Lineární dif. rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

Homogenní rovnice:

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0\,, \qquad p,\,q \in R \tag{1}$$

řešení hledáme ve tvaru $y = \mathrm{e}^{\lambda t}$, tedy

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{\lambda t})'' + p\,(\mathrm{e}^{\lambda t})' + q\,\mathrm{e}^{\lambda t} &= 0 \\ \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda t} + p\,\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t} + q\,\mathrm{e}^{\lambda t} &= 0 \quad / : \mathrm{e}^{\lambda t} \\ \lambda^2 + p\,\lambda + q &= 0 \qquad \ldots\ \textbf{charakteristická rovnice} \text{ s kořeny } \lambda_1,\ \lambda_2\end{aligned}$$

z $\lambda_1,\ \lambda_2$ určíme **fundamentální systém**: $\begin{cases}\lambda_1 \neq \lambda_2 \ \Rightarrow\ \mathrm{FS} = \{\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\} \\ \lambda_1 = \lambda_2 \ \Rightarrow\ \mathrm{FS} = \{\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ t\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\}\end{cases}$

(fundamentální systém $\mathrm{FS} = \{\varphi_1,\ \varphi_2\}$ rovnice (1) je dvojice lin. nezáv. řešení $\varphi_1,\ \varphi_2$ této rovnice)

obecné řešení homogenní rovnice: $y_H = c_1\,\varphi_1(t) + c_2\,\varphi_2(t)\,, \quad c_1,\,c_2 \in R\,, \quad t \in R$

pro komplexní kořeny $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta\,\mathrm{i}$, $\beta \neq 0$, získáme reálný FS použitím Eulerovy formule:

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \mathrm{e}^{(\alpha + \beta\,\mathrm{i})\,t} = \mathrm{e}^{\alpha\,t}\,(\cos(\beta\,t) + \mathrm{i}\sin(\beta\,t)\,)$$

$$\mathrm{FS} = \{\mathrm{e}^{\alpha\,t}\cos(\beta\,t),\ \mathrm{e}^{\alpha\,t}\sin(\beta\,t)\}$$

Příklad 8.1: najděte obecné řešení úloh

(a) $y'' - 2\,y' - 3\,y = 0$

(b) $y'' - 4\,y' + 4\,y = 0$

(c) $y'' + 4 = 0$

(d) $y'' - 2\,y' + 10\,y = 0$

Řešení:

(a) $\lambda^2 - 2\,\lambda - 3 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3, \quad \mathrm{FS} = \{\mathrm{e}^{-t},\ \mathrm{e}^{3t}\}$
$y_H = c_1\,\mathrm{e}^{-t} + c_2\,\mathrm{e}^{3t}\,, \quad c_1,\,c_2 \in R$

(b) $\lambda^2 - 4\,\lambda + 4 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \mathrm{FS} = \{\mathrm{e}^{2t},\ t\,\mathrm{e}^{2t}\}$
$y_H = c_1\,\mathrm{e}^{2t} + c_2\,t\,\mathrm{e}^{2t}\,, \quad c_1,\,c_2 \in R$

(c) $\lambda^2 + 4 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_{1,2} = \pm 2i, \quad \mathrm{FS} = \{\cos 2t,\ \sin 2t\}$
$y_H = c_1\,\cos 2t + c_2\,\sin 2t\,, \quad c_1,\,c_2 \in R$

(d) $\lambda^2 - 2\,\lambda + 10 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_{1,2} = 1 \pm 3i, \quad \mathrm{FS} = \{\mathrm{e}^t\cos 3t,\ \mathrm{e}^t\sin 3t\}$
$y_H = c_1\,\mathrm{e}^t\cos 3t + c_2\,\mathrm{e}^t\sin 3t\,, \quad c_1,\,c_2 \in R$

Nehomogenní rovnice:

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x)\ , \qquad p,\, q \in R \tag{2}$$

partikulární řešení nehomogenní rovnice: y_P – jedno libovolné konkrétní řešení

obecné řešení nehomogenní rovnice: $y = y_H + y_P$

Metoda odhadu:

předp. $f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\,(p(t)\,\cos\beta t + q(t)\,\sin\beta t), \quad t \in R, \quad \alpha, \beta \in R, \quad p(t), q(t)$ polynomy, tj.
$f(t) = p(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\cos\beta t + q(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\sin\beta t$

