POČÍTAČOVÁ GRAFIKA 23/24

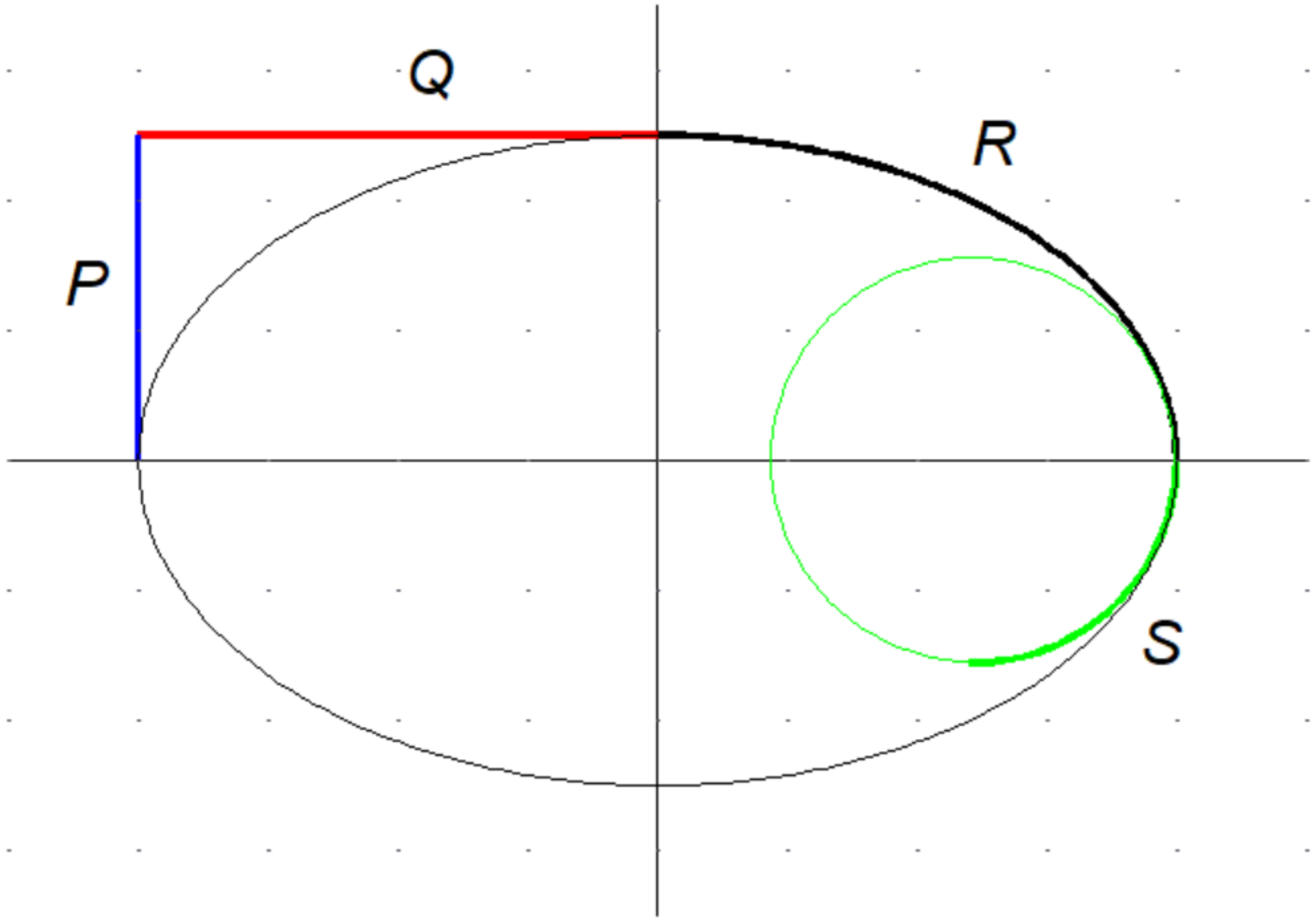
Napojování Bézierových křivek
Coonsova kubika
Coonsův kubický B-spline

NAPOJOVÁNÍ KŘIVEK

- spojitost geometrická - G^n
- spojitost parametrická - C^n

GEOMETRICKÁ SPOJITOST NAPOJENÍ 2 KŘIVEK

$G^0 \iff$ společný bod
$G^1 \iff G^0+$stejná tečna ve společném bodě
$G^2 \iff G^1+$ stejná křivost ve společném bodě
$G^3 \iff G^2+$stejná tečna grafu křivosti ve společném bodě


Q
R
P
S

PARAMETRICKÁ SPOJITOST NAPOJENÍ 2 KŘIVEK

Pro dvě uniformní křivky $P(t)$ a $Q(s)$:

$$
\begin{aligned}
C^0 &\iff P(1) = Q(0) \\
C^1 &\iff C^0 \land P'(1) = Q'(0) \\
C^2 &\iff C^1 \land P''(1) = Q''(0)
\end{aligned}
$$

...

