ODR - Cauchyova úloha

Teorie (stručný výběr z přednášek)

Rovnice s počáteční podmínkou (Cauchyova úloha) 1. řádu v normálním tvaru:

$$y' = f(x, y) \ , \quad \text{počáteční podmínka } \ y(x^{(0)}) = y^{(0)} \, . \tag{1}$$

Existence a jednoznačnost řešení

Nechť funkce $f(x, y)$ a její parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ jsou spojité v oblasti $\Omega \subset R^2$.
Pak každým bodem $[x^{(0)}, y^{(0)}] \in \Omega$ prochází právě jedno max. řešení $y(x)$ rovnice (1), $[x, y(x)] \subset \Omega$.

Rovnice (1) se nazývá *lineární*, jestliže funkce f je lineární vzhledem k proměnné y ,
tj. má tvar $f(x, y) = g_0(x) + g_1(x)\, y$. Pro lineární rovnici platí:
Nechť funkce $g_0(x)$ a $g_1(x)$ jsou spojité na intervalu I. Pak každým bodem $[x^{(0)}, y^{(0)}] \in I \times R$ prochází právě jedno max. řešení $y(x)$ rovnice (1), které je definované na celém intervalu I.

Eulerova metoda (explicitní): zvolíme délku kroku h a pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ počítáme

$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h$
$y^{(k+1)} = y^{(k)} + h\, f(x^{(k)}, y^{(k)})$

Implicitní Eulerova metoda: zvolíme délku kroku h a pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ počítáme

$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h$
$y^{(k+1)} = y^{(k)} + h\, f(x^{(k+1)}, y^{(k+1)})$
– to je implicitní rovnice pro neznámou $y^{(k+1)}$, kterou lze řešit numericky Newtonovou nebo prostou iterační metodou.

Příklad 1

Je dána Cauchyova úloha $\quad y' = \dfrac{y}{x^2} \, , \quad y(1) = 2$.

1) Určete oblast existence a jednoznačnosti řešení úlohy.

2) Vypočítejte přibližnou hodnotu $y(1.4)$:
   a) Explicitní Eulerovou metodou s krokem $h = 0.2$,
   b) Implicitní Eulerovou metodou s krokem $h = 0.2$,
   c) Explicitní a implicitní Eulerovou metodou s krokem $h = 0.1$.

Řešení

1) Daná úloha je lineární, funkce $\dfrac{y}{x^2}$ je spojitá na $I_1 = (-\infty, 0)$ a na $I_2 = ((0, \infty)$, takže rovnice má obecně dva intervaly existence a jednoznačnosti max. řešení. Počáteční podmínka $x^{(0)} = 1$ leží v I_2, interval maximálního řešení je tedy $I_2 = (0, \infty)$.

2) Výsledky jsou shrnuty v Tabulce 1 a pro explicitní Eulerovu metodu navíc znázorněny na Obrázku 1.

Postup:

a) $h = 0.2, \quad x^{(0)} = 1, \quad y^{(0)} = 2$

$k = \dfrac{y^{(0)}}{(x^{(0)})^2} = \dfrac{2}{1^2} = 2$

$x^{(1)} = x^{(0)} + h = 1 + 0.2 = 1.2, \quad y^{(1)} = y^{(0)} + h\,k = 2 + 0.2 \cdot 2 = 2.4$

$k = \dfrac{y^{(1)}}{(x^{(1)})^2} = \dfrac{2.4}{(1.2)^2} = 1.6667$

$x^{(2)} = x^{(1)} + h = 1.2 + 0.2 = 1.4, \quad y^{(2)} = y^{(1)} + h\,k = 2.4 + 0.2 \cdot 1.6667 = 2.7333$

$y(1.4)$ se přibližně rovná $y^{(2)} = 2.7333$, atd., viz hodnoty v posledním sloupci Tabulky 1.

b) Žádný obecný explicitní vzorec pro $y^{(k+1)}$ nemáme k dispozici,

v každém kroku musíme řešit rovnici $y^{(k+1)} = y^{(k)} + h\,f(x^{(k+1)}, y^{(k+1)})$.