Obecný vzorec pro y_P je ve skriptech na str. 57-58, odst. 5.6, vzorec (5.6.3).
Zde procvičujeme konkrétní jednotlivé případy:

(I) $\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t$, $\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t$ **nejsou** řešení homogenní rovnice, tj. $\alpha \pm \beta i$ není kořen charakt. polynomu;
pak řešení y_P hledáme v (obecném) tvaru pravé strany:
$y_P = \widetilde{p}(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\cos\beta t + \widetilde{q}(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\sin\beta t$, $\quad$ st.$\widetilde{p}$ = st.$\widetilde{q}$ = max. st. p, q

Příklad 8.2: vyřešte počáteční (Cauchyho) úlohy

(a) $y'' - 2\,y' - 3\,y = 5\,\mathrm{e}^{-2t}\,, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -3$

(b) $y'' - 2\,y' = 8\sin 2t\,, \quad y(0) = 6,\ y'(0) = 2$

(c) $y'' - 4\,y' + 4\,y = 4\,t\,, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 1$

Řešení:

(a) $\mathrm{FS} = \{\mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^{3t}\}, \quad y_H = c_1\,\mathrm{e}^{-t} + c_2\,\mathrm{e}^{3t}\,, \quad c_1,\, c_2 \in R\ ,$ $\quad$ viz př. 8.1 (a)

funkce e^{-2t} pravé straně není řeš. homog. rovnice

– volíme proto $y_P = a\,\mathrm{e}^{-2t}$ a koeficient a dopočítáme dosazením do rovnice:

$y_P' = -2\,a\,\mathrm{e}^{-2t}$

$y_P'' = 4\,a\,\mathrm{e}^{-2t}$

$y_P'' - 2\,y_P' - 3\,y_P = 5\,\mathrm{e}^{-2t}$

$4\,a\,\mathrm{e}^{-2t} - 2(-2\,a\,\mathrm{e}^{-2t}) - 3\,a\,\mathrm{e}^{-2t} = 5\,\mathrm{e}^{-2t}$

$5\,a\,\mathrm{e}^{-2t} = 5\,\mathrm{e}^{-2t} \ \Rightarrow\ a = 1, \quad y_P = \mathrm{e}^{-2t}$

obecné řešení: $y = y_H + y_P = c_1\,\mathrm{e}^{-t} + c_2\,\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{-2t}\,, \quad t \in R$

dosazení poč. podmínky: $\quad y' = -c_1\,\mathrm{e}^{-t} + 3\,c_2\,\mathrm{e}^{3t} - 2\,\mathrm{e}^{-2t}$

$$\left.\begin{array}{rl} 2 = y(0) = \ c_1 + c_2 + 1 & \Rightarrow\ \ c_1 + c_2 = 1 \\ -3 = y'(0) = -c_1 + 3\,c_2 - 2 & \Rightarrow\ -c_1 + 3\,c_2 = -1 \end{array}\right\}\ c_1 = 1,\ c_2 = 0$$

$y = \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t}\,, \quad t \in R$

(b) $\lambda^2 - 2\,\lambda = 0\,, \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2\,, \quad \mathrm{FS} = \{\mathrm{e}^{0\cdot t},\, \mathrm{e}^{2t}\} = \{1,\, \mathrm{e}^{2t}\}, \quad y_H = c_1 + c_2\,\mathrm{e}^{2t}\,, \quad c_1,\, c_2 \in R$

funkce $\sin 2t$ na pravé straně není řeš. homog. rovnice, neboli $\pm 2i$ není kořen char. polyn.