spojitost parametrická $\Rightarrow$ spojitost geometrická

Křivka $P(t)$: řídící polygon $V_i, i = 0, 1, 2, 3$

Křivka $Q(s)$: řídící polygon $U_i, i = 0, 1, 2, 3$

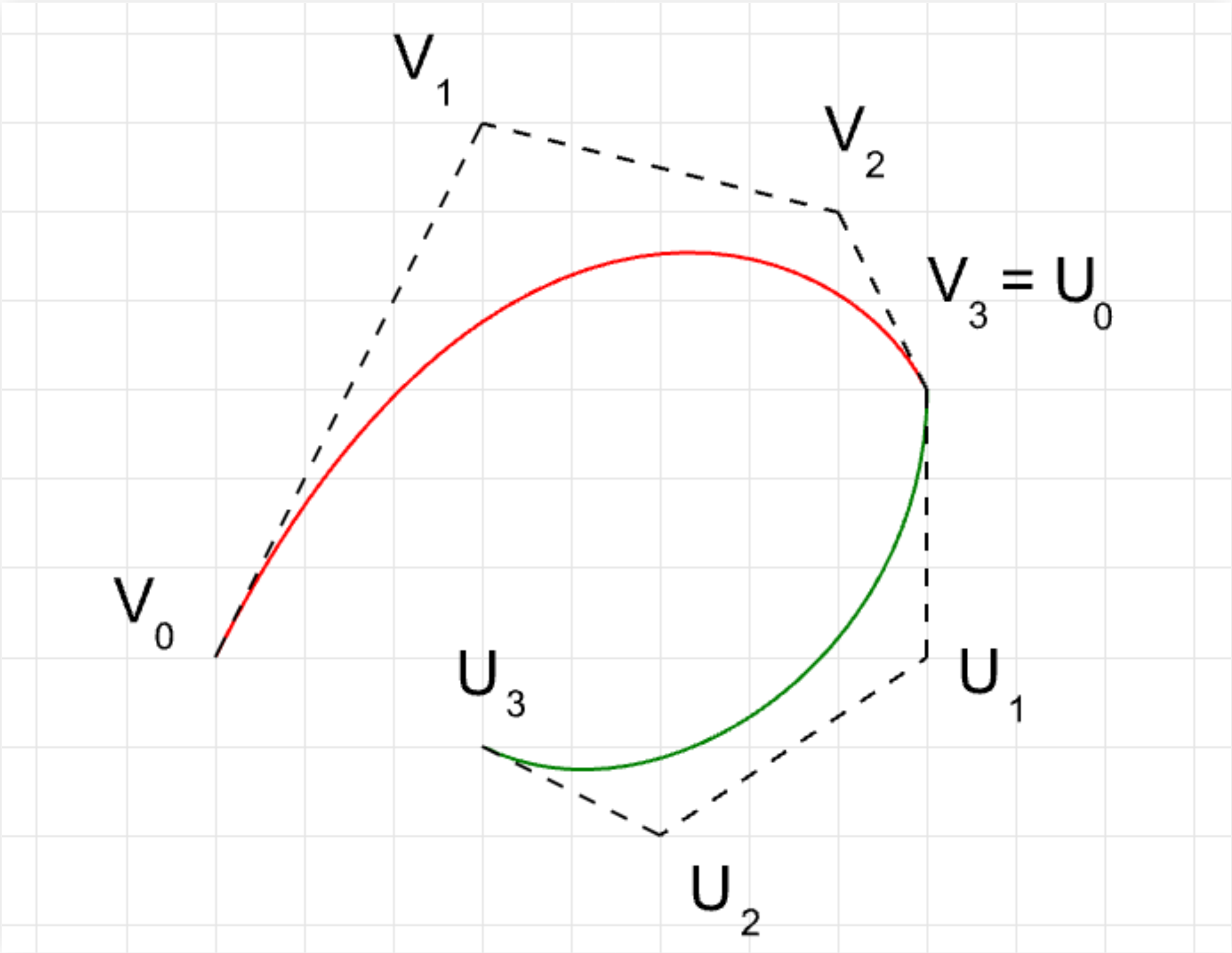
Odvození podmínek pro umístění řídících bodů U_i, tak aby napojení bylo $C^0, C^1, \ldots$

BERNSTEINOVY POLYNOMY

	$t = 0$	$t = 1$
$B_{0,n}(t) = (1 - t)^3$	1	0
$B_{1,n}(t) = 3t(1 - t)^2$	0	0
$B_{2,n}(t) = 3t^2(1 - t)$	0	0
$B_{3,n}(t) = t^3$	0	1

SPOJITOST NAPOJENÍ C^0

$$P(1) = Q(0) \Rightarrow U_0 = V_3$$



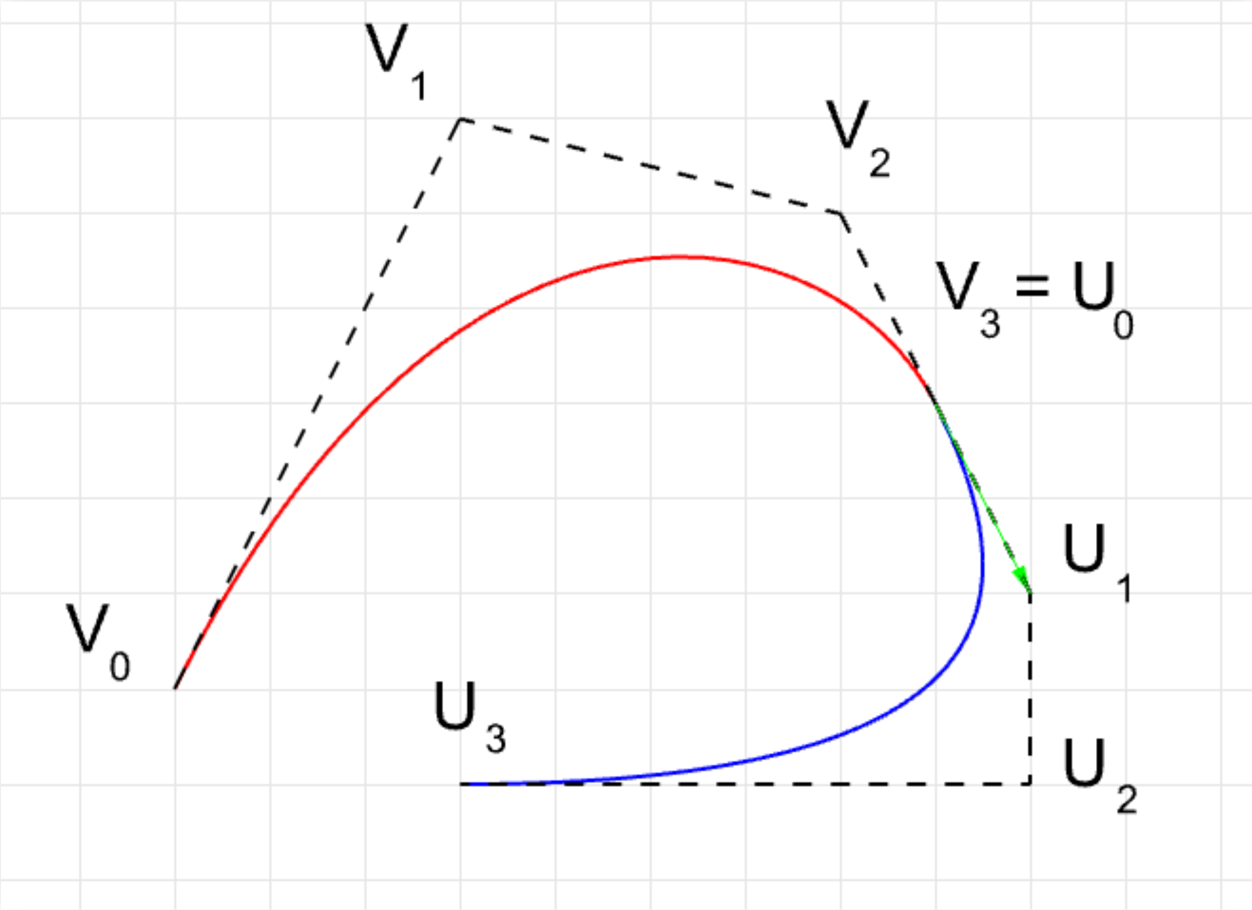
BERNSTEINOVY POLYNOMY - PRVNÍ DERIVACE

	$t=0$	$t=1$
$B'_{0,n}(t) = 3(1-t)^2$	-3	0
$B'_{1,n}(t) = 3(1-t)(1-3t)$	3	0
$B'_{2,n}(t) = 3t(2-3t)$	0	-3
$B'_{3,n}(t) = 3t^2$	0	3

