Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Cauchyho (počáteční) úloha:

$$y' + a(x)\, y = g(x) \ , \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

Věta: Nechť $a(x)$ a $g(x)$ jsou spojité na intervalu J a nechť $x_0 \in J$.
Pak existuje právě jedno maximální řešení úlohy (1) a je definováno na **celém** intervalu J.

U lineárních rovnic **známe interval max. řešení předem**, na rozdíl od nelineárních rovnic (viz příklady z 6. cvičení).

Bernoulliova metoda:

$$y' + a(x)\, y = g(x)$$

1. Řešení hledáme ve tvaru $y = u \cdot v$, tedy $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Po dosazení do rovnice

$$\begin{aligned} u' \cdot v + u \cdot v' + a(x)\, u \cdot v &= g(x) \\ u' \cdot v + u\, (\underbrace{v' \ + \ a(x)\, v}_{0}) &= g(x) \end{aligned}$$

2. Hledáme nějaké nenulové (ale jinak libovolné) řešení $\widetilde{v}$ rovnice $v' + a(x)\, v = 0$
   – lze řešit separací proměnných.

3. Dopočítáme u jako obecné řešení rovnice $u' \cdot \widetilde{v} = g(x)$, lze řešit integrováním.

4. Dopočítáme y.

Příklad 7.1: najděte řešení lineární rovnice

$$y' + 3y = 8\, \mathrm{e}^x$$

Řešení:

1. Řešení hledáme ve tvaru $y = u \cdot v$, tedy $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Po dosazení do rovnice

$$\begin{aligned} u' \cdot v + u \cdot v' + 3\, u \cdot v &= 8\, \mathrm{e}^x \\ u' \cdot v + u\, (\underbrace{v' \ + \ 3\, v}_{0}) &= 8\, \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

2. Rovnici $v' + 3\, v = 0$ jsme už vyřešili v př. 6.1: $v = p\, \mathrm{e}^{-3x}$, $p \in R$. Potřebujeme libovolné nenulové řešení, zvolíme např. $p = 1$, takže $v = \mathrm{e}^{-3x}$.

3. Dosadíme zpátky do rovnice 1. a dopočítáme u:

$$\begin{aligned} u' \cdot \mathrm{e}^{-3x} &= 8\, \mathrm{e}^x \\ u' &= 8\, \mathrm{e}^{4x} \\ u &= \int 8\, \mathrm{e}^{4x} \mathrm{d}x = 2\, \mathrm{e}^{4x} + c \ , \quad c \in R \end{aligned}$$

4. $y = u \cdot v = (2\, \mathrm{e}^{4x} + c)\, \mathrm{e}^{-3x} \ , \quad c \in R \ ,$ nebo názorněji vyjádřené

$$y = 2\, \mathrm{e}^x + c\, \mathrm{e}^{-3x} \ , \quad c \in R \ .$$

Metoda variace konstant:

$$y' + a(x)\,y = g(x)$$

1. Najdeme obecné řešení y_H homogenní rovnice $y' + a(x)\,y = 0$ (separací proměnných) – závisí na jedné konstantě c.
2. Místo konstanty c uvažujeme funkci $c(x)$, takto pozměněné řešení dosadíme do nehomogenní rovnice a určíme funkci $c(x)$.

Příklad 7.1, podruhé: najděte řešení lineární rovnice

$$y' + 3y = 8\,\mathrm{e}^{x}$$

Řešení:

1. Vyřešíme homogenní rovnici $y' + 3y = 0$ separací proměnných, $y_H = c\,\mathrm{e}^{-3x}$
2. Obecné řešení hledáme ve tvaru $y = c(x)\,\mathrm{e}^{-3x}$ a dosadíme je do nehomogenní rovnice:
   L=$y' + 3y = c'(x)\,\mathrm{e}^{-3x} - 3\,c(x)\,\mathrm{e}^{-3x} + 3\,c(x)\,\mathrm{e}^{-3x} = c'(x)\,\mathrm{e}^{-3x}$
   $c'(x)\,\mathrm{e}^{-3x} = 8\,\mathrm{e}^{x}$
   $c'(x) = 8\,\mathrm{e}^{4x}$
   $c(x) = \int 8\,\mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{e}^{4x} + c_1, \quad c_1 \in R$
   $y = c(x)\,\mathrm{e}^{-3x} = (2\,\mathrm{e}^{4x} + c_1)\,\mathrm{e}^{-3x} = 2\,\mathrm{e}^{x} + c_1\,\mathrm{e}^{-3x} \;, \quad c_1 \in R$

Příklad 7.2: najděte maximální řešení Cauchyho úloh

(a) $y' - \frac{2}{x}\,y = 2\,x^3, \quad y(1) = 3$

(b) $y' + 3\,x^2\,y = \frac{2x}{\mathrm{e}^{x^3}(x+1)}, \quad y(0) = 7$

(c) $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x+3}, \quad y(-2) = 4$

Řešení:

(a) Podm. ex. a jednozn. lin. dif. rovnice – spojitost koeficientů
– platí na $I_1 = (-\infty, 0)$ a $I_2 = (0, \infty)$, $\;1 \in I_2$

1) $y = u \cdot v, \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v', \quad u' \cdot v + u\,(v' - \frac{2}{x}\,v) = 2\,x^3$

2) $v' - \frac{2}{x}\,v = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{x}\,v \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \ln|v| = 2\ln|x| + c = \ln x^2 + c$, např. $v = x^2$

3) $u'x^2 = 2x^3 \;\Rightarrow\; u' = 2x \;\Rightarrow\; u = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + c$

4) $y = u \cdot v = x^2(x^2 + c)\,, \quad c \in R, \quad x \in I_2$

Max. řešení C.ú.: $3 = y(1) = 1^2(1^2 + c) \;\Rightarrow\; 3 = 1 + c \;\Rightarrow\; c = 2, \quad$ tedy $y = x^2(x^2 + 2)\,, \quad x \in (0, \infty)$

(b) Podm. ex. a jednozn. lin. dif. rovnice platí na $I_1 = (-\infty, -1)$ a $I_2 = (-1, \infty)$, $0 \in I_2$

1) $y = u \cdot v, \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v', \quad u' \cdot v + u\,(v' + 3\,x^2\,v) = \frac{2x}{e^{x^3}(x+1)}$

2) $v' + 3\,x^2\,v = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dx} = -3\,x^2\,v \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{v}\,dv = \int -3\,x^2\,dx \;\Rightarrow\; \ln|v| = -x^3 + c$, např. $v = e^{-x^3}$

3) $u' e^{-x^3} = \frac{2x}{e^{x^3}(x+1)} \;\Rightarrow\; u' = \frac{2x}{x+1} \;\Rightarrow\; u = \int \frac{2x+2-2}{x+1}\,dx = \int 2 - \frac{2}{x+1}\,dx = 2x - 2\ln(x+1) + c$

4) $y = u \cdot v = e^{-x^3}(2x - 2\ln(x+1) + c)\,, \quad c \in R, \quad x \in I_2$

Max. řešení C.ú.: $7 = y(0) = e^0(0+c) \;\Rightarrow\; c = 7$, tedy $y = e^{-x^3}(2x - 2\ln(x+1) + 7)\,, \quad x \in (-1, \infty)$

(c) Podm. ex. a jednozn. lin. dif. rovnice platí na $I_1 = (-\infty, -3)$, $I_2 = (-3, 0)$ a $I_3 = (0, \infty)$, $-2 \in I_2$

1) $y = u \cdot v, \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v', \quad u' \cdot v + u\,(v' + \frac{1}{x}\,v) = \frac{1}{x+3}$

