Iterační metody

Teorie (velmi stručný výběr z přednášek)

Prostá iterační metoda (dále zkratka *pim*)

Soustavu $x = Ux + v$ řešíme tak, že
1. zvolíme $x^{(0)}$,
2. pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ počítáme $x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + v$,

kritérium konvergence: $||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| < \varepsilon$.

Podmínky konvergence:
$\rho(U) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ *pim* konverguje
$||U|| < 1 \quad \Rightarrow \quad$ *pim* konverguje

Řešení soustavy Ax = b

Postup: soustavu $Ax = b$ převedeme na soustavu $x = Ux + v$, tu řešíme *pim*. Využijeme přitom vyjádření matice A jako součtu $A = L + D + U$, kde L je dolní trojúhelníková část, D je diagonála a U je horní trojúhelníková část.

Jacobiho metoda (dále zkratka J)

Soustavu $Ax = b$ vyjádříme jako $x = U_J\, x + v_J$,
kde $U_J = -D^{-1}(L + U)$ a $v_J = D^{-1}b$. Tuto soustavu řešíme *pim*.

Podmínky konvergence:
$\rho(U_J) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad J$ konverguje
A je ODD $\quad \Rightarrow \quad J$ konverguje

Věta: vl. čísla λ_i matice U_J lze získat řešením rovnice $\det(L + \lambda D + U) = 0$.

Gaussova-Seidelova metoda (dále zkratka GS)

Soustavu $Ax = b$ vyjádříme jako $x = U_G\, x + v_G$,
kde $U_G = -(L + D)^{-1}U$ a $v_J = (L + D)^{-1}b$. Tuto soustavu řešíme *pim*.

Podmínky konvergence:
$\rho(U_G) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad GS$ konverguje
A je ODD $\quad \Rightarrow \quad GS$ konverguje
A je symetrická a pozitivně definitní $\quad \Rightarrow \quad GS$ konverguje

Věta: vl. čísla λ_i matice U_G lze získat řešením rovnice $\det(\lambda L + \lambda D + U) = 0$.

Prostá iterační metoda

Příklad 4

Je dána soustava rovnic $x = Ux + v$, kde

$$U = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -5/4 & -3/2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Zvolte $x^{(0)} = (\,0,\,0)^T$ a spočítejte první tři iterace prostou iterační metodou.
b) Dokažte, že *pim* pro tuto soustavu konverguje.

Řešení

a)

$$x^{(1)} = Ux^{(0)} + v = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -5/4 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = Ux^{(1)} + v = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -5/4 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5/2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(3)} = Ux^{(2)} + v = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -5/4 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Nejdřív zkusíme, jestli platí některá z postačujících podmínek, protože se snáze spočítají:

$$||U||_1 = \max(\,|1/2|+|-5/4|,\ |\,1\,|+|-3/2|) = \max(\,7/4,\ 10/4) = 10/4 > 1$$

$$||U||_\infty = \max(|1/2|+|1|, |-5/4|+|-3/2|) = \max(\,3/2,\ 11/4) = 11/4 > 1$$

$$||U||_2 = \sqrt{(1/2)^2 + 1^2 + (-5/4)^2 + (-3/2)^2} = \sqrt{81/16} = 9/4 > 1$$

Žádná z norem není menší než 1, takže z nich nepoznáme nic.

Musíme ověřit nutnou a postačující podmínku, tj. spočítat $\rho(U)$:

$\det(U - \lambda I) = (1/2 - \lambda)(-3/2 - \lambda) + 5/4 = \lambda^2 + \lambda + 1/2$

$\quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -1/2 \pm 1/2i$

$||\lambda_{1,2}|| = \sqrt{(1/2)^2 + (\pm 1/2)^2} = \sqrt{1/2} = \sqrt{2}/2 \quad \Rightarrow \quad \rho(U) = \sqrt{2}/2 < 1\ .$

Spektrální poloměr iterační matice je menší než 1 $\quad \Rightarrow \quad$ *pim* konverguje.

