POČÍTAČOVÁ GRAFIKA 2023/24

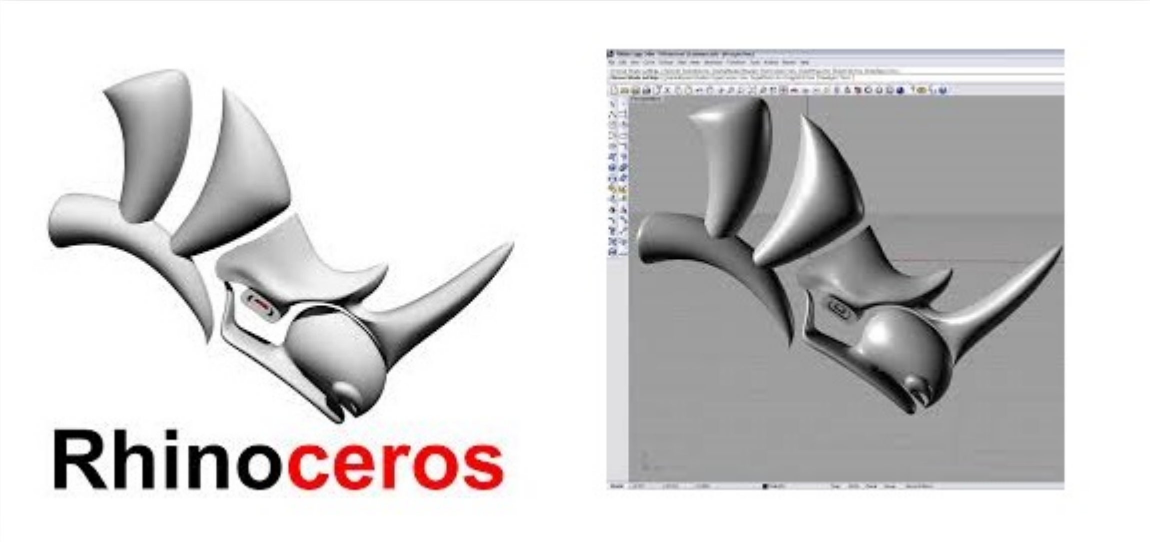
MGR. MARTA HLAVOVÁ

marta.hlavova@fs.cvut.cz
konzultace: čtvrtek 12:30-14:00, KN:D-304

INFORMACE O PŘEDMĚTU → MAT.FS.CVUT.CZ + MOODLE

- obsah přednášek a cvičení
- podrobný harmonogram přednášek a cvičení
- literatura:
  - Linkeová, I.: Základy počítačového modelování křivek a ploch
- klasifikovaný zápočet (dvě povinné plus jedna povinně volitelná práce, odevzdávání v Moodle)

RHINOCEROS 3D - VERZE 7



RA

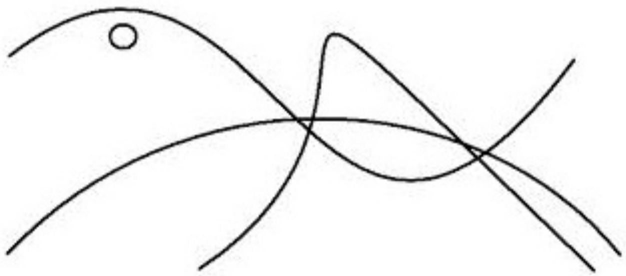
Rhino Accounts tech@mcneel.com

Komu: [redacted]

Rhino Accounts – You have been invited to join kg_pgr_rhino

Rhino Accounts

Greetings,
You have been invited by Marta Hlavová to join the “kg_pgr_rhino” team.
Login or Create a Rhino Account to accept this invitation.
When you accept this invitation, other team members will be able to view your name and email address.
If the link above does not work, copy and paste this URL into your browser:
`https://accounts.rhino3d.com/…8Gg`
Thanks,
Will Pearson
Robert McNeel & Associates



Křivky

KŘIVKA

podle hlediska:

- fyzika $\rightarrow$ dráha bodu
- geometrie $\rightarrow$ množina bodů dané vlastnosti - průnik, řez, ...
- matematika $\rightarrow$ spojité zobrazení intervalu do roviny či prostoru
- počítačová grafika $\rightarrow$ objekt generovaný řídícími/definičními body

Definice:
Křivka $=$ každá souvislá podmnožina k prostoru $\mathbb{R}^n$, která je spojitým zobrazením intervalu $I \subset \mathbb{R}$.

KŘIVKA - ANALYTICKÁ REPREZENTACE

- explicitní
  $$y = \pm\sqrt{1 - x^2}; x \in [-1, 1]$$
- implicitní
  $$x^2 + y^2 = 1$$
- parametrické
  $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t; t \in [0, 2\pi]$
  - bodová rovnice
    $$P(t) = [x(t), y(t)]; t \in I$$
  - vektorová rovnice
    $$P(t) = (x(t), y(t)); t \in I$$