2) $v' + \frac{1}{x}\,v = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}\,v \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{v}\,dv = \int -\frac{1}{x}\,dx \;\Rightarrow\; \ln|v| = -\ln|x| + c = \ln|\frac{1}{x}| + c$, např. $v = \frac{1}{x}$

3) $u' \frac{1}{x} = \frac{1}{x+3} \;\Rightarrow\; u' = \frac{x}{x+3} \;\Rightarrow\; u = \int \frac{x+3-3}{x+3}\,dx = \int 1 - \frac{3}{x+3}\,dx = x - 3\ln(x+3) + c$

4) $y = u \cdot v = \frac{1}{x}(x - 3\ln(x+3) + c)\,, \quad c \in R, \quad x \in I_2$

Max. řešení C.ú.: $4 = y(-2) = \frac{1}{-2}(-2 - 3\ln(-2+3) + c) \iff -8 = -2 + c \;\Rightarrow\; c = -6$,
tedy $y = \frac{1}{x}(x - 3\ln(x+3) - 6)\,, \quad x \in (-3, 0)$

Bernoulliova rovnice

$$y' + a(x)\,y = g(x)\,y^p$$

kde $a(x)$ a $g(x)$ jsou spoj. na intervalu J, $p \in R$, $p \neq 0$, $p \neq 1$ (pro tato p by šlo o lineární rovnici).

Pro $p > 0$ existuje konstantní řešení $y(x) = 0$.

Bernoulliova metoda – jako pro lineární rovnici, pouze rovnice ve třetím kroku je trochu obecnější, ale lze ji řešit separací proměnných.

Příklad 7.3: najděte maximální řešení Cauchyho úlohy

$$y' = -\frac{y}{x} - x\,y^2\,, \quad y(2) = -\frac{1}{2}$$

Řešení: $f(x,y) = -\frac{y}{x} - x\,y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x} - 2\,x\,y$ jsou spoj. na $G_1 = (-\infty, 0) \times R$, $G_2 = (0, \infty) \times R$, $[2, -\frac{1}{2}] \in G_2$ – oblast ex. a jednozn. řešení C.ú.

dále si musíme uvědomit, že jde o Bern. rovnici, napíšeme ji ve standardním tvaru:

$$y' + \frac{y}{x} = -x\,y^2$$

1. Řešení hledáme ve tvaru $y = u \cdot v$, tedy $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Po dosazení do rovnice

$$\begin{aligned} u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{1}{x}\,u \cdot v &= -x\,(u \cdot v)^2 \\ u' \cdot v + u\,\underbrace{(\,v' + \frac{1}{x}\,v\,)}_{0} &= -x\,u^2 v^2 \end{aligned}$$

2. $v' + \frac{1}{x}\, v = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x}\, v \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = -\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \ln|v| = -\ln x + c = \ln\frac{1}{x} + c$, např. $v = \frac{1}{x}$

3. Dosadíme zpátky do rovnice v bodě 1. a dopočítáme u:

$$\begin{aligned} u' \cdot \frac{1}{x} &= -x\,u^2\,\frac{1}{x^2} \qquad / \cdot x \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -u^2 \\ -\int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u &= \int 1\,\mathrm{d}x \\ \frac{1}{u} &= x + c\,, \quad c \in R \\ u &= \frac{1}{x+c}\,, \quad c \in R \end{aligned}$$

4. $\quad y = u \cdot v = \frac{1}{x\,(x+c)}\,, \quad c \in R\,.$

Max. řeš. C.ú.: $-\frac{1}{2} = y(2) = \frac{1}{2\,(2+c)} = \frac{1}{4+2c} \iff -2 = 4 + 2c \;\Rightarrow c = -3$
interval max. řeš.: $x \neq 0,\ x \neq 3$ a poč. podm. je daná v bodě $x_0 = 2$, tj. $I = (0,\,3)$
$y = \frac{1}{x\,(x-3)}\,, \quad x \in (0,\,3)$