V dalších příkladech použijeme matice z **Příkladu 3** z minulého cvičení

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

o kterých jsme tam dokázali některé jejich vlastnosti.

Jacobiho metoda

Příklad 5

Je dána soustava rovnic $Ax = b$, kde A je matice z př. 3 a $b = (2, 1, -1)^T$.
a) Zvolte $x^{(0)} = (\,0,\,0,\,0)^T$ a spočítejte první dvě iterace J metodou.
b) Dokažte, že J pro tuto soustavu konverguje.
c) Lze na základě výsledků př. 3 rozhodnout, zda J konverguje i pro matice B a C?

Řešení

a) Jednotlivé iterace J metody se počítají lépe po složkách než v maticovém tvaru. Postup:

1. Napíšeme si soustavu po jednotlivých rovnicích:

$$\begin{aligned} -5x_1 - x_2 \qquad &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

2. Z každé rovnice vyjádříme diagonální prvek:

$$\begin{aligned} x_1 &= -(2 + x_2)/5 \qquad (1) \\ x_2 &= (1 - 3x_1 - x_3)/3 \\ x_3 &= (-1 - x_1 + x_2)/2 \end{aligned}$$

3. Pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ počítáme $x^{(k+1)}$ tak, že do pravé strany (1) dosadíme složky předchozí iterace $x^{(k)}$:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -(2 + x_2^{(k)})/5 \\ x_2^{(k+1)} &= (1 - 3x_1^{(k)} - x_3^{(k)})/3 \\ x_3^{(k+1)} &= (-1 - x_1^{(k)} + x_2^{(k)})/2 \end{aligned}$$

Pro $k = 0$ dostaneme

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -(2 + x_2^{(0)})/5 = -(2+0)/5 = -2/5 \\
x_2^{(1)} &= (1 - 3x_1^{(0)} - x_3^{(0)})/3 = (1-0-0)/3 = 1/3 \\
x_3^{(1)} &= (-1 - x_1^{(0)} + x_2^{(0)})/2 = (-1-0+0)/2 = -1/2
\end{aligned}$$

První iterace je tedy $x^{(1)} = (-2/5,\, 1/3, -1/2)^T$. Druhá iterace:

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= -(2 + x_2^{(1)})/5 = -(2+1/3)/5 = -7/15 \\
x_2^{(2)} &= (1 - 3x_1^{(1)} - x_3^{(1)})/3 = (1-3(-2/5)-(-1/2))/3 = 9/10 \\
x_3^{(2)} &= (-1 - x_1^{(1)} + x_2^{(1)})/2 = (-1-(-2/5)+1/3)/2 = -2/15
\end{aligned}$$

Druhá iterace je $x^{(2)} = (-7/15,\, 9/10, -2/15)^T$.

b) V př. 3 jsme dokázali, že A je ostře diagonálně dominantní (ODD), což je postačující podmínka pro konvergenci J metody.

c) Matice B ani C z př. 3 nejsou ODD, postačující podmínka pro konvergenci J metody tedy není splněna a o konvergenci nevíme nic. Kdybychom chtěli poznat, zda J metoda konverguje, museli bychom spočítat spektrální poloměr matice U_J, což pro matici 3×3 obecně není snadné.

Příklad 6

Rozhodněte, zda pro soustavu $Ax = b$ bude konvergovat J metoda, je-li dáno

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 11 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Řešení

Matice není ODD, postačující podmínka pro konvergenci J metody tedy neplatí a musíme spočítat spektrální poloměr matice U_J. Vlastní čísla matice U_J určíme z rovnice $\det(L + \lambda D + U) = 0$, tj.

$$\begin{vmatrix} 6\lambda & 11 & -1 \\ 1 & 3\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 36\lambda^3 - 3\lambda - 22\lambda = \lambda(36\lambda^2 - 25) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \pm 5/6 \quad \Rightarrow \quad \rho(U_J) = 5/6 < 1.$$

Spektrální poloměr matice U_J je menší než 1, takže J metoda konverguje.