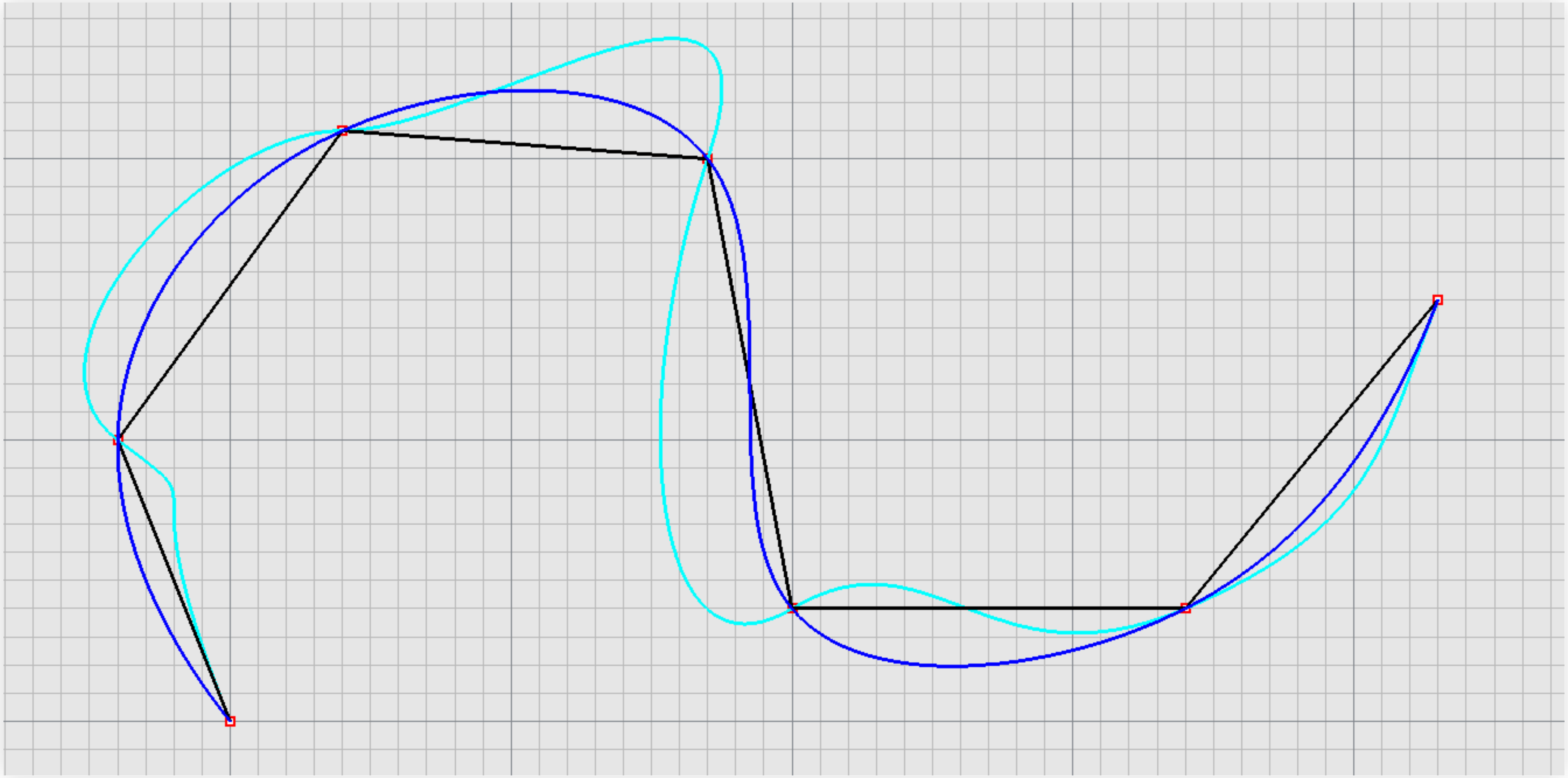
KŘIVKA - ANALYTICKÁ REPREZENTACE

typ rovnice:

- transcendentní
- algebraická (polynomiální)

$$x(t) = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}, y(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}, t \in \mathbb{R}$$