SPOJITOST NAPOJENÍ C^1

$$C^0 \wedge P'(1) = Q'(0)$$

$$V_3 - V_2 = U_1 - U_0 \Rightarrow U_1 = U_0 + \overrightarrow{V_2 V_3}$$



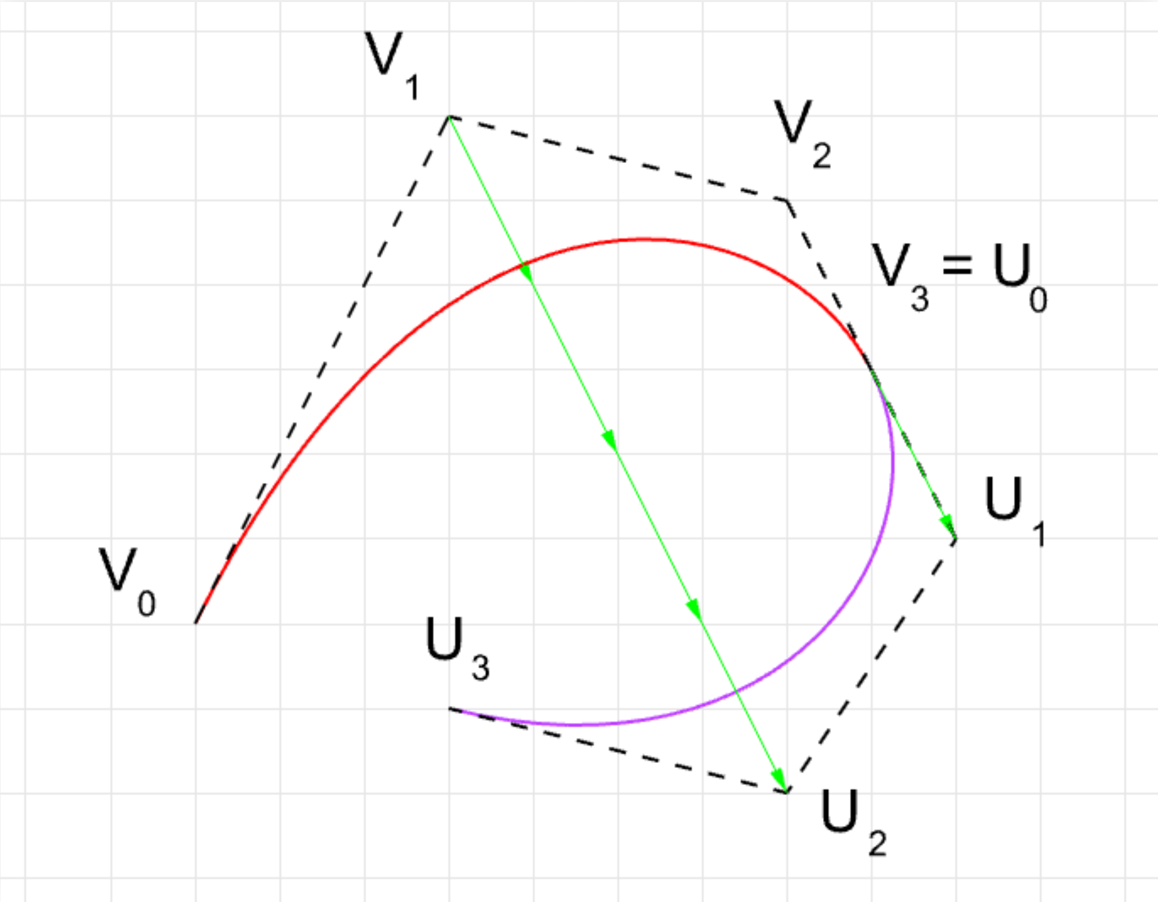
BERNSTEINOVY POLYNOMY - DRUHÁ DERIVACE

	$t = 0$	$t = 1$
$B''_{0,n}(t) = 6(1 - t)$	6	0
$B''_{1,n}(t) = 3(6t - 4)$	-12	6
$B''_{2,n}(t) = -3(6t - 2)$	6	-12
$B''_{3,n}(t) = 6t$	0	6

SPOJITOST NAPOJENÍ C^2

$$C^1 \wedge P''(1) = Q''(0)$$

$$6V_1 - 12V_2 + 6V_3 = 6U_0 - 12U_1 + 6U_2 \Rightarrow U_2 = V_1 + 4\overrightarrow{V_2V_3}$$



BERNSTEINOVY POLYNOMY - TŘETÍ DERIVACE

	$t=0$	$t=1$
$B'''_{0,n}(t) = -6$	$-\ 6$	$-\ 6$
$B'''_{1,n}(t) = 18$	18	18
$B'''_{2,n}(t) = -18$	-18	-18
$B'''_{3,n}(t) = 6$	6	6

SPOJITOST NAPOJENÍ C^3

$$C^2 \wedge P'''(1) = Q'''(0)$$
$$\Downarrow$$
$$-6V_0 + 18V_1 - 18V_2 + 6V_3 = -6U_0 + 18U_1 - 18U_2 + 6U_3$$
$$\Downarrow$$
$$U_3 = -V_0 + 6V_1 - 12V_2 + 8V_3$$
$$\Downarrow$$
$$U_3 = V_1 + 8\overrightarrow{V_2V_3} + 4\overrightarrow{V_2V_1} + \overrightarrow{V_0V_1}$$

