Lineární diferenciální rovnice 2. řádu – shrnutí

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x)\ , \qquad x \in J = (\alpha,\,\beta), \quad -\infty \le \alpha < \beta \le \infty \tag{1}$$

$p(x)$, $q(x)$ – koeficienty rovnice, $f(x)$ – pravá strana; předp. $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ jsou spojité na J.

Řešení rovnice (1) je funkce $y(x) \in \mathcal{C}^2(J)$ (tj. má na J spoj. první dvě der.) vyhovující rovnici (1).

Homogenní rovnice:

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0\ , \qquad x \in J \tag{2}$$

- množina všech řešení V homogenní rovnice (2) tvoří **lineární prostor** (podprostor $\mathcal{C}^2(J)$), neboli: jestliže y_1, y_2 jsou řešení (2), pak také $y = c_1\,y_1 + c_2\,y_2$ je řešením (2) pro lib. c_1, $c_2 \in R$.
- dim $V = 2$; **fundamentální systém řešení** $\{\varphi_1,\,\varphi_2\}$ je libovolná báze V

  (pro lin. homogenní rovnici s konstantními koeficienty umíme nalézt, viz cv. 8)

  jak poznáme nezávislost φ_1, φ_2: $W(x) \neq 0$ aspoň v jednom bodě $x \in J$, kde
- **Wronskián** $W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}$
- **obecné řešení homogenní rovnice:** $y_H = c_1\,\varphi_1(t) + c_2\,\varphi_2(t)\,, \quad c_1,\,c_2 \in R$

Obecné řešení nehomogenní rovnice: $y = y_P + y_H = y_P + c_1\,\varphi_1(t) + c_2\,\varphi_2(t)\,, \quad c_1,\,c_2 \in R,$

kde $\{\varphi_1,\,\varphi_2\}$ je fund. systém a y_P je partikulární řešení rovnice (1).

(pro lin. rovnici s konstantními koeficienty umíme pro vhodné pravé strany nalézt, viz cv. 8)

Cauchyho úloha:

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x) \quad \text{na } J, \qquad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \text{kde } x_0 \in J \tag{3}$$

Věta – o existenci a jednoznačnosti řešení

Nechť $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ jsou spojité na J, $x_0 \in J$, y_0, $y_1 \in R$.

Pak existuje právě jedno řešení úlohy (3), a to je definováno na celém intervalu J.

---

téma tohoto cvičení:

Věta – o rozvoji řešení do mocninné řady

Nechť $x_0 \in J$ a nechť $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ lze rozvinout do mocninných řad se středem x_0 konvergentních na intervalu $I = (x_0 - R, x_0 + R)$.

Pak i řešení úlohy (3) lze rozvinout do mocninné řady, která konverguje na intervalu I.

Příklad 9.1 – motivační:

$$y'' - 2\,y = \mathrm{e}^t\ , \qquad y(0) = -1, \quad y'(0) = -1,$$

aproximujte řešení této C.ú. v okolí $t_0 = 0$ polynomem 5. stupně.

Řešení:

jde o lin. rovnici s konst. koeficienty a vhodnou pravou stranou, jejíž přesné řešení můžeme najít postupem z cv. 8, $y = -\mathrm{e}^t$, $t \in R$, a rozvinout do mocninné řady kolem $x_0 = 0$:

$y(t) = -\mathrm{e}^t \approx -1 - t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!}$

tento polynom můžeme ale najít přímo (aniž bychom znali přesné řešení) rozvojem hledaného řešení a koeficientů rovnice do mocninných řad a porovnáním koeficientů na levé a pravé straně rovnice:

- aproximaci y hledáme ve tvaru Taylor. polynomu 5. stupně o středu $t_0 = 0$

  $y \approx a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3 + a_4\,t^4 + a_5\,t^5$ a spočítáme derivace y:

  $y' \approx a_1 + 2\,a_2\,t + 3\,a_3\,t^2 + 4\,a_4\,t^3 + 5\,a_5\,t^4$

  $y'' \approx 2\,a_2 + 6\,a_3\,t + 12\,a_4\,t^2 + 20\,a_5\,t^3$

- pravou stranu rozvineme kolem $t_0 = 0$ jako

  $\mathrm{e}^t \approx 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!}\,, \quad t \in R$

