Diferenciální rovnice 1. řádu - opakování

Dif. rovnice 1. řádu (v normálním tvaru): nechť $f(x,y)$ je spoj. funkce dvou proměnných,

$$y' = f(x,y)\ , \quad [x,y] \in G\ \ldots \text{ oblast (otevřená souvislá množina)} \tag{1}$$

Řešení rovnice (1) v G: funkce $y(x)$ def. na intervalu I, která má na I spojitou derivaci, splňuje rovnici (1) a pro kterou platí $x \in I \ \Rightarrow\ [x, y(x)] \in G$.

Maximální řešení v G: takové, k němuž neexistuje (vlastní) prodloužení v G (řešení y_1 na intervalu J se nazývá prodloužení y na I, pokud $I \subset J$ a $y_1(x) = y(x)$ na I).

Integrální křivka: graf řešení

Směrové pole: vektorové pole $\vec{\tau} = (1, f(x,y))$

Počáteční (Cauchyho) úloha:

$$y' = f(x,y)\ , \quad y(x_0) = y_0$$

Věta - o existenci a jednoznačnosti řešení

Nechť $f(x,y)$ je funkce dvou proměnných, pro kterou platí:

- $f(x,y)$ je spojitá v G (existence)
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ je spojitá v G (jednoznačnost)

Pak pro každý bod $[x_0,\, y_0] \in G$ existuje právě jedno maximální řešení úlohy (1), pro které $y(x_0) = y_0$. Jinými slovy: každým bodem $[x_0,\, y_0] \in G$ prochází právě jedna integrální křivka. O intervalu I max. řešení obecně nelze nic říct (jen že $x_0 \in I$).

Poznámka k Větě o existenci a jednoznačnosti řešení

Druhou podmínku (tj. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ je spojitá v G) lze zeslabit na

- $f(x,y)$ je Lipschitzovsky spojitá v proměnné y v G,
  tj. $\exists\, L \in R$ tak, že pro $\forall\, x, y_1, y_2 \in G$ platí $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L\,|y_1 - y_2|$.

Poznámka k existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyho úlohy

Standardní postup: nejdřív zkusíme ověřit oba předpoklady Věty, tj. spojitost $f(x,y)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ v nějakém okolí $U([x_0,y_0])$ bodu $[x_0,y_0]$.

Pokud $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ není spojitá v žádném okolí $[x_0,y_0]$, můžeme ověřit slabší podmínku – zda $f(x,y)$ je v bodě $[x_0,y_0]$ Lipschitzovsky spojitá v proměnné y, tj. zda platí $\exists\, L \in R,\ \exists\, U([x_0,y_0])$ tak, že pro $\forall\, x,y \in U([x_0,y_0])$ je $|f(x,y) - f(x,y_0)| \le L\,|y - y_0|$.

Metoda separace proměnných

Separovatelná rovnice (předp. $g(x)$ a $h(y)$ spojité pro $x \in I$ a $y \in J$):

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

Postup řešení:

Podmínka pro oblast existence a jednoznačnosti: $h'(y)$ spoj. (nebo $h(y)$ Lipschitzovsky spoj.)

I Pokud $h(y_0) = 0$, je $y = y_0$ konstantní řešení.

II Na intervalech, kde $h(y) \neq 0$, postupujeme ve třech krocích:

1. **Separace:**

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= g(x) \cdot h(y) \\ \frac{1}{h(y)}\, \mathrm{d}y &= g(x)\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

2. **Integrace:**

$$\int \frac{1}{h(y)}\, \mathrm{d}y = \int g(x)\, \mathrm{d}x$$

řešení v implicit. tvaru: $$H(y) = G(x) + c, \qquad c \in R$$

3. **Inverze:**

$$y = H^{-1}(G(x) + c), \quad c \in R$$

Body 2 a 3 se nemusí podařit (např. integrál nebo inverze se nedají vyjádřit v oboru element. funkcí).

Příklad 6.1: najděte maximální řešení Cauchyho úlohy

$$y' = -3y, \quad y(0) = -1$$

Řešení:

Oblast ex. a jednozn. $G = R \times R$ (ověřili jsme spojistost pravé strany a spojitost její p. der. dle y).