– volíme proto $y_P = a\cos 2t + b\sin 2t$ a koeficienty a, b dopočítáme dosazením do rovnice:

$y'_P = -2\,a\,\sin 2t + 2\,b\cos 2t$

$y''_P = -4\,a\cos 2t - 4\,b\sin 2t$

$y''_P - 2\,y'_P = 8\sin 2t$

$\mathrm{L} = -4\,a\cos 2t - 4\,b\sin 2t - 2(-2\,a\,\sin 2t + 2\,b\cos 2t) = \underbrace{-4(a+b)}_{=0}\cos 2t + \underbrace{4(a-b)}_{=8}\sin 2t$

$\Rightarrow\ a = -b,\ a - b = 2\ \Rightarrow\ a = 1,\ b = -1, \quad y_P = \cos 2t - \sin 2t$

obecné řešení: $y = y_H + y_P = c_1 + c_2\,\mathrm{e}^{2t} + \cos 2t - \sin 2t\,, \quad t \in R$

dosazení poč. podmínky: $y' = 2\,c_2\,\mathrm{e}^{2t} - 2\sin 2t - 2\cos 2t$

$$\left.\begin{array}{l} 6 = y(0) = c_1 + c_2 + 1\ \Rightarrow\ c_1 + c_2 = 5 \\ 2 = y'(0) = \ 2\,c_2 - 2 \quad \Rightarrow\ 2\,c_2 = 4 \end{array}\right\}\ c_1 = 3,\ c_2 = 2$$

$y = 3 + 2\,\mathrm{e}^{2t} + \cos 2t - \sin 2t\,, \quad t \in R$

(c) $\mathrm{FS} = \{\mathrm{e}^{2t},\, t\,\mathrm{e}^{2t}\}, \quad y_H = c_1\,\mathrm{e}^{2t} + c_2\,t\,\mathrm{e}^{2t}\,, \quad c_1,\, c_2 \in R\,,$ viz př. 8.1 (b)

pravá strana je $4\,t\cdot\mathrm{e}^{0\cdot t}\ \cos 0$, 0 není kořen char. polynomu, $4\,t$ je polynom 1. st.

– volíme proto $y_P = a\,t + b$ a koeficienty a, b dopočítáme dosazením do rovnice:

$y'_P = a\,, \quad y''_P = 0$

$y''_P - 4\,y'_P + 4\,y_P = 4\,t$

$-4\,a + 4(a\,t + b) = 4\,t$

$4\,a\,t - 4\,a + 4\,b = 4\,t\ \Rightarrow\ a = b = 1, \quad y_P = t + 1$

obecné řešení: $y = y_H + y_P = c_1\,\mathrm{e}^{2t} + c_2\,t\,\mathrm{e}^{2t} + t + 1\,, \quad t \in R$

dosazení poč. podmínky: $y' = 2\,c_1\,\mathrm{e}^{2t} + c_2\,\mathrm{e}^{2t} + 2\,c_2\,t\,\mathrm{e}^{2t} + 1$

$$\left.\begin{array}{l} -1 = y(0) = \ c_1 + 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -2 \\ 1 = y'(0) = 2\,c_1 + c_2 + 1\ \Rightarrow\ 2\,c_1 + c_2 = 0 \end{array}\right\}\ c_1 = -2,\ c_2 = 4$$

$y = -2\,\mathrm{e}^{2t} + 4\,t\,\mathrm{e}^{2t} + t + 1 = (4\,t - 2)\,\mathrm{e}^{2t} + t + 1\,, \quad t \in R$

zkouška – dosazením do úlohy:

$y(0) = -2 + 0 + 1 = -1$

$y' = -4\,\mathrm{e}^{2t} + 4\,\mathrm{e}^{2t} + 8\,t\,\mathrm{e}^{2t} + 1 = 8\,t\,\mathrm{e}^{2t} + 1, \quad y'(0) = 1$

$y'' = 8\,\mathrm{e}^{2t} + 16\,t\,\mathrm{e}^{2t}$

$\mathrm{L} = y'' - 4\,y' + 4\,y = 8\,\mathrm{e}^{2t} + 16\,t\,\mathrm{e}^{2t} - 4(8\,t\,\mathrm{e}^{2t} + 1) + 4(-2\,\mathrm{e}^{2t} + 4\,t\,\mathrm{e}^{2t} + t + 1) =$