interpolační

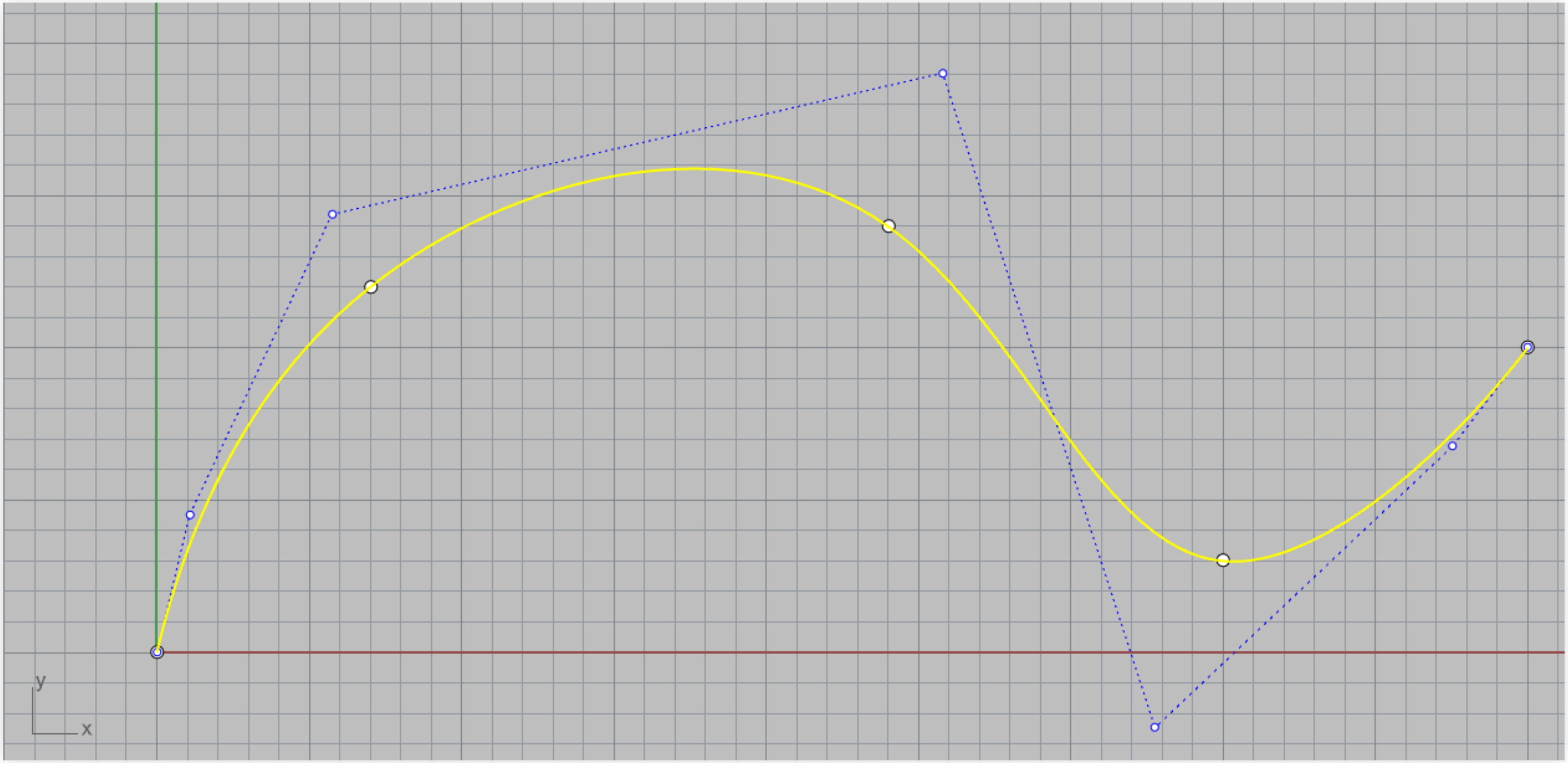


Fergusonova (Hermitova) kubika, spline křivky

KŘIVKY V POČÍTAČOVÉM MODELOVÁNÍ

aproximační

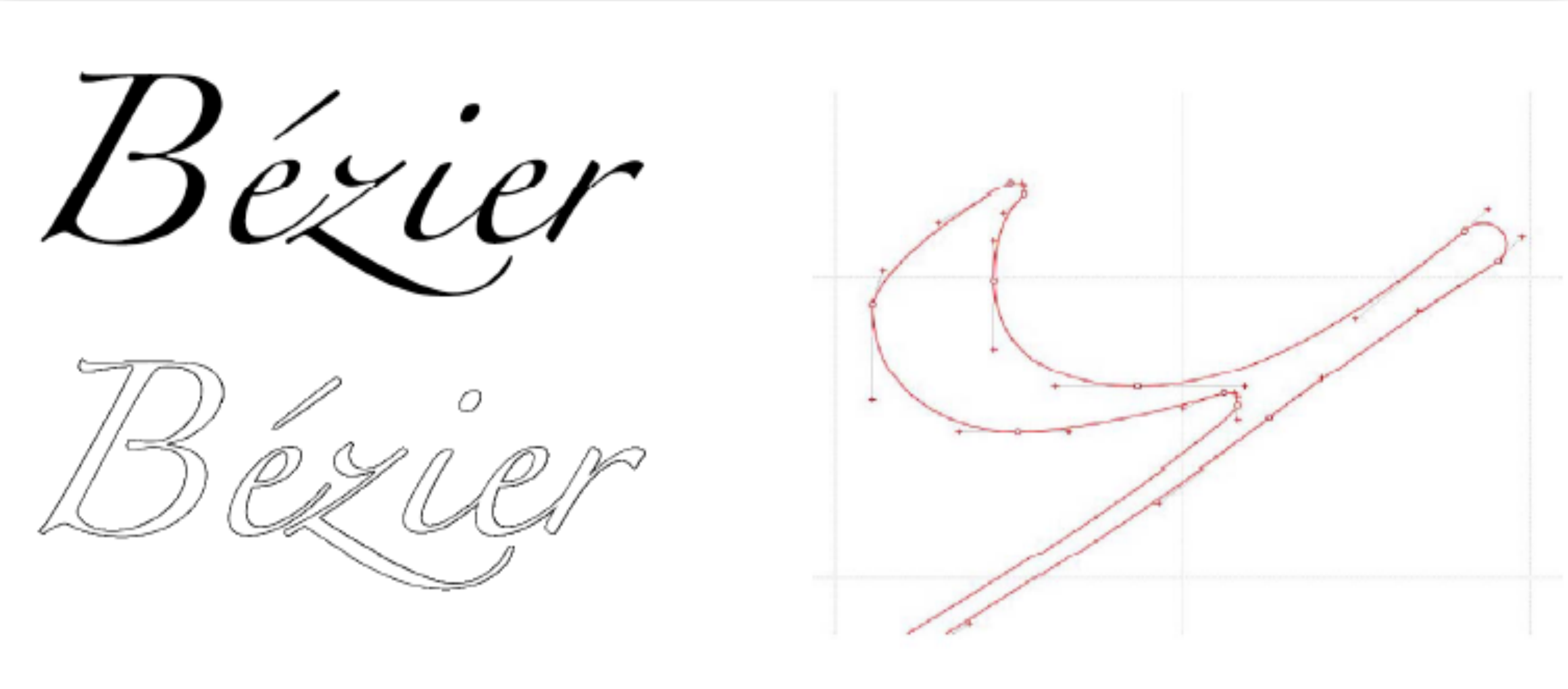
Bézierova křivka, Coonsova kubika, B-spline křivky, NURBS interpolační vs. aproximační



ZÁKLADNÍ POJMY

- segment, uzel
- uniformní parametrizace
- tečný vektor
- regulární (singulární) bod
- inflexní bod

Pierre Étienne Bézier (1910-1999), Renault
Paul de Faget de Casteljau (*1930), Citroën
Сергей Натанович Бернштейн (Sergei Bernstein) (1880-1968)



BÉZIEROVA KŘIVKA N-TÉHO STUPNĚ

- aproximační jednosegmentová křivka
- uniformní parametrizace
- řídící polygon křivky, konvexní obal
- lineární kombinace bodů řídícího polygonu

ROVNICE BÉZIEROVY KŘIVKY

řídící polygon $V_0, V_1, \ldots, V_n$

$$\Downarrow$$

vektorová rovnice křivky

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) V_i,\ t \in [0,1]$$

kde

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},\ i = 0, 1, \ldots, n$$

jsou tzv. Bernsteinovy polynomy

ODVOZENÍ 1

lineární kombinace bodů

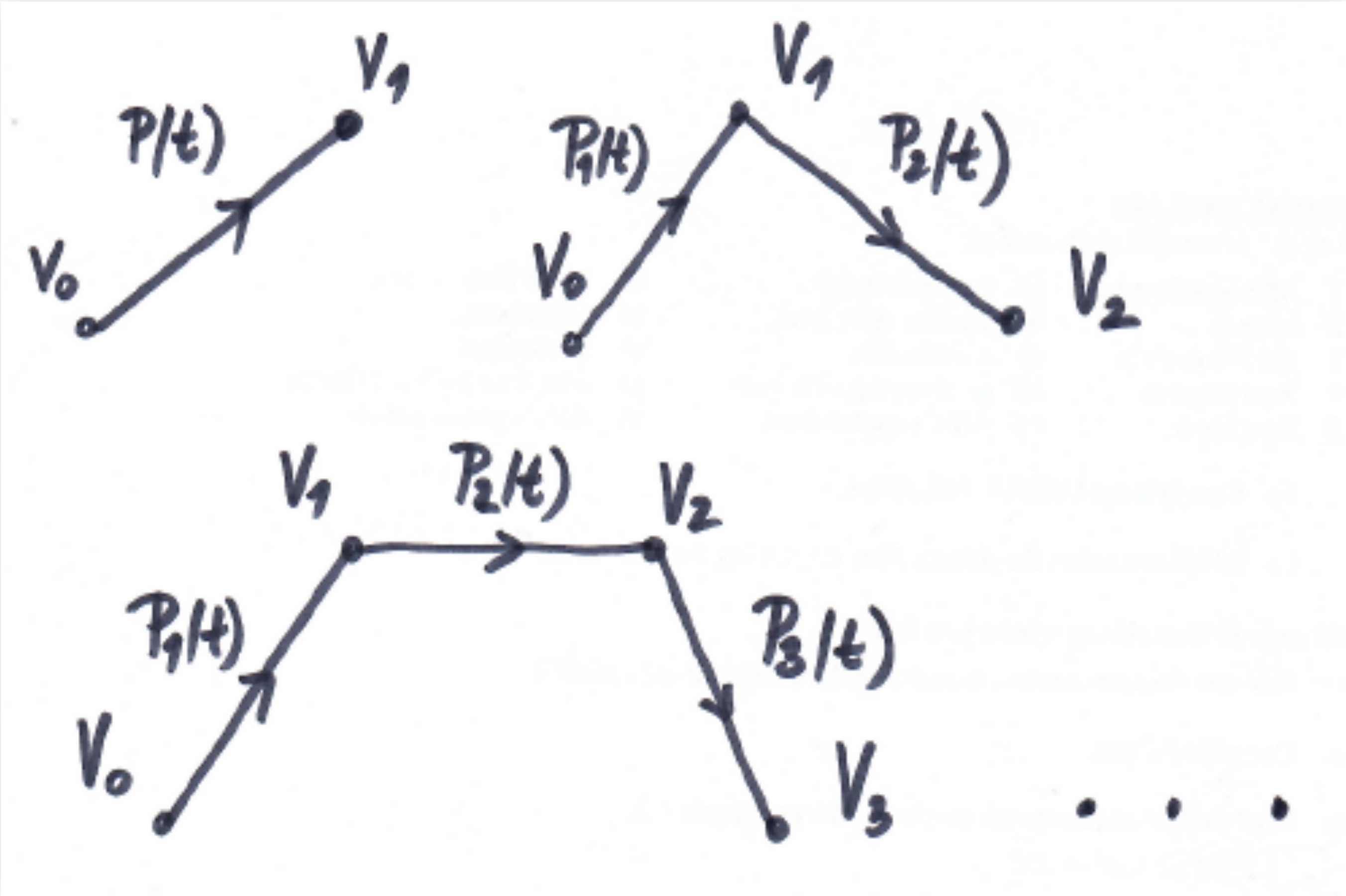
$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) V_i \text{ je bod } \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = 1$$