Příklad 7.4: najděte maximální řešení Cauchyho úlohy

$$y' - \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{x^2}\,, \qquad y(-1) = 4$$

Řešení: $f(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ jsou spoj. na $G_1 = (-\infty, 0) \times (0, \infty)\,,\ G_2 = (0,\infty) \times (0,\infty)\,, \quad [-1,\,4] \in G_1$

1. Dosadíme $y = u \cdot v$, tedy $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$,

$$\begin{aligned} u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{2}{x}\,u \cdot v &= \frac{2\sqrt{u\,v}}{x^2} \\ u' \cdot v + u\,(\underbrace{v' - \frac{2}{x}\,v}_{0}) &= \frac{2\sqrt{u\,v}}{x^2} \end{aligned}$$

2. $v' - \frac{2}{x}\,v = 0 \iff \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{x}\,v, \quad \int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = 2\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \ln|v| = \ln x^2 + c,$ např. $v = x^2$

3. Dosadíme zpátky do rovnice v bodě 1. a dopočítáme u:

$$\begin{aligned} u' \cdot x^2 &= \frac{2\sqrt{u\,x^2}}{x^2} = \frac{2\sqrt{u}\,|x|}{x^2} = \frac{2\sqrt{u}\,(-x)}{x^2} = -\frac{2\sqrt{u}}{x} \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -\frac{2\sqrt{u}}{x^3} \\ \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u &= \int -\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \\ \sqrt{u} &= \frac{1}{2x^2} + c \\ u &= \left(\frac{1}{2x^2} + c\right)^2 \end{aligned}$$

4. $y = u \cdot v = x^2 \left(\frac{1}{2x^2} + c\right)^2$, $\frac{1}{2x^2} + c > 0$ – podmínka plyne z implicit. tvaru

Max. řeš. C.ú.: $4 = y(-1) = \left(\frac{1}{2} + c\right)^2 \iff 2 = \left|\frac{1}{2} + c\right| \Rightarrow c = \frac{3}{2}$ nebo $c = -\frac{5}{2}$
v bodě x_0 a jeho okolí musí být $\frac{1}{2x^2} + c > 0$, tj. $\frac{1}{2 \cdot 1} + c > 0$, což vyloučí tu druhou hodnotu:

$y = x^2 \left(\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2}\right)^2$, $x \in (-\infty, 0)$

Zkouška - dosazení do původní rovnice (vzorové provedení celé zkoušky viz příklad 6.2 e)):

$\mathrm{L} = y' - \frac{2y}{x} = 2x \left(\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2}\right)^2 + x^2 \cdot 2 \left(\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^3}\right) - 2x \left(\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{2}{x} \left(\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2}\right)$
$\mathrm{P} = \frac{2\sqrt{y}}{x^2} = \frac{2}{x^2} \left|x \left(\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2}\right)\right| = \frac{2}{x^2}(-x) \cdot \left(\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{x} \left(\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2}\right)$
L = P

Rovnice v diferenciálech

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0\,, \quad [x,y] \in G \subset R^2\,, \tag{2}$$

předpokládáme M, N spojité v G.

- **směrové pole** rovnice (2) je $\vec{\tau} \equiv \vec{\tau}(x,y) = (N(x,y), -M(x,y))$, definované pro $\|\vec{\tau}\| \neq 0$
- **singulární body** (2) $S = \{[x,y] \in G : \|\vec{\tau}\| = 0\}$
- **integrální křivka** (2) je křivka v $\widetilde{G} \equiv G - S$, která v každém bodě $[x,y]$ má tečnu $\vec{\tau}(x,y)$
- **maximální integ. křivka**: taková, kterou nelze prodloužit tak, aby zůstala integ. křivkou v $\widetilde{G}$

Věta 7.1 – o existenci a jednoznačnosti
Nechť $M(x,y)$, $N(x,y)$ jsou spojitě diferencovatelné v $G \subset R^2$.
Pak každým bodem G, který není singulární, prochází právě jedna maximální integrální křivka.