nebo

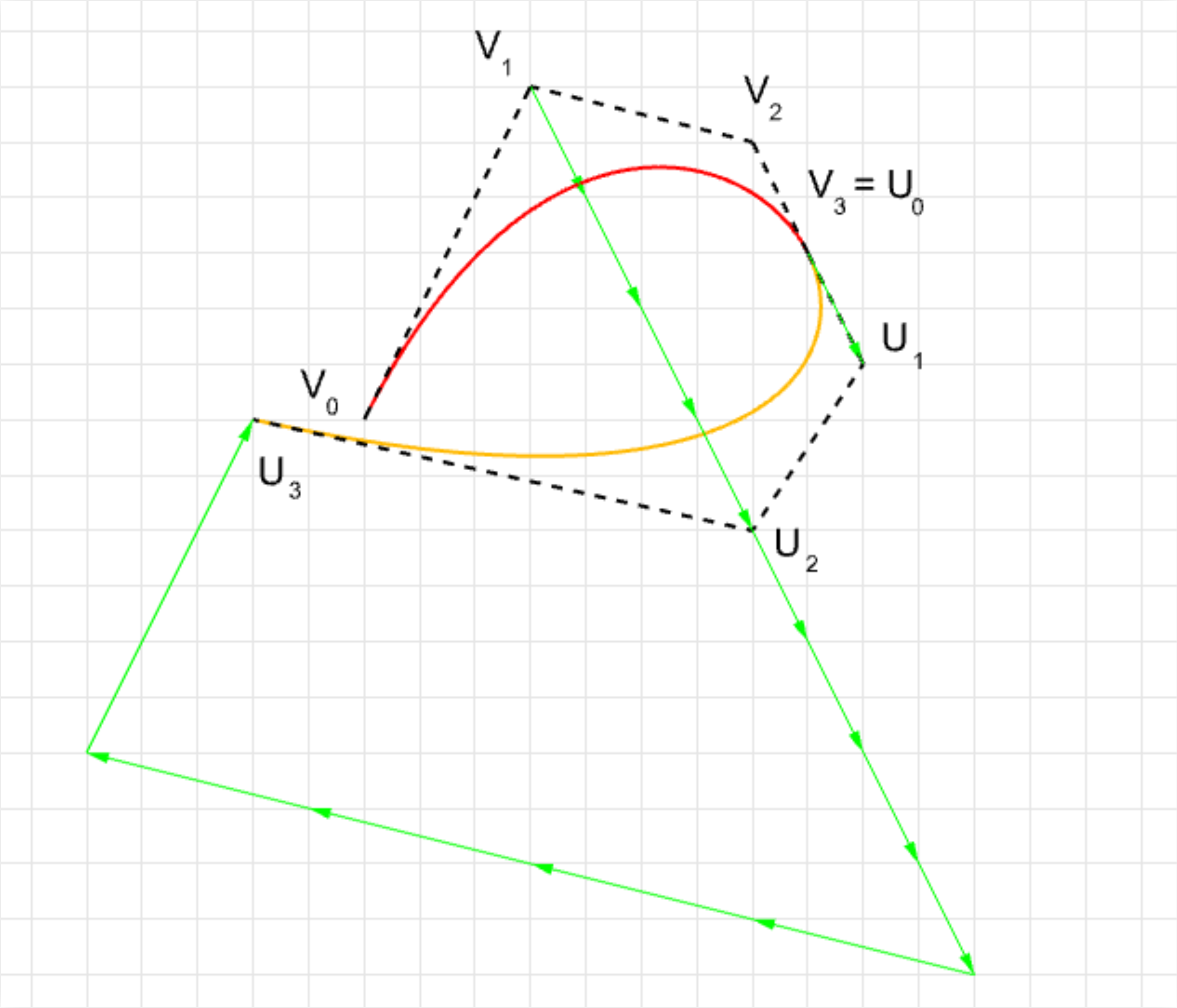
$$U_3 = V_3 + 6\overrightarrow{V_2V_1} + 6\overrightarrow{V_2V_3} + \overrightarrow{V_0V3}$$

nebo

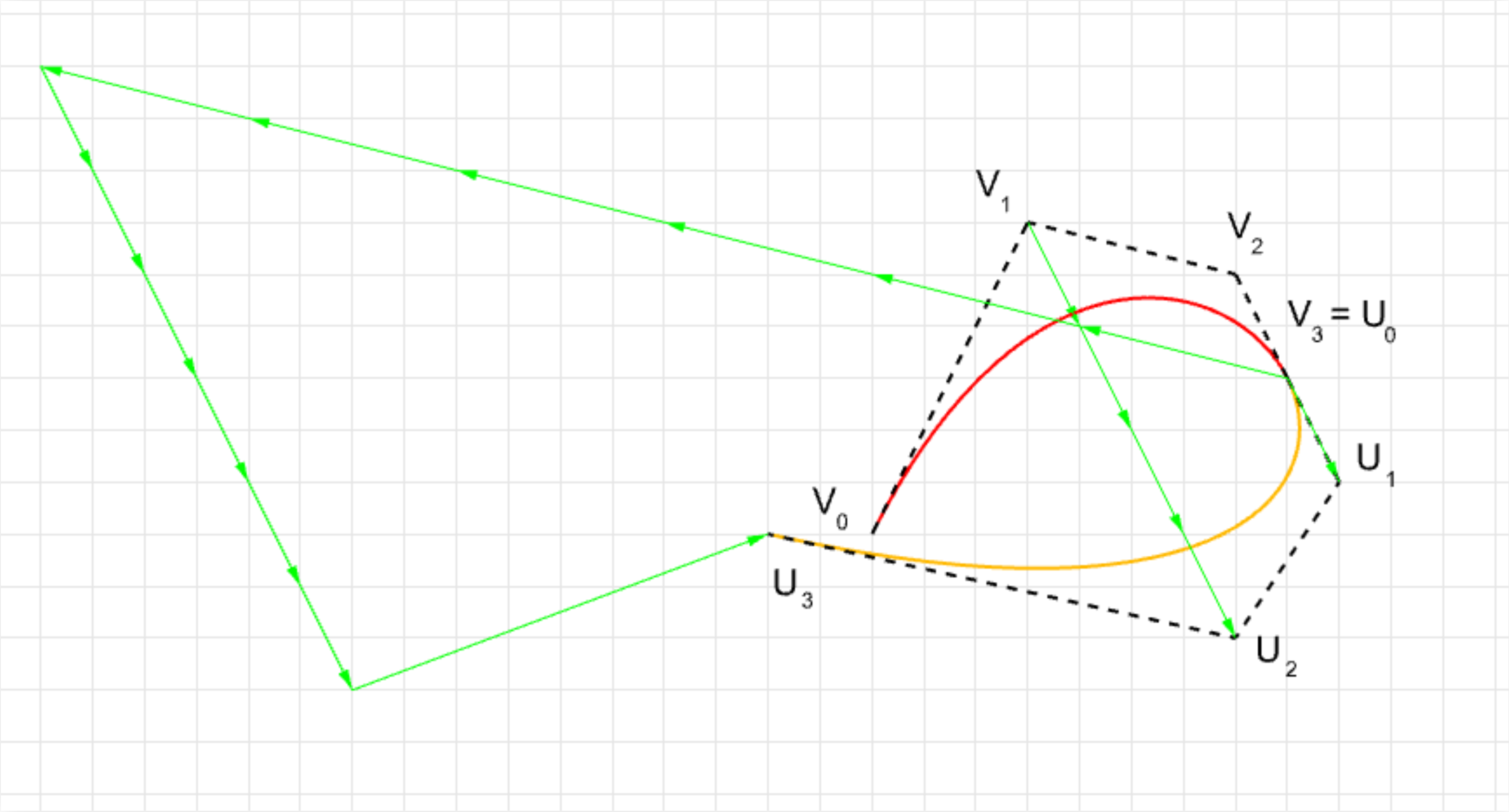
$$U_3 = V_0 + 8\overrightarrow{V_2V_3} + 4\overrightarrow{V_2V_1} + 2\overrightarrow{V_0V_1}$$

nebo ...