Pro tuto úlohu má tvar

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + h\,\frac{y^{(k+1)}}{(x^{(k+1)})^2} \;.$$

Ale v případě, že jde o *lineární* diferenciální rovnici, jako je tato,
lze $y^{(k+1)}$ vyjádřit z uvedené rovnice explicitně:

$$y^{(k+1)} = \frac{(x^{(k+1)})^2}{(x^{(k+1)})^2 - h}\,y^{(k)} \;.$$

$h = 0.2, \quad x^{(0)} = 1, \quad y^{(0)} = 2$

$x^{(1)} = x^{(0)} + h = 1 + 0.2 = 1.2\;, \quad y^{(1)} = \frac{(x^{(1)})^2}{(x^{(1)})^2 - h}\,y^{(0)} = \frac{1.2^2}{1.2^2 - 0.2} \cdot 2 = 2.3226$

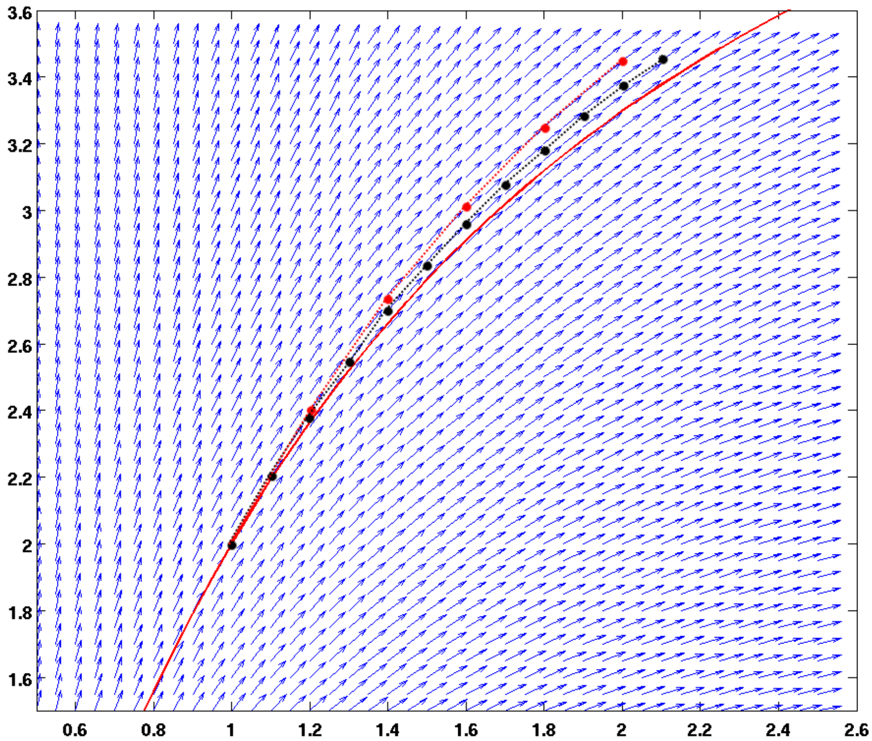
$x^{(2)} = x^{(1)} + h = 1.2 + 0.2 = 1.4\;, \quad y^{(2)} = \frac{(x^{(2)})^2}{(x^{(2)})^2 - h}\,y^{(1)} = \frac{1.4^2}{1.4^2 - 0.2} \cdot 2.3226 = 2.5865$

$y(1.4)$ se přibližně rovná $y^{(2)} = 2.5865$.

c) Postupujeme analogicky jako v bodech a) a b), dostáváme postupně hodnoty uvedené ve 2. sloupci Tabulky 1: $y(1.4)$ je přibližně rovno $y^{(4)} = 2.6979$ pro explicitní metodu a $y^{(4)} = 2.6241$ pro implicitní metodu.