Exaktní rovnice

Rovnice (2) se nazývá exaktní v $G \iff$ existuje $\varphi(x,y)$ tak, že $\operatorname{grad}\varphi = (M,N)$ v G
– potom $S = \{[x,y] \in G : \operatorname{grad}\varphi(x,y) = (0,0)\}$

• **obecný integrál exaktní rovnice** je $\varphi(x,y) = c$ – rovnice vrstevnice

Každá integ. křivka leží na právě jedné vrstevnici, každá souvislá část (neprázdné) vrstevnice, která neprochází žádným singulárním bodem, je integrální křivka.

Věta 7.2 – kritérium postačující pro to, aby rovnice byla exaktní (tj. aby ex. potenciál $\varphi(x,y)$):

Nechť platí

- $G \subset R^2$ je jednoduše souvislá
- M, N jsou spojitě diferencovatelné v G (mají v G spojité všechny parciální derivace)
- $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ v G

Pak rovnice (2) je exaktní v G.

Příklad 5.5, znovu (přepsaný na rovnici v diferenciálech):

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3x^2}{2y} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{3x^2}{2y} \\ 2y\ \mathrm{d}y &= 3x^2\ \mathrm{d}x \\ 2y\ \mathrm{d}y - 3x^2\ \mathrm{d}x &= 0 \end{aligned}$$

Řešení:

Hledáme potenciál $\varphi(x,y)$ pole $(-3x^2, 2y)$:

$\varphi(x,y) = \int -3x^2\ \mathrm{d}x = -x^3 + c_1(y)$

$\varphi(x,y) = \int 2y\ \mathrm{d}y = y^2 + c_2(x)$

$\varphi(x,y) = -x^3 + y^2 + c\,, \quad c \in R$

Vyjádření integrálních křivek (první integrál): $-x^3 + y^2 + c = 0$, $[x,y] \in R^2$.

Příklad 7.5: najděte první integrál (vyjádření integ. křivek) rovnice

$$\underbrace{\left(y^2 + 4x\right)}_{M(x,y)} \mathrm{d}x + \underbrace{2xy}_{N(x,y)}\ \mathrm{d}y = 0$$

Řešení:

ozn. $M(x,y) = y^2 + 4x$, $N(x,y) = 2xy$, M, N jsou spoj. v $G = R \times R$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 4, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y, \qquad \frac{\partial N}{\partial y} = 2x \qquad \dots \text{ spoj. v } G$$

G je jednoduše souvislá a $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ v G $\Rightarrow$ Rovnice je exaktní v G.

Hledáme potenciál $\varphi(x,y)$ pole (M,N):

$\varphi(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x = \int y^2 + 4x\,\mathrm{d}x = y^2x + 2x^2 + c_1(y)$

$\varphi(x,y) = \int N(x,y)\,\mathrm{d}y = \int 2xy\,\mathrm{d}y = xy^2 + c_2(x)$

$\varphi(x,y) = xy^2 + 2x^2 + c\,, \quad c \in R$

Vyjádření integrálních křivek (první integrál): $xy^2 + 2x^2 + c = 0$, $[x,y] \in G$.

Příklad 7.6: je dána rovnice

$$xy\,\mathrm{d}x + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = 0$$

a) Ověřte, ve kterých oblastech je rovnice je exaktní.

b) Najděte první integrál (= vyjádření integrálních křivek) dané rovnice.

c) Zapište vyjádření integrální křivky procházející bodem $[0, \mathrm{e}]$.