$$1 = 1^n = (1 - t + t)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

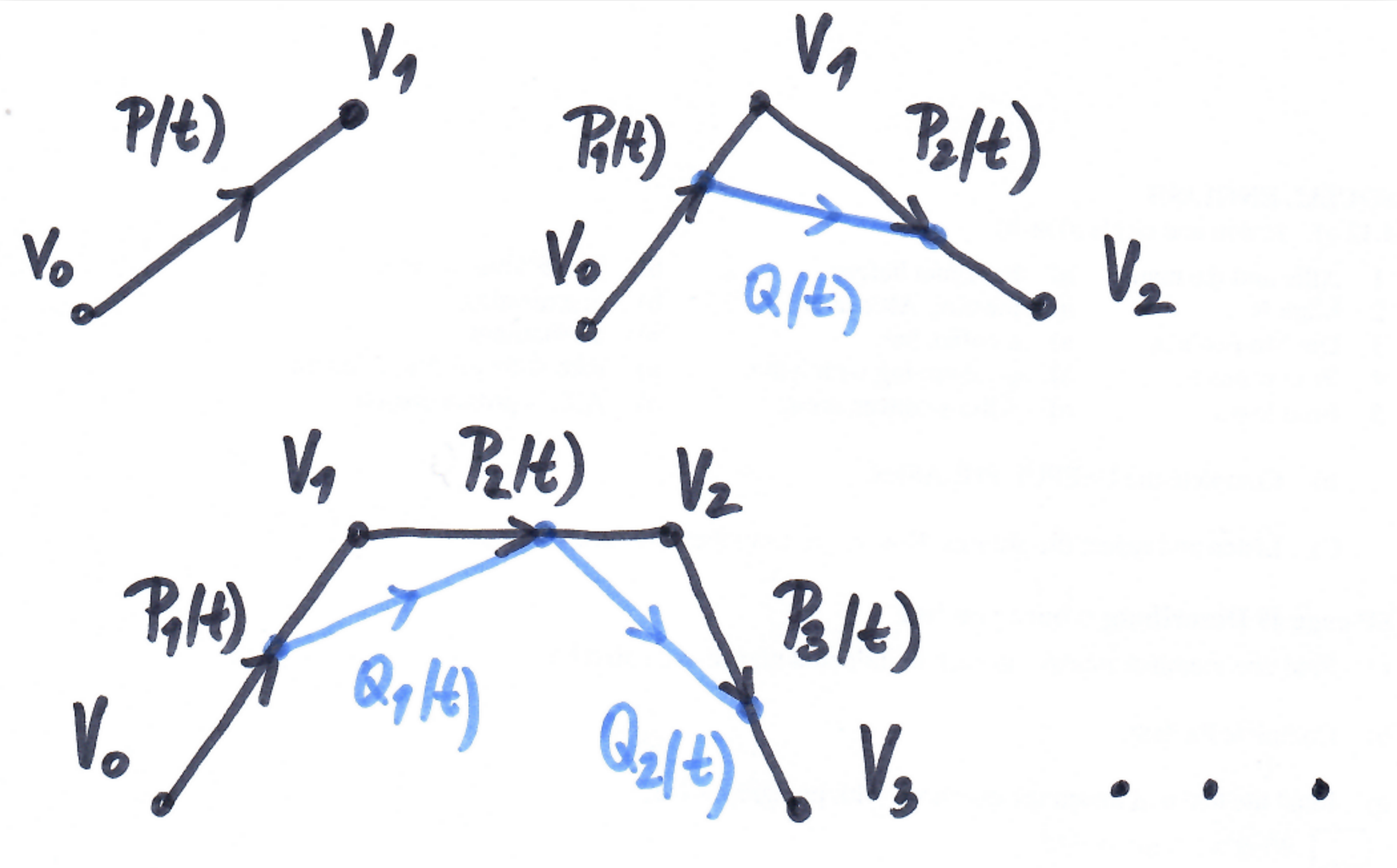
$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

