ s(\pm 3) = 1$

$$s(x) = \begin{cases} 2 \quad x \in \langle -4,\ -3) \cup (-1,\ 1) \cup (3,\ 4\rangle \\ 0 \quad x \in (-3,\ -1) \cup (1,\ 3) \\ 1 \quad x \in \{-3,\ -1,\ 1,\ 3\} \end{cases}$$

(e) g se liší od f jen o konstantu ($g = f - 1$), tedy kosinová F. řada funkce g se bude lišit od kosinové F. řady funkce f o stejnou konstantu, tj. pouze v členu $\frac{a_0}{2}$, který představuje průměr funkce na $\langle -L,\ L\rangle$:

$a_0 = \frac{1}{L} \int\limits_{-L}^{L} g(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{L} \int\limits_{-L}^{L} f(x) - 1\ \mathrm{d}x = \frac{1}{L} \int\limits_{-L}^{L} f(x)\ \mathrm{d}x - \frac{1}{L} \int\limits_{-L}^{L} 1\ \mathrm{d}x = 2 - \frac{1}{L}(L - (-L)) = 2 - 2 = 0$

$$g(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi\, x}{L}\right) = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{k\pi\, x}{2}\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi\, x}{2}\right) - \frac{4}{3\pi} \cos\left(\frac{3\pi\, x}{2}\right) + \ \ldots$$