- koeficienty polynomů potřebné pro výpočet a_0 až a_5 si pro přehlednost zapíšeme do tabulky:

	1	t	t^2	t^3
y	a_0	a_1	a_2	a_3
y''	$2\,a_2$	$6\,a_3$	$12\,a_4$	$20\,a_5$
$\mathrm{L} = y'' - 2y$	$2\,a_2 - 2\,a_0$	$6\,a_3 - 2\,a_1$	$12\,a_4 - 2\,a_2$	$20\,a_5 - 2\,a_3$
$\mathrm{P} = \mathrm{e}^t$	1	1	$1/2$	$1/6$

porovnáním koeficientů L = P dostaneme 4 rovnice pro 6 neznámých a_0 až a_5:

$$\begin{aligned} 2\,a_2 - 2\,a_0 &= 1 \\ 6\,a_3 - 2\,a_1 &= 1 \\ 12\,a_4 - 2\,a_2 &= 1/2 \\ 20\,a_5 - 2\,a_3 &= 1/6 \end{aligned}$$

zbývající dvě rovnice dostaneme dosazením počátečních podmínek:

$y(0) = -1 = a_0, \quad y'(0) = -1 = a_1$ (mohli jsme už předtím dosadit do tabulky)

dosazením do první rovnice vypočítáme $a_2 = -\frac{1}{2}$, pak ze druhé rovnice $a_3 = -\frac{1}{6}$, ze třetí $a_4 = -\frac{1}{24}$ a z poslední $a_5 = -\frac{1}{120}$, takže

$y \approx -1 - t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!}\,, \quad t \in R$ – stejný výsledek jako prvním postupem

Pozor: při hledání aproximace přesného řešení rozvojem do mocninných řad dostaneme výsledek pouze na průniku intervalů konvergence všech použitých řad, což nemusí být celý interval existence a jednoznačnosti řešení.

Příklad 9.2 Je dána Cauchyho úloha

$$y'' + x\,y = \frac{1}{2-x}\,, \qquad y(0) = \frac{1}{4}, \quad y'(0) = \frac{1}{8}\,.$$

Aproximujte řešení (v okolí $x_0 = 0$) polynomem 5. stupně.

Řešení:

- interval max. řešení: koeficienty jsou spojité na intervalech $I_1 = (-\infty,\, 2)$ a $I_2 = (2,\, \infty)$, $x_0 = 0 \in I_1$
  $\Rightarrow$ existuje právě jedno řešení na intervalu $I_1 = (-\infty,\, 2)$

- aproximaci y hledáme ve tvaru Taylor. polynomu o středu $x_0 = 0$:
  $y \approx a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + a_4\,x^4 + a_5\,x^5$, tj.
  $y' \approx a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + 4\,a_4\,x^3 + 5\,a_5\,x^4$
  $y'' \approx 2\,a_2 + 6\,a_3\,x + 12\,a_4\,x^2 + 20\,a_5\,x^3$

- pravou stranu rozvineme kolem $x_0 = 0$ jako geometrickou řadu:
  $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{8}\,, \quad |q| = |\frac{x}{2}| < 1 \iff x \in (-2,\, 2)$

- tabulka koeficientů:

	x^0	x^1	x^2	x^3
y''	$2\,a_2$	$6\,a_3$	$12\,a_4$	$20\,a_5$
$x\,y$	0	a_0	a_1	a_2
$\mathrm{L} = y'' + xy$	$2\,a_2$	$6\,a_3 + a_0$	$12\,a_4 + a_1$	$20\,a_5 + a_2$
$\mathrm{P} = \frac{1}{2-x}$	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$

dosazením poč. podmínek $a_0 = y(0) = 1/4$ a $a_1 = y'(0) = 1/8$
a porovnáním L = P dostaneme 4 rovnice pro 4 neznámé a_2 až a_5:

$$\begin{aligned} 2\,a_2 &= 1/2 \\ 6\,a_3 + 1/4 &= 1/4 \\ 12\,a_4 + 1/8 &= 1/8 \\ 20\,a_5 + a_2 &= 1/16 \end{aligned}$$

odtud $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$ a $a_5 = \frac{1}{20}\,(\frac{1}{16} - \frac{4}{16}) = -\frac{3}{320}$, takže