$= \mathrm{e}^{2t}(8 - 4\cdot(-2)) + t\,\mathrm{e}^{2t}(16 - 4\cdot 8 + 4\cdot 4) + 4\,t - 4 + 4 = 4\,t\,, \quad \mathrm{L} = \mathrm{P}$

(II) $\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t$, $\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t$ **jsou** řešení homogenní rovnice, pak vynásobíme pův. odhad t, příp. t^2:

Příklad 8.3: vyřešte počáteční (Cauchyho) úlohy

(a) $y'' + 9\,y = 6\cos 3t\,, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

(b) $y'' - 4\,y' + 4\,y = 3\,\mathrm{e}^{2t}\,, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 0$

(c) $\ddot{y} - 2\,\dot{y} = 4\,t\,, \quad y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 3$

Řešení:

(a) $\lambda^2 + 9 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_{1,2} = \pm 3i, \quad \mathrm{FS} = \{\cos 3t,\, \sin 3t\}, \quad y_H = c_1\cos 3t + c_2\sin 3t\,, \quad c_1,\, c_2 \in R$

funkce $\cos 3t$ na pravé straně je řeš. homog. rovnice, funkce $(a\cos 3t + b\sin 3t)$ tím pádem taky, volíme proto $y_P = t\,(a\cos 3t + b\sin 3t)$, což už není řeš. homog. rov.:

$$y_P' = a\cos 3t + b\sin 3t + 3t\,(-a\sin 3t + b\cos 3t)$$
$$y_P'' = -3a\sin 3t + 3b\cos 3t + 3(-a\sin 3t + b\cos 3t) - 9t\,(a\cos 3t + b\sin 3t)$$

$$y_P'' + 9\,y_P = 6\cos 3t$$
$$\mathrm{L} = \cos 3t\,(3b + 3b - 9at + 9at) + \sin 3t\,(-3a - 3a - 9bt + 9bt) = \cos 3t\cdot 6b + \sin 3t\cdot(-6a)$$

$$\Rightarrow\ a = 0,\ b = 1, \quad y_P = t\sin 3t$$

obecné řešení: $y = y_H + y_P = c_1\cos 3t + c_2\sin 3t + t\sin 3t = c_1\cos 3t + (c_2 + t)\sin 3t\,, \quad t \in R$

dosazení poč. podmínky: $\quad y' = -3c_1\,\sin 3t + \sin 3t + 3(c_2 + t)\cos 3t$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = y(0) = \ c_1 \\ 1 = y'(0) = 3\,c_2 \end{array}\right\}\ c_1 = 0,\ c_2 = \frac{1}{3}$$

$y = (\frac{1}{3} + t)\sin 3t\,, \quad t \in R$

(b) $\mathrm{FS} = \{\mathrm{e}^{2t},\, t\,\mathrm{e}^{2t}\}, \quad y_H = c_1\,\mathrm{e}^{2t} + c_2\,t\,\mathrm{e}^{2t}\,, \quad c_1,\, c_2 \in R\,,$ viz př. 8.1 (b)

funkce e^{2t} na pravé straně je řeš. homog. rovnice, funkce $t\,\mathrm{e}^{2t}$ taky,
volíme proto $y_P = a\,t^2\,\mathrm{e}^{2t}$ a koeficient a dopočítáme dosazením do rovnice:

$$y_P' = a\,(2t\,\mathrm{e}^{2t} + 2t^2\,\mathrm{e}^{2t}) = 2a\,\mathrm{e}^{2t}(t + t^2)$$

$$y_P'' = 4a\,\mathrm{e}^{2t}(t + t^2) + 2a\,\mathrm{e}^{2t}(1 + 2t)$$

$$y_P'' - 4\,y_P' + 4\,y_P = 3\,\mathrm{e}^{2t}$$
$$\mathrm{L} = \mathrm{e}^{2t}(4a\,(t + t^2) + 2a\,(1 + 2t) - 8a\,(t + t^2) + 4a\,t^2) = \mathrm{e}^{2t}(2a)\ \Rightarrow\ a = \tfrac{3}{2}, \quad y_P = \tfrac{3}{2}\,t^2\,\mathrm{e}^{2t}$$