$x^{(i)}$	přesně $y(x^{(i)})$	Euler. explic.	$h = 0.1$ implic.	Euler. explic.	$h = 0.2$ implic.
1	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
1.1	2.1903	2.2000	2.1802		
1.2	2.3627	2.3818	2.3429	2.4000	2.3226
1.3	2.5191	2.5472	2.4902		
1.4	2.6614	2.6979	2.6241	2.7333	2.5865
1.5	2.7912	2.8356	2.7462		
1.6	2.9100	2.9616	2.8578	3.0122	2.8057
1.7	3.0190	3.0773	2.9602		
1.8	3.1192	3.1838	3.0545	3.2476	2.9903
1.9	3.2118	3.2821	3.1415		
2.0	3.2974	3.3730	3.2221	3.4480	3.1477

Tabulka 1. V prvním sloupci tabulky jsou hodnoty x, ve kterých počítáme přibližné řešení. Ve 2. sloupci je přesné řešení $y(x) = 2\,e^{1-1/x}$, ve 3. sloupci je přibližné řešení počítané Eulerovou explicitní, resp. implicitní metodou s krokem $h = 0.1$ a v posledním sloupci jsou tyto výsledky pro krok $h = 0.2$. Výsledky pro explicitní Eulerovu metodu jsou graficky znázorněny na obrázku 1.



Obr. 1: **Př. 1**. Vodorovně osa x, svisle y. Modré šipky znázorňují směr tečny k integrální křivce procházející daným bodem. Plná červená čára zobrazuje přesné řešení úlohy s danou poč. podmínkou $y(x) = 2\,e^{1-1/x}$ (lze spočítat separací proměnných). Červené, resp. černé body představují přibližné řešení úlohy vypočtené Eulerovou metodou s krokem 0.2, resp. 0.1 (viz též Tab. 1).

Soustava rovnic s počáteční podmínkou (Cauchyova úloha) 1. řádu v normálním tvaru:
Hledáme řešení $\mathbf{Y}(x)$ soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}(x)) \quad \text{s počáteční podmínkou}\, \mathbf{Y}(x^{(0)}) = \mathbf{Y}^{(0)}\,, \tag{2}$$

kde

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \ \mathbf{Y}'(x) = \begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{bmatrix}, \ \mathbf{F}(x, \mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{bmatrix}$$

Existence a jednoznačnost řešení

Nechť funkce f_i jsou spojité v souvislé oblasti Ω a mají tam i spojité parciální derivace $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Pak každým bodem $[x^0, \mathbf{Y}^0] \in \Omega$ je určeno právě jedno maximální řešení takové, že $\mathbf{Y}(x^0) = \mathbf{Y}^0$ a $[x, \mathbf{Y}(x)] \subset \Omega$.

Soustava (2) se nazývá *lineární*, pokud funkce f_i jsou lineární vzhledem ke všem proměnným y_j , tj. mají tvar $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = g_{i0}(x) + g_{i1}(x)\,y_1 + g_{i2}(x)\,y_2 + ... + g_{in}(x)\,y_n$.

Pro linární soustavu platí:
Nechť jsou všechny funkce $g_{ij}(x)$ spojité na intervalu I. Pak pro každé $x^0 \in I$ je bodem $[x^0, \mathbf{Y}^0]$ určeno právě jedno maximální řešení definované na celém intervalu I takové, že $\mathbf{Y}(x^0) = \mathbf{Y}^0$.

Eulerova metoda (explicitní)

zvolíme krok h a pro $i = 0, 1, 2, \ldots$

1. spočítáme derivaci $\mathbf{K}$ vektorové funkce $\mathbf{Y}$ jako
   $\mathbf{K} = \mathbf{F}(x^{(i)},\, \mathbf{Y}^{(i)})$
2. položíme
   $x^{(i+1)} = x^{(i)} + h$
   $\mathbf{Y}^{(i+1)} = \mathbf{Y}^{(i)} + h\,\mathbf{K}$

Implicitní Eulerova metoda

zvolíme krok h a pro $i = 0, 1, 2, \ldots$

1. položíme $x^{(k+1)} = x^{(k)} + h$
2. určíme $\mathbf{Y}^{(k+1)}$ z rovnice
   $\mathbf{Y}^{(k+1)} = \mathbf{Y}^{(k)} + h\,\mathbf{F}(x^{(k+1)},\, \mathbf{Y}^{(k+1)})$
   (pomocí Newtonovy nebo prosté iterační metody).