Konstantní řešení $y = 0$ nevyhovuje počáteční podmínce. Pro $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -3y \\ \int \frac{1}{y}\, \mathrm{d}y &= \int -3\, \mathrm{d}x \\ \ln|y| &= -3x + c \\ |y| &= \mathrm{e}^{-3x+c} = \mathrm{e}^{-3x}\mathrm{e}^{c} = k\, \mathrm{e}^{-3x},\ k > 0 \\ y &= \pm k\, \mathrm{e}^{-3x},\ k > 0 \end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice (se zahrnutím konst. řeš.): $y = k\, \mathrm{e}^{-3x},\ k \in R,\ x \in R$

Řešení C.ú.: $-1 = y(0) = k\, \mathrm{e}^{0} = k \;\Rightarrow\; y = -\mathrm{e}^{-3x},\ x \in R$

Příklad 6.2: najděte maximální řešení Cauchyho úloh

(a) $y' = (x^2+1)\,y, \quad y(-3) = 2$

(b) $y' = 2(x+1)\sqrt{y}, \quad y(0) = 4$

(c) $y' = 2(x-3)\sqrt{y+1}, \quad y(0) = \frac{21}{4}$

(d) $y' = \frac{x\,y^2}{\sqrt{x^2+5}}, \quad y(2) = 0$, resp. $y(2) = 1$

(e) $y' = y^2 + 1, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$

Řešení:

(a) $f(x,y) = (x^2+1)\,y$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2+1)$ jsou spoj. v $G = R \times R$

Konstantní řešení $y = 0$ nevyhovuje počáteční podmínce. Pro $y \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= (x^2+1)\,y \\
\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int x^2+1\,\mathrm{d}x \\
\ln|y| &= \frac{x^3}{3} + x + c \\
|y| &= \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}+x+c} = \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}+x}\mathrm{e}^{c} = k\,\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}+x},\ k > 0 \\
y &= \pm k\,\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}+x},\ k > 0
\end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice (se zahrnutím konst. řeš.): $y = k\,\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}+x},\ k \in R,\ x \in R$

Max. řešení C.ú.: $2 = y(-3) = k\,\mathrm{e}^{\frac{(-3)^3}{3}-3} = k\,\mathrm{e}^{-12} \ \Rightarrow\ k = 2\,\mathrm{e}^{12} \ \Rightarrow\ y = 2\,\mathrm{e}^{12}\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}+x},\ x \in R$

(b)

$$\left.\begin{aligned}
&f(x,y) = 2(x+1)\sqrt{y} \\
&\tfrac{\partial f}{\partial y} = \tfrac{x+1}{\sqrt{y}}
\end{aligned}\right\} \text{ spoj. v } G = R \times (0,\infty)$$

Konstantní řešení $y = 0$ nevyhovuje počáteční podmínce (navíc neleží v G, takže bychom ani neměli zaručenu jednoznačnost řešení). Pro $y > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2(x+1)\sqrt{y} \\
\int \frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y &= \int x+1\,\mathrm{d}x \\
\sqrt{y} &= \frac{x^2}{2} + x + c, \quad c \in R \\
\text{Obecné řešení rovnice:}\quad y &= \left(\frac{x^2}{2} + x + c\right)^2, \quad c \in R
\end{aligned}$$

Řešení C.ú.: $4 = y(0) = c^2 \ \Rightarrow\ c = \pm 2$, ale řešení existuje jen jedno

– konstantu tedy určíme z implicitního tvaru: $\sqrt{4} = 0 + c \ \Rightarrow\ c = 2$

interval max. řešení: musí platit $\frac{x^2}{2} + x + 2 > 0$ – platí pro všechna x ($D = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 < 0$)

max. řešení C.ú. je tedy $y = \left(\frac{x^2}{2} + x + 2\right)^2, \quad x \in R$

Graf řešení je vyznačen černě na obrázku 1 .

Poznámka: pro hodnotu konstanty $c = -2$ taky dostaneme řešení, ale pro jiné počáteční podmínky a ne na celém R, viz modrá křivka na obrázku 1: plnou čarou je vyznačen graf funkce $y = \left(\frac{x^2}{2} + x - 2\right)^2$ na intervalech $(-\infty, -1 - \sqrt{5})$ a $(-1 + \sqrt{5}, \infty)$, kde je řešením dané rovnice, a čárkovaně graf této funkce na intervalu $(-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5})$, kde ovšem NENÍ řešením dané rovnice – to plyne jednak z implicitního tvaru řešení, jednak se lze přesvědčit dosazením do dané rovnice (a mít přitom na paměti, že $\sqrt{x^2} = |x|$). Modře je vyznačeno i konstantní řešení $y = 0$.