ODVOZENÍ 2

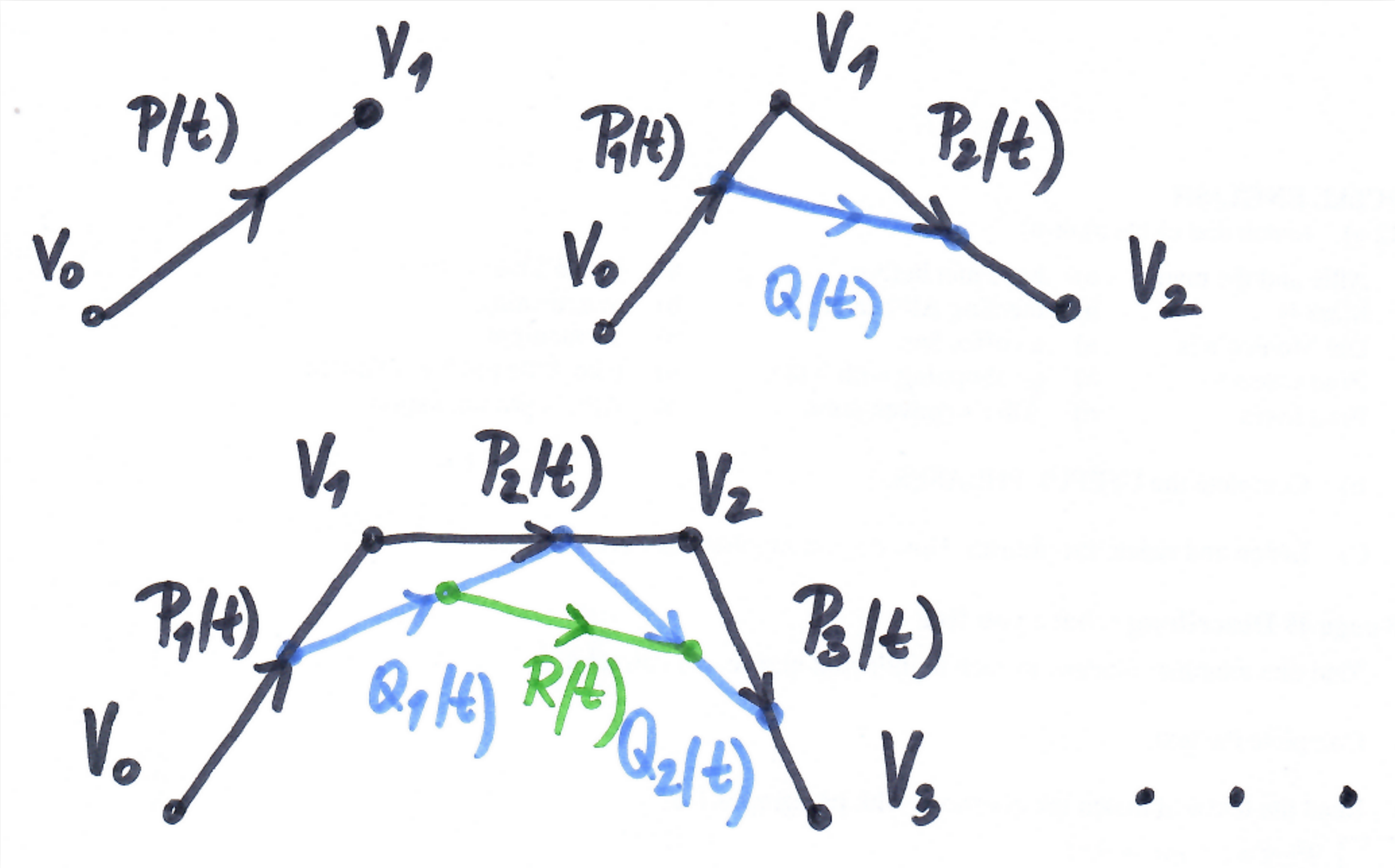
lineární interpolace



ODVOZENÍ 2



ODVOZENÍ 2



BÉZIEROVA KŘIVKA PRVNÍHO STUPNĚ (LINEÁRNÍ)

řídící polygon V_0, V_1

1) úsečka mezi dvěma řídicími body V_0, V_1

$P(t) = V_0 + t\overrightarrow{V_0 V_1} = V_0 + t(V_1 - V_0),\ t \in [0, 1]$

2) nebo vzorec

$$P(t) = B_{0,1}(t)V_0 + B_{1,1}(t)V_1,\ t \in [0, 1]$$

$B_{0,1} = \binom{1}{0}t^0(1-t)^{1-0} = 1 - t$
$B_{1,1} = \binom{1}{1}t^1(1-t)^{1-1} = t$

$$P(t) = (1-t)V_0 + tV_1,\ t \in [0, 1]$$

BÉZIEROVA KŘIVKA DRUHÉHO STUPNĚ (KVADRATICKÁ)

řídící body V_0, V_1, V_2

úsečka mezi $V_0, V_1 \Rightarrow P_1(t) = (1-t)V_0 + tV_1,\ t \in [0,1]$
úsečka mezi $V_1, V_2 \Rightarrow P_2(t) = (1-t)V_1 + tV_2,\ t \in [0,1]$

úsečka mezi $P_1(t), P_2(t) \Rightarrow Q(t) = (1-t)P_1(t) + tP_2(t),\ t \in [0,1]$

$$Q(t) = (1-t)^2 V_0 + 2t(1-t)V_1 + t^2 V_2,\ t \in [0,1]$$

tedy vzorec

$$Q(t) = B_{0,2}(t)V_0 + B_{1,2}(t)V_1 + B_{2,2}(t)V_2,\ t \in [0,1]$$

kde

$B_{0,2} = \binom{2}{0} t^0 (1-t)^{2-0} = (1-t)^2$
$B_{1,2} = \binom{2}{1} t^1 (1-t)^{2-1} = 2t(1-t)$
$B_{2,2} = \binom{2}{2} t^2 (1-t)^{2-2} = t^2$

BÉZIEROVA KŘIVKA TŘETÍHO STUPNĚ (KUBICKÁ)

řídící body V_0, V_1, V_2, V_3

postupně přes úsečky $\ldots \Rightarrow$ vzorec

$P(t) = B_{0,3}(t)V_0 + B_{1,3}(t)V_1 + B_{2,3}(t)V_2 + B_{3,3}(t)V_3,\ t \in [0,1]$
kde
$B_{0,3} = \binom{3}{0}t^0(1-t)^{3-0} = (1-t)^3$
$B_{1,3} = \binom{3}{1}t^1(1-t)^{3-1} = 3t(1-t)^2$
$B_{2,3} = \binom{3}{2}t^2(1-t)^{3-2} = 3t^2(1-t)$
$B_{3,3} = \binom{3}{3}t^3(1-t)^{3-3} = t^3$