$y \approx \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\,x + \frac{1}{4}\,x^2 - \frac{3}{320}\,x^5\,, \quad x \in (-2,\, 2)$

Příklad 9.3 (zk.): Je dána Cauchyho úloha

$$y'' + (x-1)\,y' = \frac{x-1}{x+3}\,, \qquad y(1) = 1, \quad y'(1) = \frac{1}{4}\,.$$

(a) Aproximujte řešení dané úlohy polynomem 4. stupně se středem v bodě $x_0 = 1$.

(b) Zapište interval I, na kterém lze tento polynom použít k aproximaci dané úlohy.

(c) Pomocí aproximace z bodu (a) určete přibližné řešení v bodě $x_1 = 1.5$.

(d) Určete $y^{IV}(1)$, tj. 4. derivaci v bodě 1.

Řešení:

(a) aproximaci y hledáme ve tvaru Taylor. polynomu o středu $x_0 = 1$:

$y \approx a_0 + a_1\,(x-1) + a_2\,(x-1)^2 + a_3\,(x-1)^3 + a_4\,(x-1)^4$

$y' \approx a_1 + 2\,a_2\,(x-1) + 3\,a_3\,(x-1)^2 + 4\,a_4\,(x-1)^3$

$y'' \approx 2\,a_2 + 6\,a_3\,(x-1) + 12\,a_4\,(x-1)^2$

pravou stranu rozvineme kolem $x_0 = 1$ jako geometrickou řadu:

$\frac{x-1}{x+3} = \frac{x-1}{(x-1)+4} = \frac{x-1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{4}(x-1)} \approx \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{16}(x-1)^2\,, \quad |q| = |\frac{x-1}{4}| < 1$

	$(x-1)^0$	$(x-1)^1$	$(x-1)^2$
y''	$2\,a_2$	$6\,a_3$	$12\,a_4$
$(x-1)\,y'$	0	a_1	$2\,a_2$
$\mathrm{L} = y'' + (x-1)\,y'$	$2\,a_2$	$6\,a_3 + a_1$	$12\,a_4 + 2\,a_2$
$\mathrm{P} = \frac{x-1}{x+3}$	0	1/4	-1/16

dosazením poč. podmínek $a_0 = y(1) = 1$ a $a_1 = y'(1) = 1/4$
a porovnáním L = P dostaneme 3 rovnice pro 3 neznámé a_2 až a_4:

$$\begin{aligned} 2\,a_2 &= 0 \\ 6\,a_3 + 1/4 &= 1/4 \\ 12\,a_4 + 2\,a_2 &= -1/16 \end{aligned}$$

odtud $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ a $a_4 = -\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16} = -\frac{1}{192}$, takže

$y \approx 1 + \frac{1}{4}\,(x-1) - \frac{1}{192}\,(x-1)^4$

(b) interval existence a jednoznačnosti max. řešení – spojitost koeficientů rovnice:

$I_1 = (-\infty, -3)$ a $I_2 = (-3, \infty)$, $x_0 = 1 \in I_2$

$\Rightarrow$ existuje právě jedno max. řešení na intervalu $I_2 = (-3, \infty)$

$|q| = |\frac{x-1}{4}| < 1 \iff |x-1| < 4 \iff x \in (-3, 5), \quad (-3, 5) \subset I_2$

(c) $y(1,5) \approx 1 + \frac{1}{4}(1,5-1) - \frac{1}{192}(1,5-1)^4 = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{192} \cdot \frac{1}{2^4} = 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{192 \cdot 16}$
$192 \cdot 16 = 3075,\ \frac{1}{3075} \approx 0,0003$
$y(1,5) \approx 1 + 0,125 - 0,0003 = 1,1247$