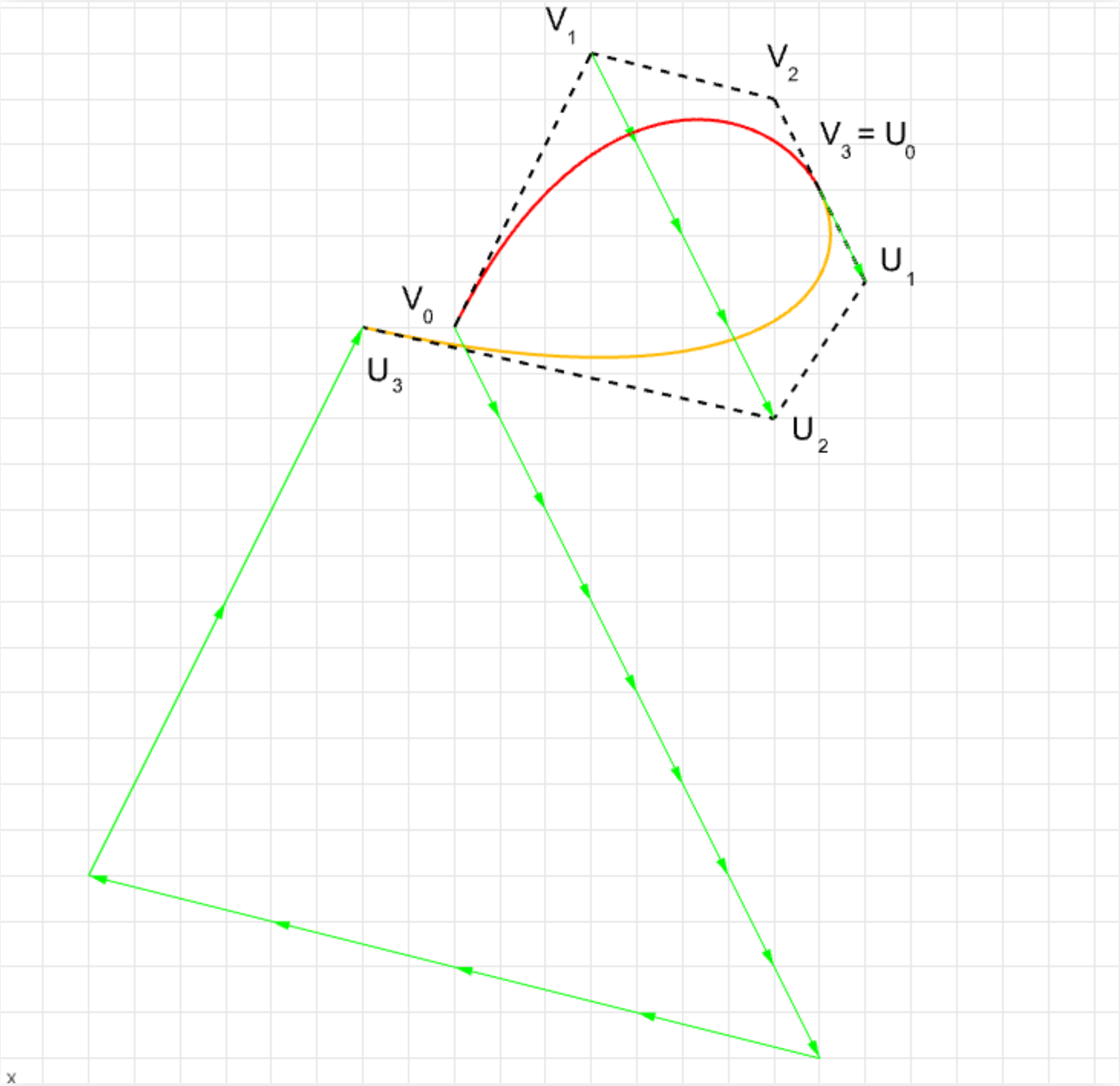
$$U_3 = V_1 + 8\overrightarrow{V_2V_3} + 4\overrightarrow{V_2V_1} + \overrightarrow{V_0V_1}$$



$$U_3 = V_3 + 6\overrightarrow{V_2V_1} + 6\overrightarrow{V_2V_3} + \overrightarrow{V_0V3}$$

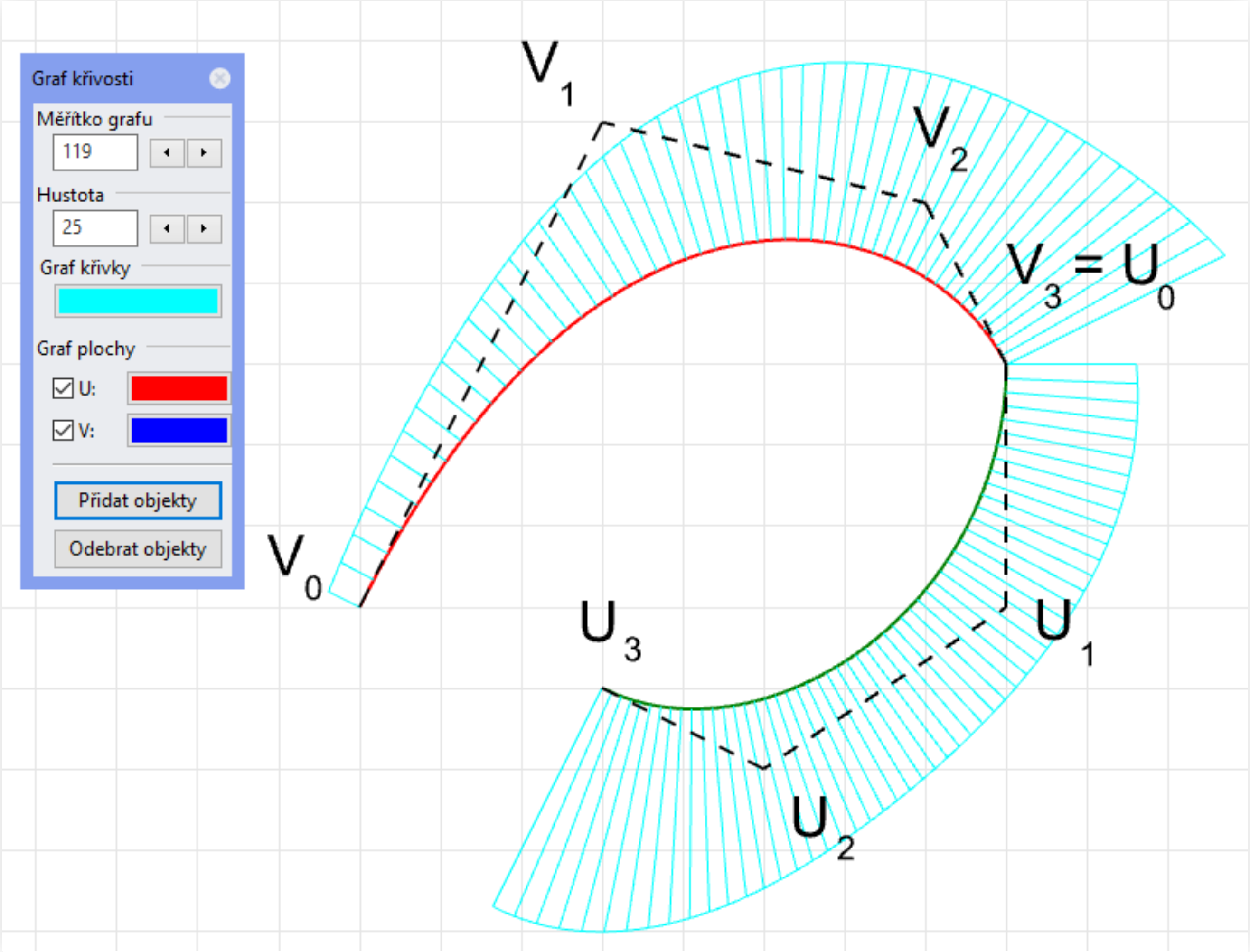


$$U_3 = V_0 + 8\overrightarrow{V_2V_3} + 4\overrightarrow{V_2V_1} + 2\overrightarrow{V_0V_1}$$