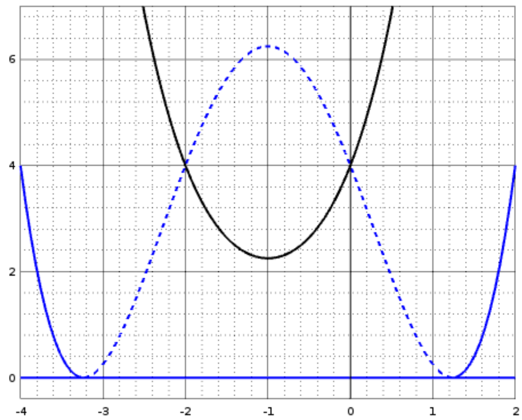

Figure 1: Příklad 6.2 (b)

(c)

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = 2(x-3)\sqrt{y+1} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x-3}{\sqrt{y+1}} \end{array}\right\} \text{ spoj. v } \; G = R \times (-1, \infty)$$

Konstantní řešení $y = -1$ nevyhovuje počáteční podmínce (navíc neleží v G, takže bychom ani neměli zaručenu jednoznačnost řešení). Pro $y > -1$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2(x-3)\sqrt{y+1} \\ \int \frac{1}{2\sqrt{y+1}}\,\mathrm{d}y &= \int x - 3 \,\mathrm{d}x \\ \sqrt{y+1} &= \frac{(x-3)^2}{2} + c, \quad c \in R \\ \text{Obecné řešení rovnice:} \quad y &= \left(\frac{(x-3)^2}{2} + c\right)^2 - 1, \quad c \in R \end{aligned}$$

Řešení C.ú.: konstantu určíme z implicitního tvaru: $\sqrt{\frac{21}{4} + 1} = \frac{(-3)^2}{2} + c \;\Rightarrow\; c = \sqrt{\frac{25}{4}} - \frac{9}{2} = -2$

interval max. řešení: musí platit $\frac{(x-3)^2}{2} - 2 > 0 \iff x^2 - 6x + 5 > 0$, kořeny jsou $x = 1$ a $x = 5$, nerovnost platí v int. $I_1 = (-\infty, 1)$ a $I_2 = (5, \infty)$, $x_0 \in I_1$

max. řešení C.ú. je tedy $y = \left(\frac{(x-3)^2}{2} - 2\right)^2 - 1, \quad x \in (-\infty, 1)$

Pozn.: kdyby počáteční podmínka byla $y(6) = \frac{21}{4}$, max. řeš. takové C.ú. by sice představovala stejná funkce, ale na jiném intervalu: $y = \left(\frac{(x-3)^2}{2} - 2\right)^2 - 1$, $x \in (5, \infty)$. Na intervalu $(1, 5)$ tato funkce není řešením rovnice (na obrázku 2 je to vyznačeno čárkovaně).

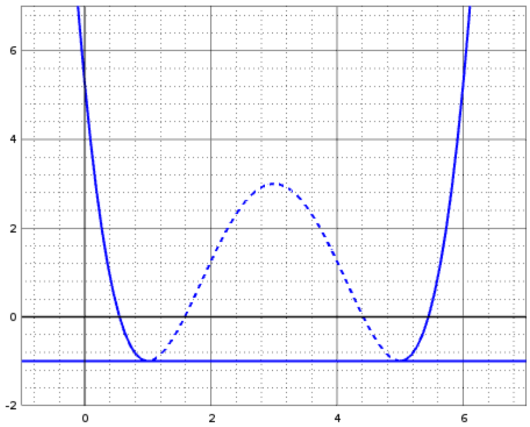

Figure 2: Příklad 6.2 (c)

(d)

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = \frac{x\,y^2}{\sqrt{x^2+5}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x\,2y}{\sqrt{x^2+5}} \end{array}\right\} \text{ spoj. v } \quad G = R \times R$$

Konstantní řešení $y = 0$ vyhovuje první C.ú. s počáteční podmínkou $y(2) = 0$, takže představuje její řešení. Řešení druhé C.ú. úlohy s počáteční podmínkou $y(2) = 1$ musíme hledat dál. Pro $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{x\,y^2}{\sqrt{x^2+5}} \\ \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,\mathrm{d}x \\ -\frac{1}{y} &= \sqrt{x^2+5} + c, \quad c \in R \\ \text{Obecné řešení rovnice:} \quad y &= \frac{-1}{\sqrt{x^2+5}+c}, \quad c \in R \end{aligned}$$