obecné řešení: $y = y_H + y_P = c_1\,\mathrm{e}^{2t} + c_2\,t\,\mathrm{e}^{2t} + \frac{3}{2}\,t^2\,\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{2t}(c_1 + c_2\,t + \frac{3}{2}\,t^2)\,, \quad t \in R$

dosazení poč. podmínky: $\quad y' = 2\,\mathrm{e}^{2t}(c_1 + c_2\,t + \frac{3}{2}\,t^2) + \mathrm{e}^{2t}(c_2 + 3t) = \mathrm{e}^{2t}(2c_1 + c_2 + (2c_2 + 3)\,t + 3t^2)$

$$\left.\begin{array}{l} -1 = y(0) = \ c_1 \quad\ \Rightarrow \quad c_1 = -1 \\ 0 = y'(0) = 2\,c_1 + c_2 \ \Rightarrow\ 2\,c_1 + c_2 = 0 \end{array}\right\}\ c_1 = -1,\ c_2 = 2$$

$y = \mathrm{e}^{2t}(-1 + 2\,t + \frac{3}{2}\,t^2)\,, \quad t \in R$

(c) FS $= \{1,\, e^{2t}\}$, $\quad y_H = c_1 + c_2\, e^{2t}$, $\quad c_1,\, c_2 \in R$ – viz př. 8.2 (b)

pravá strana je $4\,t \cdot e^{0\cdot t}\cos 0$, $1 \equiv e^{0\cdot t}\cos 0$ je řeš. homog. rovnice, $4\,t$ je polynom 1. st.

– volíme proto $y_P = t\,(a\,t + b)$ a koeficienty a, b dopočítáme dosazením do rovnice:

$y_P = a\,t^2 + b\,t, \quad \dot y_P = 2\,a\,t + b, \quad \ddot y_P = 2\,a$

$\ddot y_P - 2\,\dot y_P = 4\,t$

$\mathrm{L} = 2\,a - 2(2\,a\,t + b) = -4\,a\,t + 2\,a - 2\,b \Rightarrow\ a = b = -1, \quad y_P = -t^2 - t$

obecné řešení: $y = y_H + y_P = c_1 + c_2\, e^{2t} - t^2 - t\,, \quad t \in R$

dosazení poč. podmínky: $\quad \dot y = 2\,c_2\, e^{2t} - 2\,t - 1$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = y(0) = c_1 + c_2\ \Rightarrow\ c_1 + c_2 = 1 \\ 3 = \dot y(0) = \ 2\,c_2 - 1 \Rightarrow\ 2\,c_2 = 4 \end{array}\right\}\ c_1 = -1,\ c_2 = 2$$

$y = -1 + 2\, e^{2t} - t^2 - t\,, \quad t \in R$

(III) když pravou stranu tvoří **součet** předchozích možností, rozdělíme úlohu na části

Příklad 8.4 (zk. beta): je dána rovnice

$$\ddot x - 9x = 5\, e^{2t} - 27$$

(a) Určete FS a obecné řešení homogenní rovnice.

(b) Najděte partikulární řešení rovnice a zapište obecné řešení rovnice.

(c) Vyřešte Cauchyho úlohu pro počáteční podmínky $x(0) = 0,\ \dot x(0) = 1$.

(d) V jakém tvaru bychom hledali partikulární řešení pro pravou stranu rovnou $2\,t\, e^{-3t}$?

Řešení:

(a) $\lambda^2 - 9 = 0\ \Rightarrow\ \lambda_{1,2} = \pm 3, \quad$ FS$=\{e^{3t},\, e^{-3t}\}, \quad x_H = c_1\, e^{3t} + c_2\, e^{-3t}\,, \quad t \in R$

(b) $x_{P1} = a\, e^{2t}, \quad \ddot x_{P1} = 4\,a\, e^{2t}, \quad \mathrm{L} = \ddot x - 9x = 4\,a\, e^{2t} - 9\,a\, e^{2t} = -5\, e^{2t}\ \Rightarrow\ a = -1$