Řešení:

a) ozn. $M(x,y) = xy$, $N(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}$, M, N jsou spoj. v $G_1 = R \times (-\infty, 0)$ a v $G_2 = R \times (0, \infty)$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = x, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = x, \qquad \frac{\partial N}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \qquad \dots \text{ spoj. v } G_1 \text{ i v } G_2$$

G_1 i G_2 jsou jednoduše souvislé a $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ v G_1 i v G_2.
Rovnice je exaktní v oblasti G_1 a v oblasti v G_2.

b) hledáme potenciál $\varphi(x, y)$ pole (M, N):
$\varphi(x, y) = \int M(x, y)\,\mathrm{d}x = \int xy\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}y + c_1(y)$
$\varphi(x, y) = \int N(x, y)\,\mathrm{d}y = \int \frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{x^2}{2}y + \ln|y| + c_2(x)$
$\varphi(x, y) = \frac{x^2}{2}y + \ln|y| + c\,, \quad c \in R$
Vyjádření integrálních křivek (první integrál): $\frac{x^2}{2}y + \ln|y| + c = 0$, v G_1 i v G_2.

c) bod $[0, \mathrm{e}]$ leží v G_2, dosadíme jej do obecného vyjádření integrálních křivek:
$\frac{0^2}{2}\mathrm{e} + \ln|\mathrm{e}| + c = 0 \;\Rightarrow\; c = -\ln|\mathrm{e}| = -1$
řešení: $\frac{x^2}{2}y + \ln|y| - 1 = 0$, $[x, y] \in G_2$

Příklad 7.7: je dána rovnice
$$(2y - 3x^2)\,\mathrm{d}x + 2(x - y)\mathrm{d}y = 0$$

a) Najděte singulární body.
b) Ověřte, ve kterých oblastech je rovnice je exaktní.
c) Najděte obecné vyjádření integrálních křivek dané rovnice.
d) Najděte rovnici integrální křivky procházející bodem [1, 1].

Řešení:
a) $2y - 3x^2 = 0$ a zároveň $2(x - y) = 0$, tj. $2x - 3x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = \frac{2}{3}$, $S = \{[0,\, 0],\, [\frac{2}{3},\, \frac{2}{3}]\}$
b) ozn. $M(x, y) = 2y - 3x^2,\;\; N(x, y) = 2(x - y)$, $M,\; N$ jsou spoj. v $G = R \times R$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -6x, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 2, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2, \qquad \frac{\partial N}{\partial y} = -2 \qquad \ldots \text{ spoj. v } G$$

G je jednoduše souvislá a $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ v G, takže rovnice je exaktní v G.

c) hledáme potenciál $\varphi(x, y)$ pole (M, N):
$\varphi(x, y) = \int M(x, y)\,\mathrm{d}x = \int 2y - 3x^2\,\mathrm{d}x = 2xy - x^3 + c_1(y)$
$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2x + c_1'(y) = N(x, y) = 2(x - y) \;\Rightarrow\; c_1'(y) = -2y \;\Rightarrow\; c_1(y) = -y^2 + c\,, \quad c \in R$
$\varphi(x, y) = 2xy - x^3 - y^2 + c\,, \quad c \in R$
Vyjádření integrálních křivek: $2xy - x^3 - y^2 + c = 0\,, \quad c \in R$, $[x, y] \in G$.

d) $2 \cdot 1 \cdot 1 - 1^3 - 1^2 + c = 0 \;\Rightarrow\; c = 0$,
integrální křivka procházející bodem [1, 1] má rovnici $2xy - x^3 - y^2 = 0$.

Tato rovnice určuje křivku, která prochází singulárním bodem [0, 0], a ten musíme z integrální křivky vyloučit: musíme vybrat takový maximální úsek vrstevnice, který prochází daným bodem [1, 1] a neobsahuje bod [0, 0] (v tomto případě jde o úsek ležící v 1. kvadrantu).