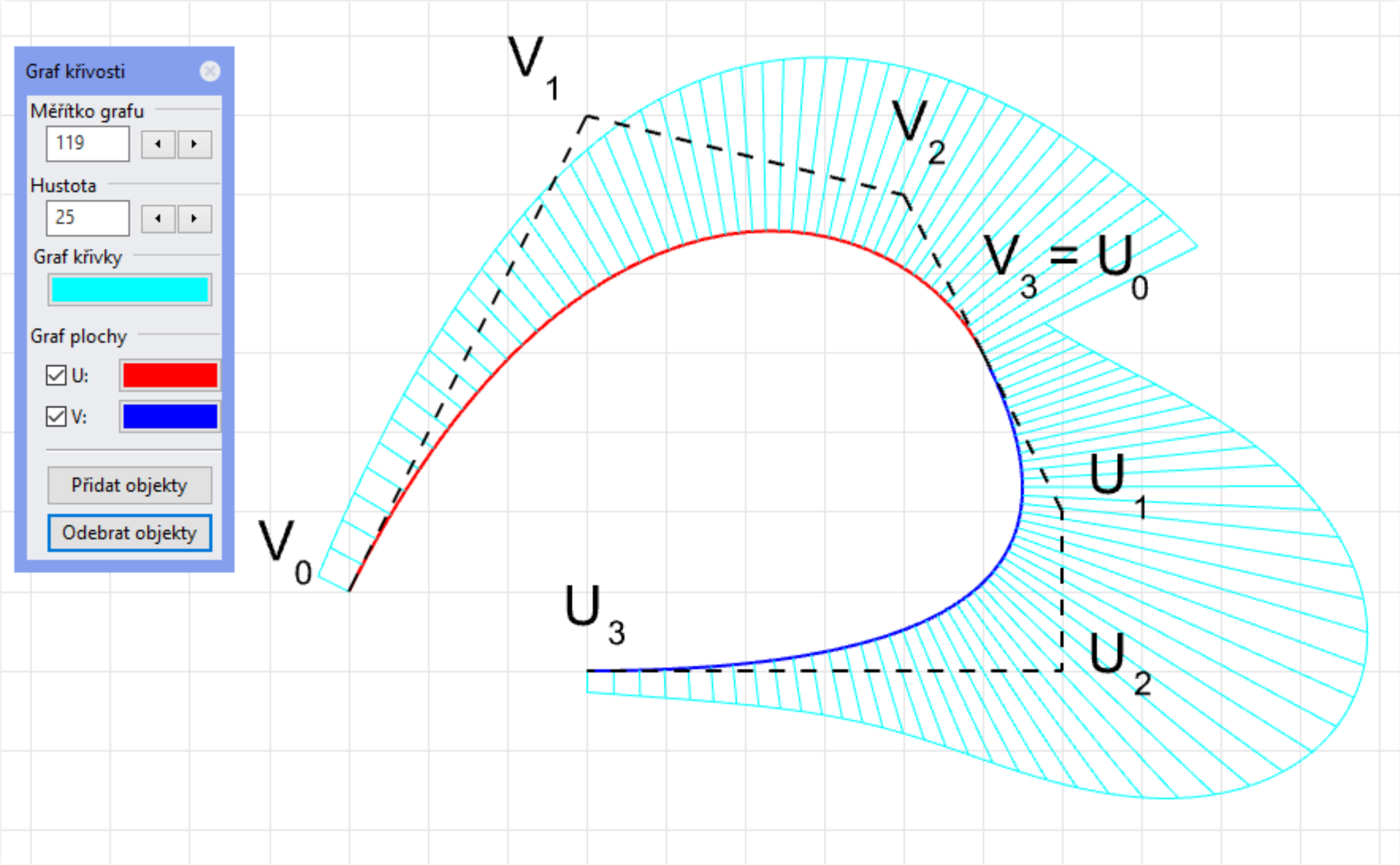


SPOJITOST NAPOJENÍ - RHINO

$$G^0$$

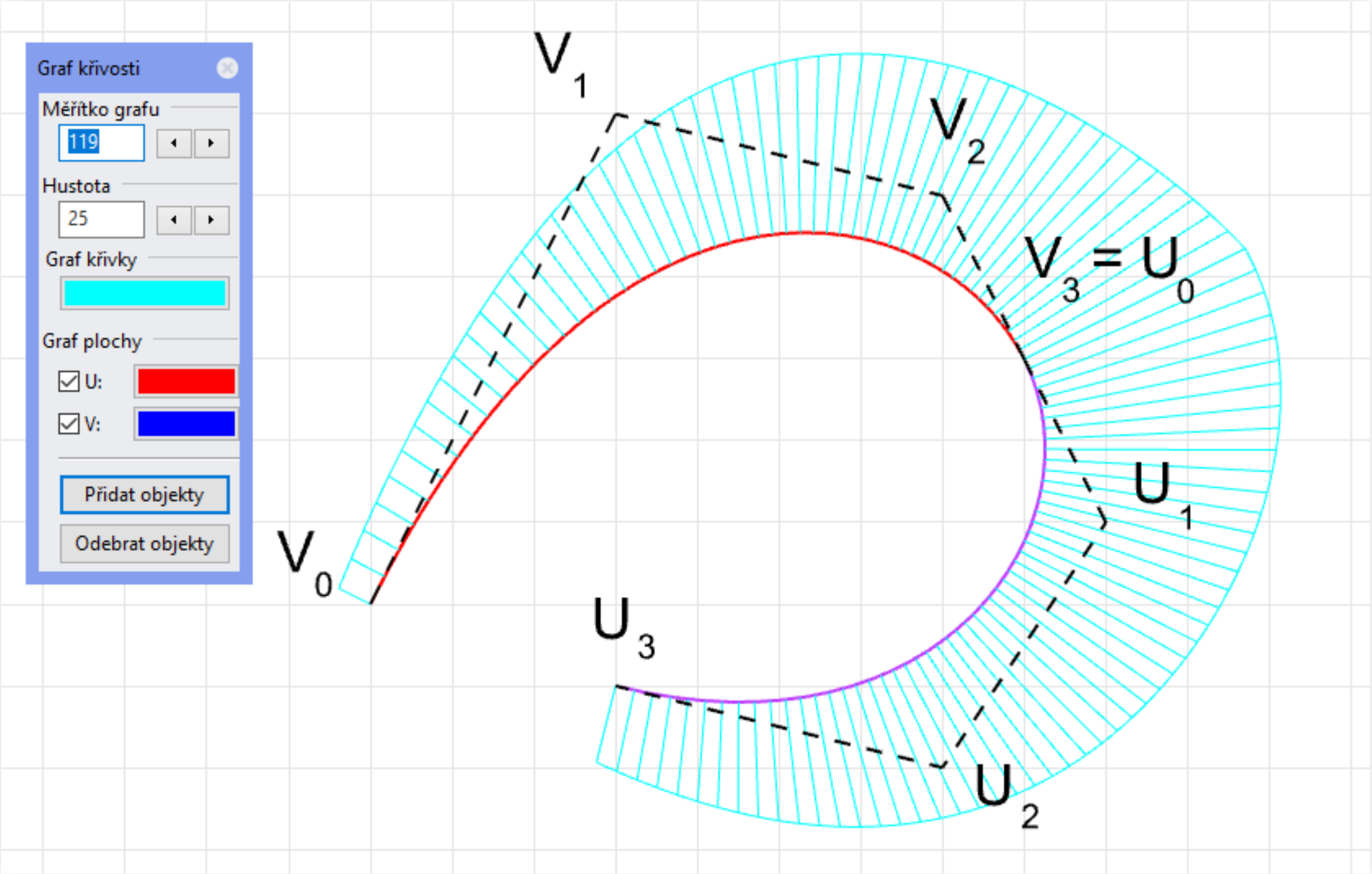

Graf křivosti
Měřítko grafu
119
Hustota
25
Graf křivky
Graf plochy
U:
V:
Přidat objekty
Odebrat objekty