Gaussova-Seidelova metoda

Příklad 7

Je dána soustava rovnic $Ax = b$, kde A je matice z př. 3 a $b = (2, 1, -1)^T$.
a) Zvolte $x^{(0)} = (\,0,\,0,\,0)^T$ a spočítejte první dvě iterace GS metodou.
b) Dokažte, že GS pro tuto soustavu konverguje.
c) Lze na základě výsledků př. 3 rozhodnout, zda GS konverguje i pro matice B a C?

Řešení

a) Jednotlivé iterace GS metody se počítají lépe po složkách než v maticovém tvaru. Postup:

1. Napíšeme si soustavu po jednotlivých rovnicích - stejně jako u J metody, viz př.5.

2. Z každé rovnice vyjádříme diagonální prvek - stejně jako u J metody, viz př.5.

3. Pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ počítáme $x^{(k+1)}$ po jednotlivých rovnicích, počínaje první. Začneme jako u J metody, ale jakmile spočítáme novou složku, hned ji dosadíme do pravé strany všech zbývajících rovnic (1):

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= -(2 + x_2^{(k)})/5 \\
x_2^{(k+1)} &= (1 - 3x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)})/3 \\
x_3^{(k+1)} &= (-1 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)})/2
\end{aligned}$$

Pro $k = 0$ dostaneme

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -(2 + x_2^{(0)})/5 = -(2+0)/5 = -2/5 \\
x_2^{(1)} &= (1 - 3x_1^{(1)} - x_3^{(0)})/3 = (1 - 3(-2/5) - 0)/3 = 11/15 \\
x_3^{(1)} &= (-1 - x_1^{(1)} + x_2^{(1)})/2 = (-1 - (-2/5) + 11/15)/2 = 1/15
\end{aligned}$$

První iterace je tedy $x^{(1)} = (-2/5,\, 11/15,\, 1/15)^T$. Druhá iterace:

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= -(2 + x_2^{(1)})/5 = -(2 + 11/15)/5 = -41/75 \\
x_2^{(2)} &= (1 - 3x_1^{(2)} - x_3^{(1)})/3 = (1 - 3(-41/75) - 1/15)/3 = 193/225 \\
x_3^{(2)} &= (-1 - x_1^{(2)} + x_2^{(2)})/2 = (-1 - (-41/75) + 193/225)/2 = 91/450
\end{aligned}$$

Druhá iterace je $x^{(2)} = (-41/75,\ 193/225, 91/450)^T$.

b) V př. 3 jsme dokázali, že A je ostře diagonálně dominantní (ODD), což je postačující podmínka pro konvergenci GS metody. GS metoda konverguje.

c) V př. 3 jsme dokázali, že B je symetrická a pozitivně definitní, což je postačující podmínka pro konvergenci GS metody. Matice C není ODD ani pozitivně definitní, žádná z postačujcích podmínek pro konvergenci GS metody pro matici C tedy není splněna. Závěr: pro matici B GS metoda konverguje, pro matici C o konvergenci GS metody nevíme nic. Kdybychom chtěli poznat, zda GS metoda konverguje i pro matici C, museli bychom spočítat spektrální poloměr odpovídající matice U_G.

Příklad 8

Rozhodněte, zda pro soustavu $Ax = b$ z př. 6 bude konvergovat GS metoda.

Řešení

Matice A není ODD ani symetrická, žádná z postačujcích podmínek pro konvergenci GS metody tedy není splněna a musíme spočítat spektrální poloměr matice U_G. Vlastní čísla matice U_G určíme z rovnice $\det(\lambda(L+D)+U) = 0$, tj.

$$\begin{vmatrix} 6\lambda & 11 & -1 \\ \lambda & 3\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 36\lambda^3 - 3\lambda^2 - 22\lambda^2 = \lambda^2(36\lambda - 25) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 25/36 \quad \Rightarrow \quad \rho(U_G) = 25/36 < 1.$$

Spektrální poloměr matice U_G je menší než 1, takže GS metoda konverguje.