Přibližný tvar celé křivky získáme např. v Matlabu nebo v Octave příkazem

```
ezplot('2*x*y-x^3-y^2',[-0.5 1.5 -0.5 1.5])
```

Příklad 7.8 (zk.): je dána rovnice

$$\left(2\cos x\,\cos y + y^3\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{y}{y+1} - 2\sin x\,\sin y + 3xy^2\right)\mathrm{d}y = 0$$

a) Jsou body $[\frac{\pi}{2},0]$ a $[\frac{\pi}{4},0]$ singulární body této rovnice?
b) Zapište postačující podmínky pro to, aby rovnice byla exaktní.
c) Ověřte, ve kterých oblastech je rovnice je exaktní.
d) Najděte první integrál (resp. vyjádření integrálních křivek) dané rovnice.
e) Zapište vyjádření integrální křivky procházející bodem $[\frac{\pi}{4},0]$.

Řešení:

$$\underbrace{\left(2\cos x\,\cos y + y^3\right)}_{M(x,y)}\mathrm{d}x + \underbrace{\left(\frac{y}{y+1} - 2\sin x\,\sin y + 3xy^2\right)}_{N(x,y)}\mathrm{d}y = 0$$

a) $[x,y]$ je singulární bod $\iff (M(x,y),N(x,y)) = (0,0)$
$M(\frac{\pi}{2},0) = 2\cos\frac{\pi}{2}\,\cos 0 + 0^3 = 0,\quad N(\frac{\pi}{2},0) = \frac{0}{1} - 2\sin\frac{\pi}{2}\,\sin 0 + 3\frac{\pi}{2}0^2 = 0 \;\Rightarrow\; [\frac{\pi}{2},0]$ je singulární bod
$M(\frac{\pi}{4},0) = 2\cos\frac{\pi}{4}\,\cos 0 + 0^3 = 2\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0 \;\Rightarrow\; [\frac{\pi}{4},0]$ není singulární bod

b) – předpoklady Věty 7.2

c) M, N jsou spoj. v $G_1 = R\times(-\infty,-1)$ a v $G_2 = R\times(-1,\infty)$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -2\sin x\,\cos y, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = -2\cos x\,\sin y + 3y^2,$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2\cos x\,\sin y + 3y^2, \qquad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{(y+1)^2} - 2\sin x\,\cos y + 6xy$$

... spoj. v G_1 i v G_2, které jsou obě jednoduše souvislé a $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ v G_1 i v G_2, takže rovnice je exaktní jak v G_1, tak v G_2.

d) první integrál hledáme jako potenciál $\varphi(x,y)$ pole (M,N):
$\varphi(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x = \int 2\cos x\,\cos y + y^3\,\mathrm{d}x = 2\sin x\,\cos y + xy^3 + c_1(y)$
$\varphi(x,y) = \int N(x,y)\,\mathrm{d}y = \int \frac{y}{y+1} - 2\sin x\,\sin y + 3xy^2\,\mathrm{d}y = y - \ln|y+1| + 2\sin x\,\cos y + xy^3 + c_2(x)$
$\varphi(x,y) = 2\sin x\,\cos y + xy^3 + y - \ln|y+1| + c\,,\quad c\in R$
vyjádření integrálních křivek: $2\sin x\,\cos y + xy^3 + y - \ln|y+1| + c = 0$, v G_1 i v G_2.

e) bod $[\frac{\pi}{4},0]$ leží v G_2, dosadíme jej do obecného vyjádření integrálních křivek:
$2\sin\frac{\pi}{4}\,\cos 0 + \frac{\pi}{4}\cdot 0^3 + 0 - \ln|1| + c = 0 \;\Rightarrow\; c = -2\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$
řešení: $2\sin x\,\cos y + xy^3 + y - \ln|y+1| - \sqrt{2} = 0$, $[x,y]\in G_2$

---

na příští cvičení **Eulerova formule**:

$$\mathrm{e}^{\omega\,\mathrm{i}} = \cos\omega + \mathrm{i}\sin\omega$$
$$\mathrm{e}^{(\alpha+\beta\,\mathrm{i})\,t} = \mathrm{e}^{\alpha\,t}\mathrm{e}^{\beta\,t\,\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\alpha\,t}\left(\cos(\beta\,t) + \mathrm{i}\sin(\beta\,t)\right)$$