(d) Mocninná řada, kterou jsme získali v úkolu (a), je Taylorův rozvoj funkce y v bodě 1, jehož koeficienty jsou $a_k = \frac{y^{(k)}(1)}{k!}$, kde $y^{(k)}$ značí k-tou derivaci.
$y^{IV}(1) = a_4 \cdot 4! = (-\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16}) \cdot 24 = -\frac{1}{8}$

Příklad 9.4 Je dána Cauchyho úloha

$$y'' + x\,y' + \mathrm{e}^x y = \cos x\,, \qquad y(0) = -2, \quad y'(0) = -1\,.$$

Aproximujte řešení polynomem 5. stupně.

Řešení:

- interval max. řešení: koeficienty jsou spojité v $R \Rightarrow$ existuje právě jedno řešení, definované v celém R

- aproximaci y hledáme ve tvaru Taylor. polynomu o středu $x_0 = 0$:

  $y \approx a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + a_4\,x^4 + a_5\,x^5$, tj.

  $y' \approx a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + 4\,a_4\,x^3 + 5\,a_5\,x^4$

  $y'' \approx 2\,a_2 + 6\,a_3\,x + 12\,a_4\,x^2 + 20\,a_5\,x^3$

- $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\,, \quad x \in R$

  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\,, \quad x \in R$

  $\mathrm{e}^x\,y$ musíme aproximovat pomocí součinu řad:

$y \setminus \mathrm{e}^x$	1	1	1/2	1/6
a_0	a_0	a_0	$\frac{1}{2}\,a_0$	$\frac{1}{6}\,a_0$
a_1	a_1	a_1	$\frac{1}{2}\,a_1$	...
a_2	a_2	a_2	...	...
a_3	a_3	...	...	...

  $c_0 = a_0\,, \quad c_1 = a_0 + a_1\,, \quad c_2 = \frac{1}{2}\,a_0 + a_1 + a_2\,, \quad c_3 = \frac{1}{6}\,a_0 + \frac{1}{2}\,a_1 + a_2 + a_3$

  $\mathrm{e}^x\,y \approx a_0 + (a_0 + a_1)\,x + (\frac{1}{2}\,a_0 + a_1 + a_2)\,x^2 + (\frac{1}{6}\,a_0 + \frac{1}{2}\,a_1 + a_2 + a_3)\,x^3\,, \quad x \in R$

- tabulka koeficientů s dosazením poč. podmínek $a_0 = y(0) = -2$ a $a_1 = y'(0) = -1$:

	x^0	x^1	x^2	x^3
y''	$2\,a_2$	$6\,a_3$	$12\,a_4$	$20\,a_5$
$x\,y'$	0	-1	$2\,a_2$	$3\,a_3$
$\mathrm{e}^x\,y$	-2	-3	$-2 + a_2$	$-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + a_2 + a_3$
$\mathrm{L} = y'' + x\,y' + \mathrm{e}^x y$	$2\,a_2 - 2$	$6\,a_3 - 4$	$12\,a_4 + 3\,a_2 - 2$	$20\,a_5 + 4\,a_3 + a_2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$
$\mathrm{P} = \cos x$	1	0	-1/2	0

  porovnáním L = P dostaneme 4 rovnice pro 4 neznámé a_2 až a_5:

$$\begin{aligned} 2\,a_2 - 2 &= 1 \\ 6\,a_3 - 4 &= 0 \\ 12\,a_4 + 3\,a_2 - 2 &= -1/2 \\ 20\,a_5 + 4\,a_3 + a_2 - 5/6 &= 0 \end{aligned}$$

  odtud $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{1}{12}\,(-\frac{1}{2} + 2 - 3 \cdot \frac{3}{2}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{-6}{2} = -\frac{1}{4}$ a $a_5 = \frac{1}{20}\,(\frac{5}{6} - 4 \cdot \frac{2}{3} - \frac{3}{2}) = -\frac{1}{6}$,

  $y \approx -1 - 2\,x + \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{2}{3}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^4 - \frac{1}{6}\,x^5\,, \quad x \in R$