V 1
V 2
V 3 = U 0
V 0
U 3
U 1
U 2

$$G^1$$



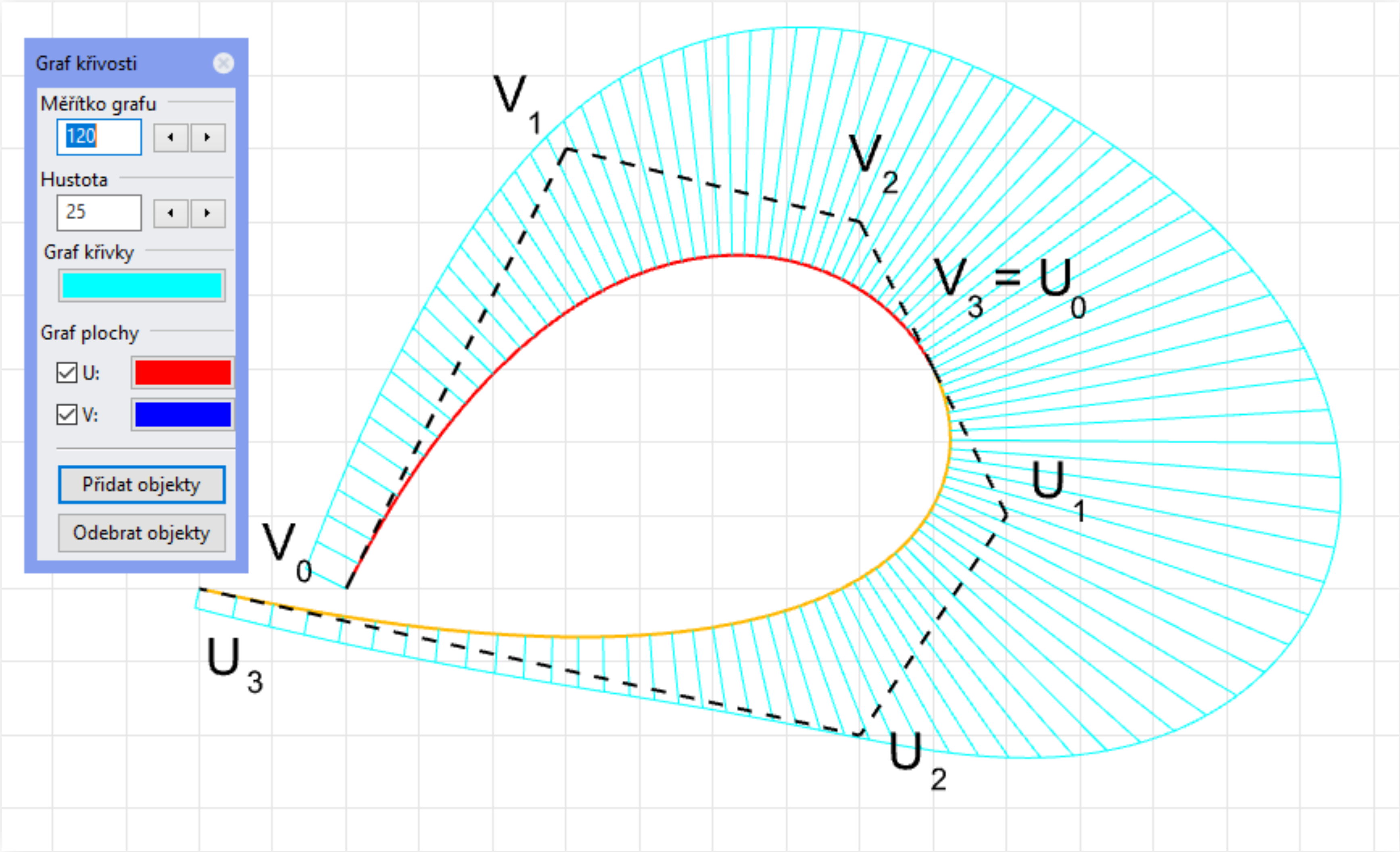
Graf křivosti
Měřítko grafu
119
Hustota
25
Graf křivky
Graf plochy
U:
V:
Přidat objekty
Odebrat objekty
V1
V2
V3 = U0
V0
U1
U3
U2