BOD KŘIVKY - POČÁTEČNÍ A KONCOVÝ

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) V_i,\ t \in [0,1]$$

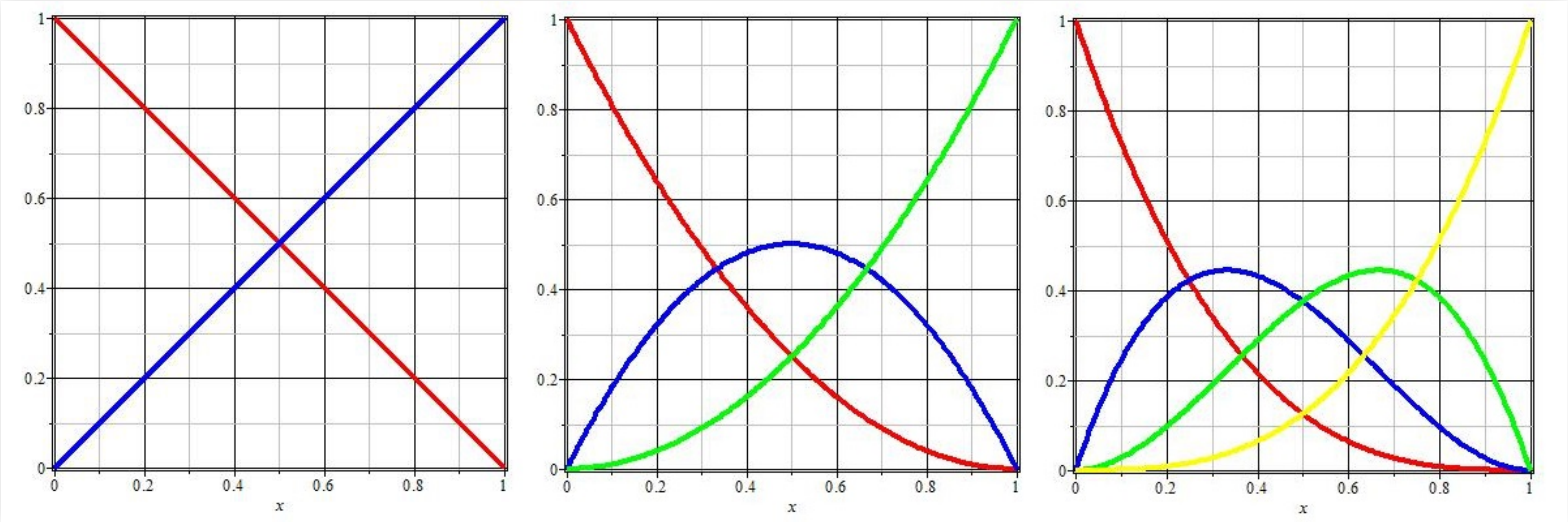
počáteční bod křivky $\iff t = 0$

koncový bod křivky $\iff t = 1$

BERNSTEINOVY POLYNOMY - PŘEHLED

$\boldsymbol{n}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{4}$	$\boldsymbol{\ldots}$
$B_{0,n}$	$1-t$	$(1-t)^2$	$(1-t)^3$	$(1-t)^4$	$\ldots$
$B_{1,n}$	t	$2t(1-t)$	$3t(1-t)^2$	$4t(1-t)^3$	$\ldots$
$B_{2,n}$	$\times$	t^2	$3t^2(1-t)$	$6t^2(1-t)^2$	$\ldots$
$B_{3,n}$	$\times$	$\times$	t^3	$4t^3(1-t)$	$\ldots$
$B_{4,n}$	$\times$	$\times$	$\times$	t^4	$\ldots$
$\ldots$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\ldots$

BERNSTEINOVY POLYNOMY - PRŮBĚHY



$\Rightarrow$ počáteční bod $P(0) = V_0$

$\Rightarrow$ koncový bod $P(1) = V_n$

TEČNÝ VEKTOR KŘIVKY - POČÁTEČNÍ A KONCOVÝ

$$P'(t) = \sum_{i=0}^{n} B'_{i,n}(t)V_i,\ t \in [0,1]$$

počáteční tečný vektor $\iff t = 0$
koncový tečný vektor $\iff t = 1$

LINEÁRNÍ BÉZIEROVA KŘIVKA

i	$B_{i,1}(t)$	$B'_{i,1}(t)$	$B'_{i,1}(0)$	$B'_{i,1}(1)$
0	$1-t$	-1	-1	-1
1	t	1	1	1

$$P'(0) = -V_0 + V_1 = \overrightarrow{V_0V_1}$$
$$P'(1) = -V_0 + V_1 = \overrightarrow{V_0V_1}$$

KVADRATICKÁ BÉZIEROVA KŘIVKA

i	$B_{i,2}(t)$	$B'_{i,2}(t)$	$B'_{i,2}(0)$	$B'_{i,2}(1)$
0	$(1-t)^2$	$-2(1-t)$	-2	0
1	$2t(1-t)$	$2(1-t)-2t$	2	-2
2	t^2	$2t$	0	2

$$P'(0) = -2V_0 + 2V_1 = 2\overrightarrow{V_0V_1}$$
$$P'(1) = -2V_1 + 2V_2 = 2\overrightarrow{V_1V_2}$$

KUBICKÁ BÉZIEROVA KŘIVKA

i	$B_{i,3}(t)$	$B'_{i,3}(t)$	$B'_{i,3}(0)$	$B'_{i,3}(1)$
0	$(1-t)^3$	$-3(1-t)^2$	-3	0
1	$3t(1-t)^2$	$3(1-t)^2 - 6t(1-t)$	3	0
2	$3t^2(1-t)$	$6t(1-t) - 3t^2$	0	-3
3	t^3	$3t^2$	0	3

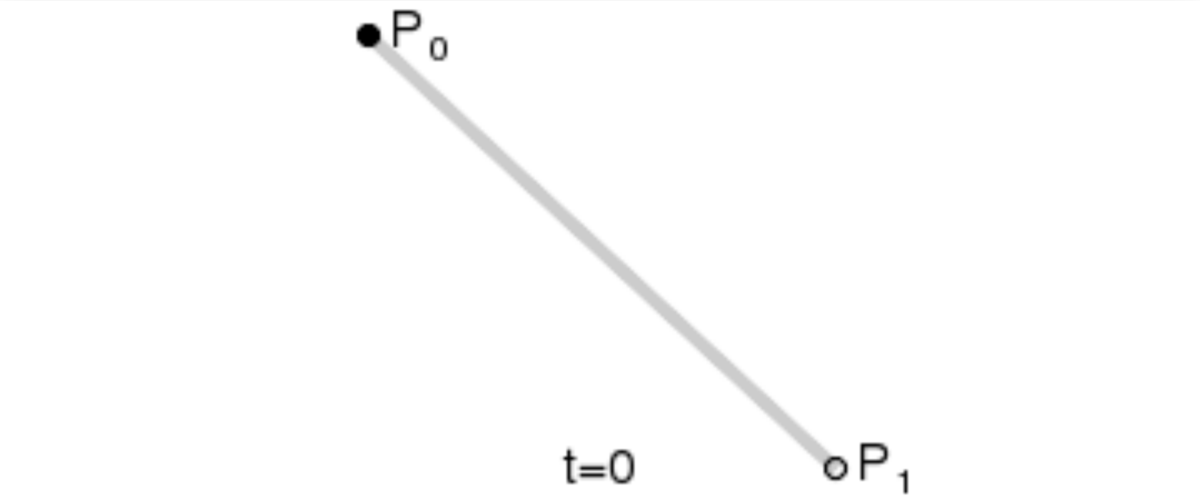
$$P'(0) = -3V_0 + 3V_1 = 3\overrightarrow{V_0V_1}$$
$$P'(1) = -3V_2 + 3V_3 = 3\overrightarrow{V_2V_3}$$

BÉZIEROVA KŘIVKA N-TÉHO STUPNĚ

$$P'(0) = n\overrightarrow{V_0 V_1}$$
$$P'(1) = n\overrightarrow{V_{n-1} V_n}$$
$$P(0) = V_1$$
$$P(1) = V_n$$