Pro lineární soustavu $\mathbf{Y}' = \mathbf{G}\,\mathbf{Y} + \mathbf{G}_0$ tyto rovnice představují soustavu lin. rovnic

$(\mathbf{E} - h\,\mathbf{G})\,\mathbf{Y}^{(k+1)} = \mathbf{Y}^{(k)} + h\,\mathbf{G}_0 \qquad$ (kde $\mathbf{G}$ a $\mathbf{G}_0$ obecně závisí na $x^{(k+1)}$).

Úloha n-tého řádu

Hledáme řešení $y(x)$ diferenciální rovnice n-tého řádu

$$y^n(x) = f(x, y, y', y'', \ldots y^{n-1}) \quad \text{s počátečními podmínkami}$$
$$y(x^{(0)}) = y_1^{(0)}, \qquad y'(x^{(0)}) = y_2^{(0)}, \qquad \ldots \qquad y^{n-1}(x^{(0)}) = y_n^{(0)}\,. \tag{3}$$

Diferenciální rovnici n-tého řádu převedeme na soustavu n diferenciálních rovnic 1. řádu, kterou už umíme řešit např. Eulerovou metodou: v rovnici (3) položíme
$y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$, $\ldots y_n = y^{n-1}$, takže dostaneme

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y}(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Příklad 2

Je dána Cauchyova úloha

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} y_1 \sin(x) + y_3 \\ y_2 \ln(x+1) - 4 \\ 2y_1 \ - \ \dfrac{y_3}{x-2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y}(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Ověřte, že úloha má právě jedno řešení, a určete interval I jejího maximálního řešení.
b) Zvolte krok $h = 0.1$ a vypočítejte přibližnou hodnotu $\mathbf{Y}(1.2)$ Eulerovou metodou.

Řešení

a) Úloha je lineární, proto stačí ověřit spojitost koeficientů, tj. funkcí $\ln(x+1)$, $\sin x$ a $\frac{1}{x-2}$:

$x+1>0 \ \Rightarrow \ x>-1, \quad x-2 \neq 0 \ \Rightarrow \ x \neq 2\ , \qquad I_1 = (-1,2),\ I_2 = (2,\infty)$

$x^{(0)} = 1 \in I_1 \Rightarrow$ interval maximálního řešení úlohy je $(-1,2)$.

b) $x^{(0)} = 1$, $\mathbf{Y}^{(0)} = (-1,1,2)^T$, $h = 0.1$:

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}(x^{(0)}, \mathbf{Y}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -1 \cdot \sin(1) + 2 \\ 1 \cdot \ln(1+1) - 4 \\ 2 \cdot (-1) \ - \ \dfrac{2}{1-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.84147 + 2 \\ 0.69315 - 4 \\ -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1585 \\ -3.3068 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x^{(1)} = x^{(0)} + h = 1 + 0.1 = 1.1$

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{Y}^{(0)} + h\,\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 1.1585 \\ -3.3068 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8842 \\ 0.6693 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}(x^{(1)}, \mathbf{Y}^{(1)}) = \begin{bmatrix} -0.8842 \cdot \sin(1.1) + 2 \\ 0.6693 \cdot \ln(1.1+1) - 4 \\ 2 \cdot (-0.8842) \ - \ \dfrac{2}{1.1-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7880 + 2 \\ 0.6693 \cdot 0.74194 - 4 \\ -1.7684 + 2.2222 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2120 \\ -3.5034 \\ 0.45380 \end{bmatrix}$$

$x^{(2)} = x^{(1)} + h = 1.1 + 0.1 = 1.2$

$$\mathbf{Y}^{(2)} = \mathbf{Y}^{(1)} + h\,\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0.8842 \\ 0.6693 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 1.2120 \\ -3.5034 \\ 0.4538 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7630 \\ 0.3190 \\ 2.0454 \end{bmatrix}$$

Přibližná hodnota $\mathbf{Y}(1.2)$ je $\mathbf{Y}^{(2)} = (-0.7630, 0.3190, 2.0454)^T$.

Příklad 3 - harmonický oscilátor (tlumené kmity)

Je dána úloha $y'' + 2y' + y = e^{-t}$ s poč. podmínkami $y(0) = 2,\ y'(0) = -4.$
Najděte řešení v čase $t = 0.2$. Použijte Eulerovu metodu s krokem $h = 0.1$.