$x_{P2} = b, \quad \ddot x_{P2} = 0, \quad \mathrm{L} = -9b\ \Rightarrow\ b = 3$

$x_P = x_{P1} + x_{P2} = -e^{2t} + 3, \qquad x = x_H + x_P = c_1\, e^{3t} + c_2\, e^{-3t} - e^{2t} + 3\,, \quad t \in R$

(c) dosazení poč. podmínky: $\quad \dot x = 3\,c_1\, e^{3t} - 3\,c_2\, e^{-3t} - 2\, e^{2t}$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = x(0) = c_1 + c_2 - 1 + 3\ \Rightarrow\ c_1 + c_2 = -2 \\ 1 = \dot x(0) = 3\,c_1 - 3\,c_2 - 2 \Rightarrow\ 3\,c_1 - 3\,c_2 = 3 \end{array}\right\}\ c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = -\frac{5}{2}$$

$x = \frac{1}{2}\, e^{3t} - \frac{5}{2}\, e^{-3t} - e^{2t} + 3\,, \quad t \in R$

(d) pokud by e^{-3t} nebylo řešení homog. rovnice, volili bychom $x_P = (at + b)\, e^{-3t}$; jenže e^{-3t} je řešení homog. rovnice, a proto volíme $x_P = t\,(at + b)\, e^{-3t} \quad$ ($t\, e^{-3t}$ není řeš. homog. rov.)

Příklad 8.5: pro nehom. úlohy dle př. 8.1 určete, v jakém tvaru byste hledali y_P pro dané pravé strany:

(a) $y'' - 2\,y' - 3\,y = (3\,t^2 - 1)\,\mathrm{e}^{-t}$

(b) $y'' - 4\,y' + 4\,y = t\,\mathrm{e}^{2t}\sin 3t$

(c) $y'' - 4\,y' + 4\,y = t\,\mathrm{e}^{2t}$

(d) $y'' + 4 \qquad = t^2\cos 3t - 2\,\sin 3t$

(e) $y'' - 2\,y' + 10\,y = t\,\mathrm{e}^{t}\cos 3t$

Řešení:

(a) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3, \quad \mathrm{FS} = \{\mathrm{e}^{-t},\, \mathrm{e}^{3t}\}$

standardní odhad je $y_P = (a\,t^2 + b\,t + c)\,\mathrm{e}^{-t}$, a protože e^{-t} je řešením homogenní rovnice, musíme odhad ještě vynásobit t: $y_P = t\,(a\,t^2 + b\,t + c)\,\mathrm{e}^{-t}$

(*nebo:* pravou stranu charakterizuje číslo -1, to je kořen charakteristického polynomu homogenní rovnice, musíme tedy původní odhad ještě vynásobit t)

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \mathrm{FS} = \{\mathrm{e}^{2t},\, t\,\mathrm{e}^{2t}\}$

standardní odhad je $y_P = \mathrm{e}^{2t}\,(\,(a\,t + b)\cos 3t + (c\,t + d)\sin 3t)$,

a protože $\mathrm{e}^{2t}\sin 3t$ není řeš. homogenní rovnice, už ho nebudeme dál upravovat

(*nebo:* pravou stranu charakterizuje číslo $2 + 3i$, to není kořen charakteristického polynomu homogenní rovnice, nebudeme tedy původní odhad y_P dál upravovat)

(c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \mathrm{FS} = \{\mathrm{e}^{2t},\, t\,\mathrm{e}^{2t}\}$

standardní odhad je $y_P = (a\,t + b)\,\mathrm{e}^{2t}$, ale to je řeš. homogenní rovnice, takže jej nelze použít.

Protože $\lambda_{1,2} = 2$ je *dvojný* kořen charakt. rovnice, původní odhad y_P vynásobíme t^2:

$y_P = t^2(a\,t + b)\,\mathrm{e}^{2t}$

(*nebo:* pravou stranu charakterizuje číslo 2, to je *dvojný* kořen homogenní rovnice, původní odhad y_P tedy vynásobíme t^2)

(d) $\lambda_{1,2} = \pm 2i, \quad \mathrm{FS} = \{\cos 2t,\, \sin 2t\}$

standardní odhad je $y_P = (a\,t^2 + b\,t + c)\cos 3t + (p\,t^2 + q\,t + r)\sin 3t$,

a protože $\cos 3t,\ \sin 3t$ nejsou řeš. homogenní rovnice, už ho nebudeme dál upravovat