Řešení C.ú.: konstantu určíme z implicitního tvaru: $c = -\frac{1}{y_0} - \sqrt{x_0^2+5} = -\frac{1}{1} - \sqrt{2^2+5} = -4$

interval max. řešení: musí platit $y \neq 0$, tj. integrální křivka musí celá ležet buď v horní, nebo v dolní polorovině. Jelikož $y(2) = 1 > 0$, musí ležet v horní polorovině, tj. $y > 0$:

$$\frac{-1}{\sqrt{x^2+5}-4} > 0 \iff \sqrt{x^2+5} - 4 < 0 \iff \sqrt{x^2+5} < 4 \iff x^2 + 5 < 16 \iff |x| < \sqrt{11}$$

max. řešení C.ú. je tedy $y = \frac{-1}{\sqrt{x^2+5-4}}, \quad x \in (-\sqrt{11}, \sqrt{11})$.

Na obrázku 3 je graf funkce $y = \frac{-1}{\sqrt{x^2+5-4}}$. Ta je řešením dané rovnice na intervalu $(-\infty, -\sqrt{11})$, nebo na intervalu $(-\sqrt{11}, \sqrt{11})$, nebo na $(\sqrt{11}, \infty)$. Odpovídající interval (vždycky jen jeden) je určen počáteční podmínkou.

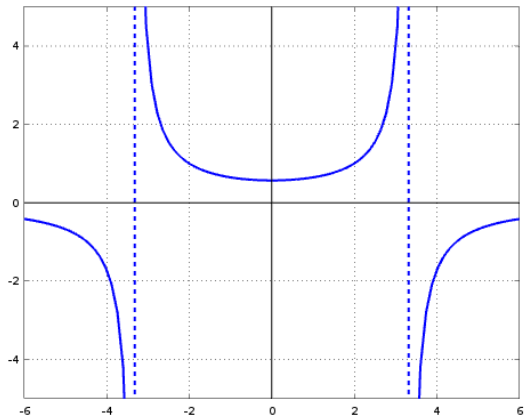

Figure 3: Příklad 6.2 (d)

(e) $f(x,y) = y^2+1$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\,y$ jsou spoj. v $G = R \times R$, konstantní řešení neexistuje.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y^2+1 \\
\int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y &= \int 1\,\mathrm{d}x \\
\operatorname{arctg} y &= x + c, \quad c \in R \\
\text{Obecné řešení rovnice:} \quad y &= \operatorname{tg}\,(x+c), \quad (x+c) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad c \in R
\end{aligned}$$

Řešení C.ú.: konstantu určíme z implicitního tvaru: $\operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} + c \;\Rightarrow\; c = -\frac{\pi}{2}$

max. řešení C.ú. je tedy $y = \operatorname{tg}\,(x - \frac{\pi}{2}), \quad x \in (0, \pi)$.

Zkouška – u předchozích příkladů jsme ji pro stručnost vynechali, měli bychom ji však vždy provést:

- $y = \operatorname{tg}\,(x - \frac{\pi}{2})$ je spojitě diferencovatelná na $I = (0, \pi)$,
  řešení nelze prodloužit na větší interval,
  celá integrální křivka leží v oblasti existence a jednoznačnosti: $I \times R \subset G$
- rovnice:

  $\mathrm{L} = y' = (\operatorname{tg}\,(x - \frac{\pi}{2}))' = \frac{1}{\cos^2(x-\frac{\pi}{2})}$

  $\mathrm{P} = y^2 + 1 = \operatorname{tg}^2(x - \frac{\pi}{2}) + 1 = \frac{\sin^2(x-\frac{\pi}{2})}{\cos^2(x-\frac{\pi}{2})} + 1 = \frac{\sin^2(x-\frac{\pi}{2})}{\cos^2(x-\frac{\pi}{2})} + \frac{\cos^2(x-\frac{\pi}{2})}{\cos^2(x-\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos^2(x-\frac{\pi}{2})}$

  $\mathrm{L} = \mathrm{P}$
- počáteční podmínka:

  $\frac{\pi}{2} \in I, \quad y(\frac{\pi}{2}) = \operatorname{tg}\,(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{tg}\,0 = 0$