Řešení

Danou rovnici 2. řádu nejprve převedeme na soustavu dvou rovnic prvního řádu:
položíme $y_1 = y$ a $y_2 = y'$ (tj. hledáme nyní dvě funkce: y_1 představující výchylku a y_2 rychlost).
Platí $y_1' = y_2$ a $y_2' = e^t - 2y_2 - y_1$, tj.

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} y_2 \\ e^{-t} - 2y_2 - y_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$h = 0.1,\ \ t^{(0)} = 0,\ \ \mathbf{Y}^{(0)} = (2, -4)^T,$

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}(t^{(0)}, \mathbf{Y}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -4 \\ e^0 - 2 \cdot (-4) - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$t^{(1)} = t^{(0)} + h = 0.1$$

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{Y}^{(0)} + h\,\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 \\ -3.3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}(t^{(1)}, \mathbf{Y}^{(1)}) = \begin{bmatrix} -3.3 \\ e^{-0.1} - 2 \cdot (-3.3) - 1.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.3000 \\ 5.9048 \end{bmatrix}$$

$$t^{(2)} = t^{(1)} + h = 0.2$$

$$\mathbf{Y}^{(2)} = \mathbf{Y}^{(1)} + h\,\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1.6 \\ -3.3 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} -3.3000 \\ 5.9048 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2700 \\ -2.7095 \end{bmatrix}$$

V čase $t = 0.2$ je výchylka $y(0.2)$ rovna přibližně 1.2700 a rychlost $y'(0.2)$ je rovna přibližně -2.7095.
(Přesné řešení je $y(t) = (2 - 2t + 0.5t^2)\, e^{-t}$, tj. $y(0.2) = 1.3263$.)

Příklad 4

Je dána Cauchyova úloha

$(x-1)y''' + 2xy'' + 5 \;=\; 2x^2y'' + (x-1)\sqrt{(y')^2-2}$

s počátečními podmínkami $y(0)=0,\; y'(0)=2,\; y''(0)=-1$.

a) Určete oblast existence a jednoznačnosti řešení úlohy.

b) Vypočítejte přibližnou hodnotu $y'(0.1)$ Eulerovou metodou.

Řešení

Nejdřív převedeme rovnici na normální (kanonický) tvar:

$y''' \;=\; \sqrt{(y')^2-2} \;+\; 2x\,y'' \;-\; \dfrac{5}{x-1}$

Pak položíme $y_1=y,\; y_2=y',\; y_3=y''$ a převedeme ji na soustavu 1. řádu:

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \sqrt{(y_2)^2-2} \;+\; 2x\,y_3 \;-\; \dfrac{5}{x-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a) Funkce $y_2,\; y_3$ a $\sqrt{(y_2)^2-1} + 2x\,y_3 - \frac{5}{x-1}$ i jejich derivace podle y_i ($\frac{\partial f_3}{\partial y_2} = \frac{y_2}{\sqrt{(y_2)^2-2}}$) jsou spojité pro $x \neq 1$ a $y_2 \notin \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$, tj. na oblastech

$\Omega_1 = (-\infty,1)\times R\times(-\infty,-\sqrt{2})\times R \quad , \quad \Omega_2 = (-\infty,1)\times R\times(\sqrt{2},\infty)\times R$

$\Omega_3 = (1,\infty)\times R\times(-\infty,-\sqrt{2})\times R \quad , \quad \Omega_4 = (1,\infty)\times R\times(\sqrt{2},\infty)\times R$

Počáteční podmínka $[0,0,2,-1]$ leží v oblasti Ω_2, a proto oblast existence a jednoznačnosti řešení dané úlohy je Ω_2 .

b) Máme $x^{(0)}=0,\; \mathbf{Y}^{(0)}=(0,2,-1)^T$ a zvolíme $h=0.1$:

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}(x^{(0)},\mathbf{Y}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \sqrt{2^2-2} \;+\; 2\cdot 0\cdot(-1) \;-\; \dfrac{5}{0-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \sqrt{2} \;+\; 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6.4142 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{Y}^{(0)} + h\,\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6.4142 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.9 \\ -0.3586 \end{bmatrix}$$

Přibližná hodnota $y'(0.1)$ je $y_2^{(1)} = 1.9$.