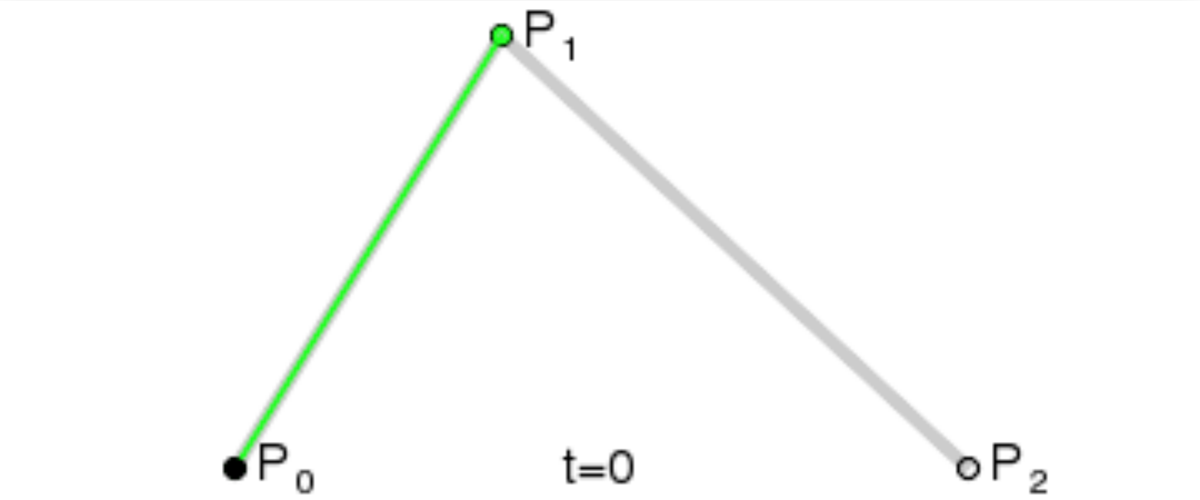
DE CASTELJAU ALGORITMUS

lineární křivka



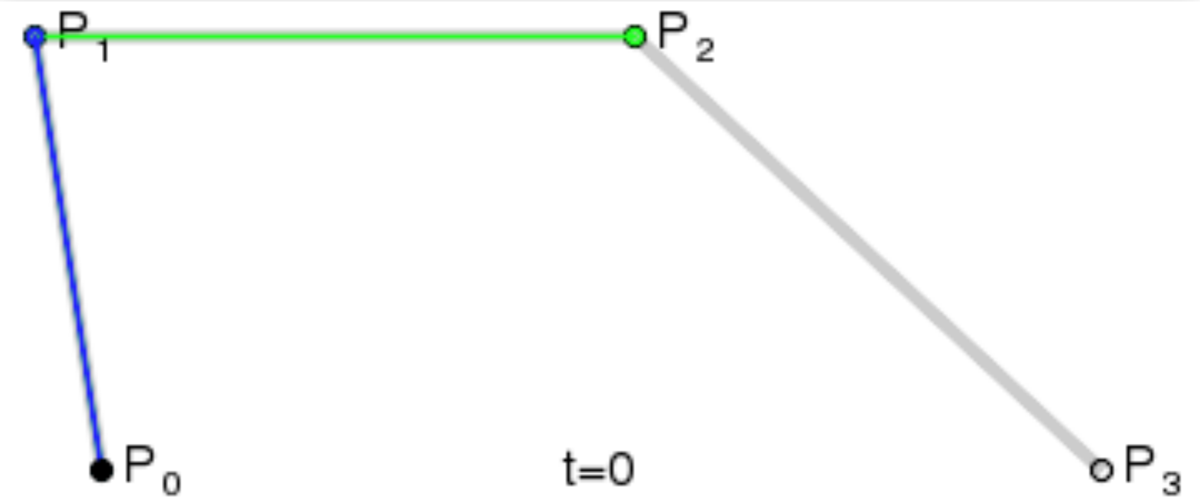
DE CASTELJAU ALGORITMUS

kvadratická křivka



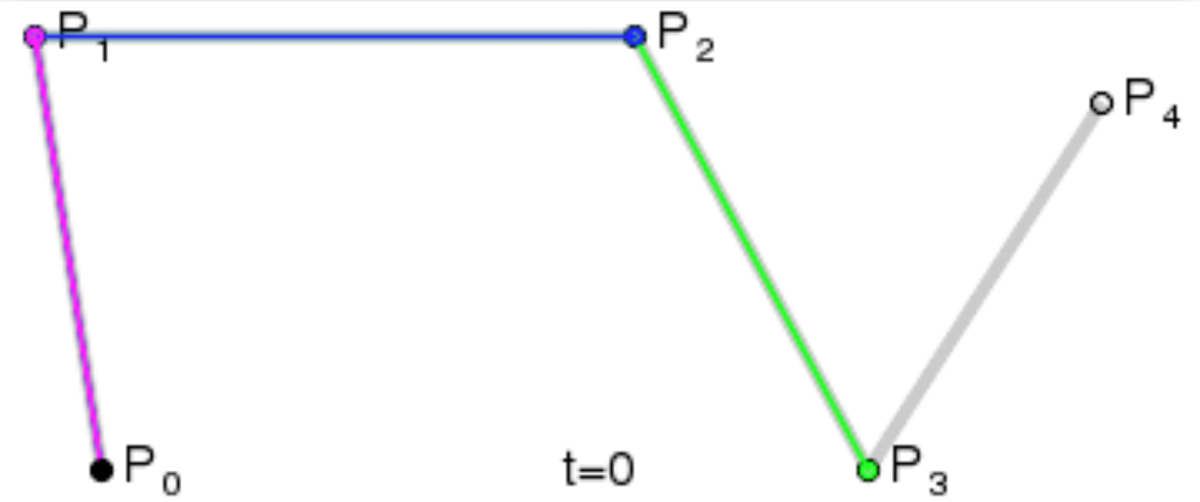
DE CASTELJAU ALGORITMUS

kubická křivka

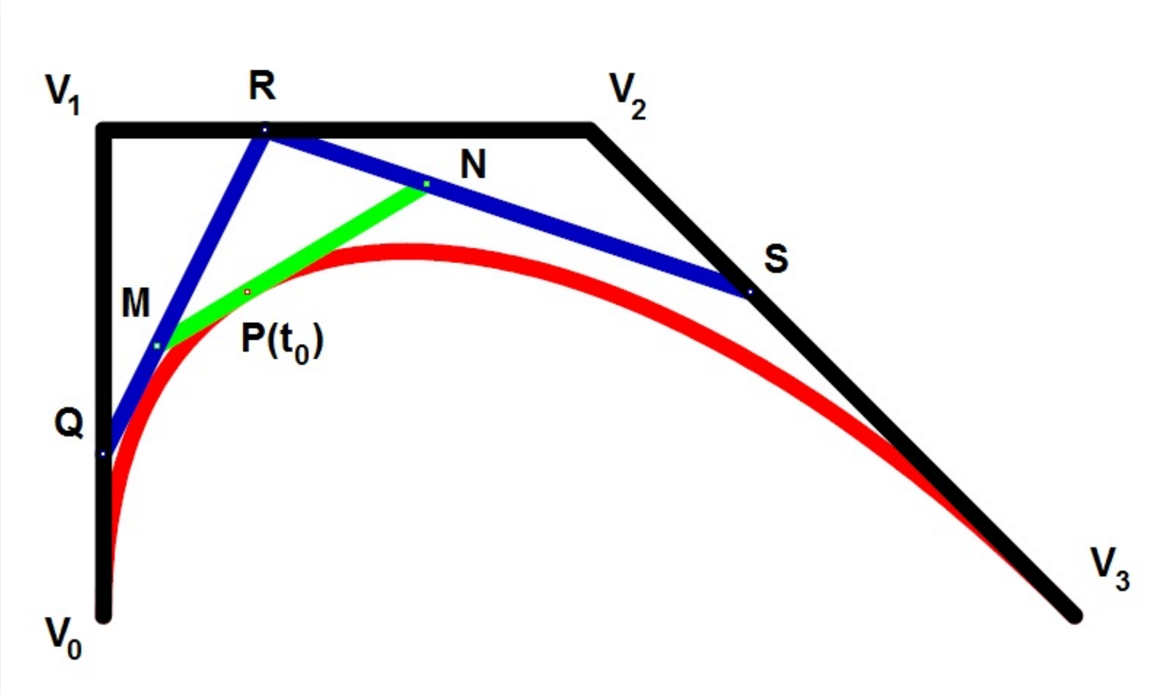


DE CASTELJAU ALGORITMUS

křivka 4. stupně



DE CASTELJAU ALGORITMUS



$$P'(t_0) = n\overrightarrow{MN}$$

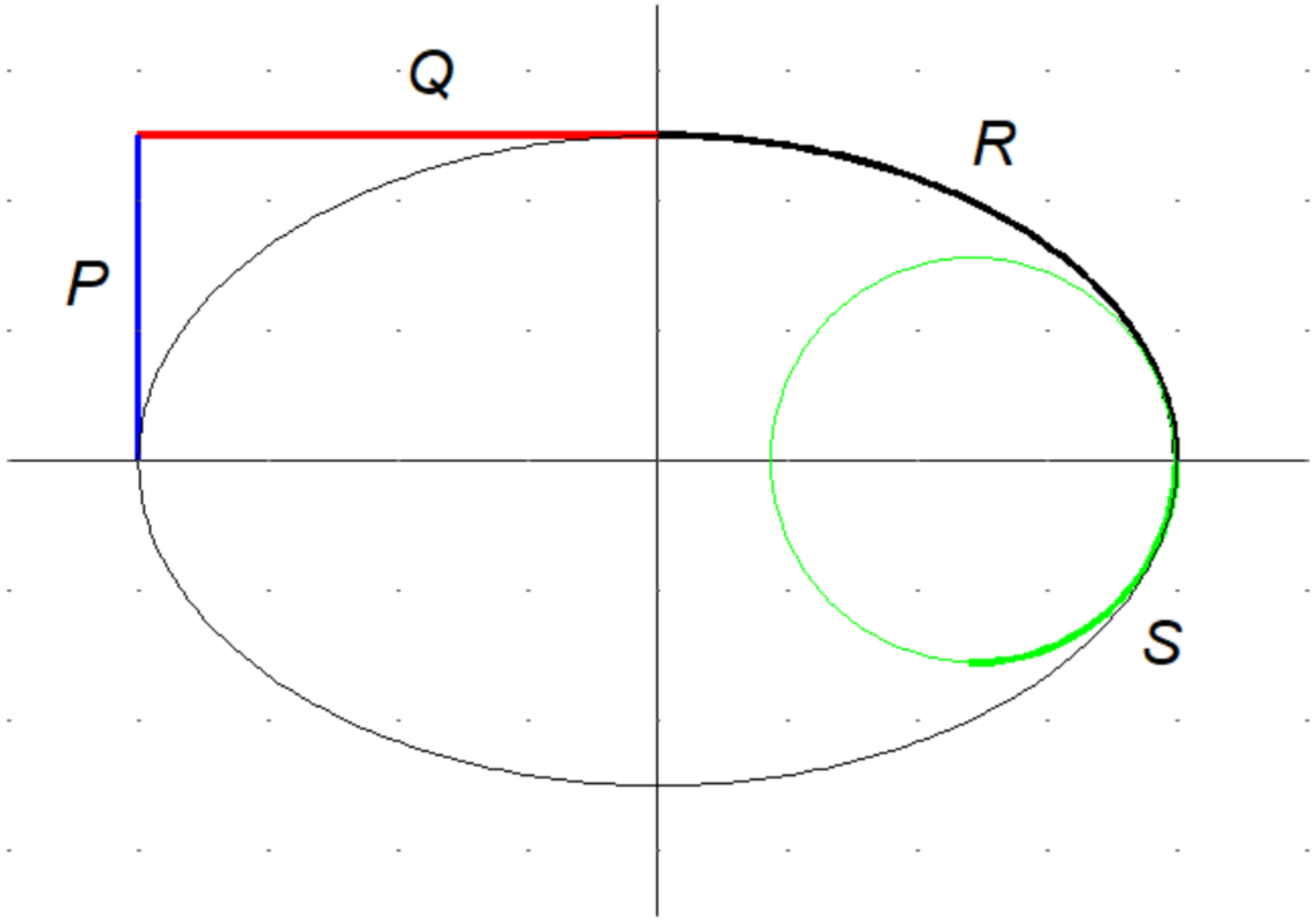
- spojitost geometrická - G^n
- spojitost parametrická - C^n

GEOMETRICKÁ SPOJITOST NAPOJENÍ 2 KŘIVEK

$G^0 \iff$ společný bod

$G^1 \iff G^0 +$ stejná tečna ve společném bodě

$G^2 \iff G^1 +$ stejná křivost ve společném bodě


Q
R
P
S

PARAMETRICKÁ SPOJITOST NAPOJENÍ 2 KŘIVEK

Pro dvě uniformní křivky $P(t)$ a $Q(s)$:

$$
\begin{aligned}
C^0 &\iff P(1) = Q(0) \\
C^1 &\iff C^0 \wedge P'(1) = Q'(0) \\
C^2 &\iff C^1 \wedge P''(1) = Q''(0)
\end{aligned}
$$

...

spojitost parametrická $\Rightarrow$ spojitost geometrická

NAPOJOVÁNÍ KŘIVEK, COONSOVA KUBIKA, FERGUSONOVA KUBIKA