(*nebo:* pravou stranu charakterizuje číslo $3i$, to není kořen charakteristického polynomu homogenní rovnice, nebudeme tedy původní odhad y_P dál upravovat)

(e) $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i, \quad \mathrm{FS} = \{\mathrm{e}^{t}\cos 3t,\, \mathrm{e}^{t}\sin 3t\}$

standardní odhad je $y_P = \mathrm{e}^{t}\,(\,(a\,t + b)\cos 3t + (c\,t + d)\sin 3t)$, a protože $\mathrm{e}^{t}\cos 3t$ je řešením homogenní rovnice, musíme odhad ještě vynásobit t:

$y_P = t\,\mathrm{e}^{t}\,(\,(a\,t + b)\cos 3t + (c\,t + d)\sin 3t)$

(*nebo:* pravou stranu charakterizuje číslo $1 + 3i$, to je kořen charakteristického polynomu homogenní rovnice, musíme tedy původní odhad ještě vynásobit t)

Příklad 8.6: v následující tabulce je 5 různých homogenních rovnic a odpovídajících kořenů charakt. polynomu a FS (poslední 2 sloupce jsou pro kontrolu, spočítejte je sami):

	homog. rovnice	λ_1, λ_2	FS
A	$y'' + y' - 6y = 0$	$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$	$\{e^{2t}, e^{-3t}\}$
B	$y'' + 3y' = 0$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3$	$\{1, e^{-3t}\}$
C	$y'' - 4y' + 4y = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$	$\{e^{2t}, t\,e^{2t}\}$
D	$y'' + 4y = 0$	$\lambda_{1,2} = \pm 2i$	$\{\cos 2t, \sin 2t\}$
E	$y'' - 2y + 10 = 0$	$\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$	$\{e^t \cos 3t, e^t \sin 3t\}$

Určete, v jakém tvaru byste pro jednotlivé případy A až E hledali y_P pro dané pravé strany (v následující tabulce s řešením si zakryjte všechny sloupce kromě prvního a určete je sami):

PS	z	standard. y_P	spec. y_P
2	0	a	B: $t\,a$
e^{-3t}	-3	$a\,e^{-3t}$	A,B: $t\,a\,e^{-3t}$
e^{2t}	2	$a\,e^{2t}$	A: $t\,a\,e^{2t}$, C: $t^2 a\,e^{2t}$
t	0	$at + b$	B: $t\,(at + b)$
$2t^2 + 1$	0	$at^2 + bt + c$	B: $t\,(at^2 + bt + c)$
$\cos 2t$	$2i$	$a\,\cos 2t + b\,\sin 2t$	D: $t\,(a\,\cos 2t + b\,\sin 2t)$
$t\,\cos 2t$	$2i$	$(at + b)\,\cos 2t + (ct + d)\,\sin 2t$	D: $t\,((at + b)\,\cos 2t + (ct + d)\,\sin 2t)$
$\sin t$	i	$a\,\sin t + b\,\cos t$	
$t\,\cos 2t + \sin 2t$	$2i$	$(at + b)\,\cos 2t + (ct + d)\,\sin 2t$	D: $t\,((at + b)\,\cos 2t + (ct + d)\,\sin 2t)$
$e^t \sin 3t$	$1 + 3i$	$e^t(a\,\cos 3t + b\,\sin 3t)$	E: $t\,e^t(a\,\cos 3t + b\,\sin 3t)$
$e^t \cos 2t$	$1 + 2i$	$e^t(a\,\cos 2t + b\,\sin 2t)$	
$t\,e^{2t}$	2	$(at + b)\,e^{2t}$	A: $t\,(at + b)\,e^{2t}$, C: $t^2\,(at + b)\,e^{2t}$
$(t + 1)\,\cos 3t$	$3i$	$(at + b)\,\cos 3t + (ct + d)\,\sin 3t$	

poznámka: ve druhém sloupci v tabulce je uvedeno komplexní číslo z charakterizující pravou stranu PS