$$G^2$$



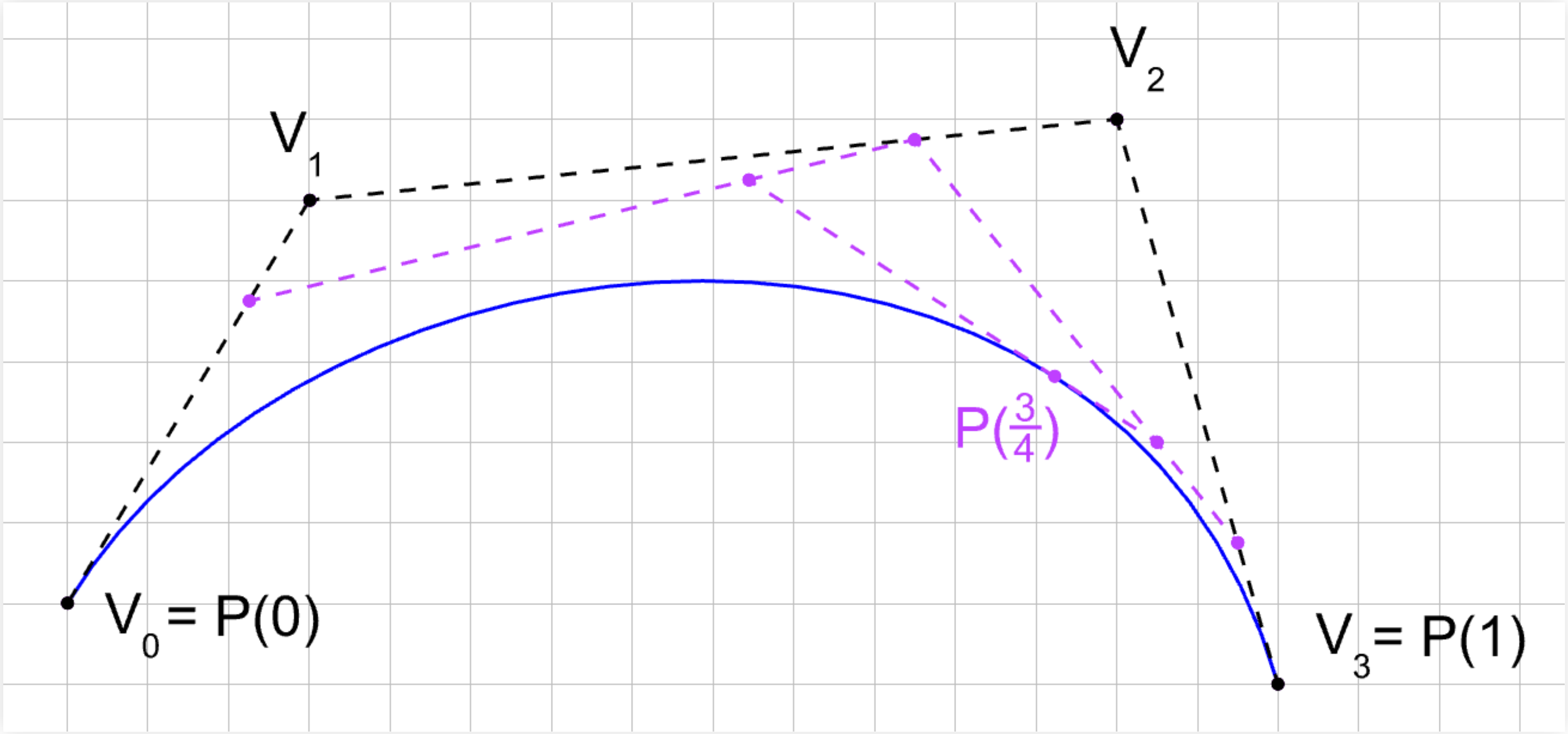
Graf křivosti
Měřítko grafu
119
Hustota
25
Graf křivky
Graf plochy
U:
V:
Přidat objekty
Odebrat objekty
V0
V1
V2
V3 = U0
U1
U2
U3

G^3

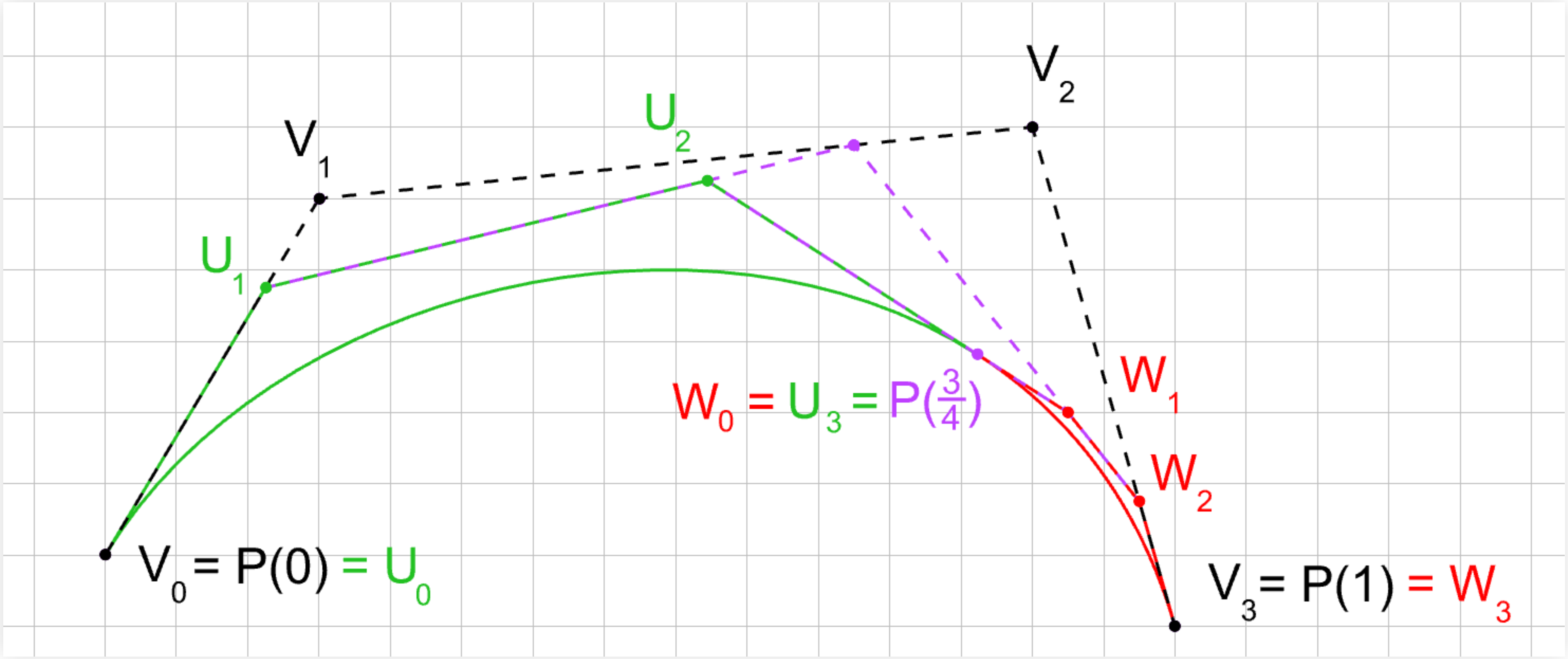


Graf křivosti
Měřítko grafu
120
Hustota
25
Graf křivky
Graf plochy
U:
V:
Přidat objekty
Odebrat objekty
V1
V2
V3 = U0
U1
V0
U3
U2

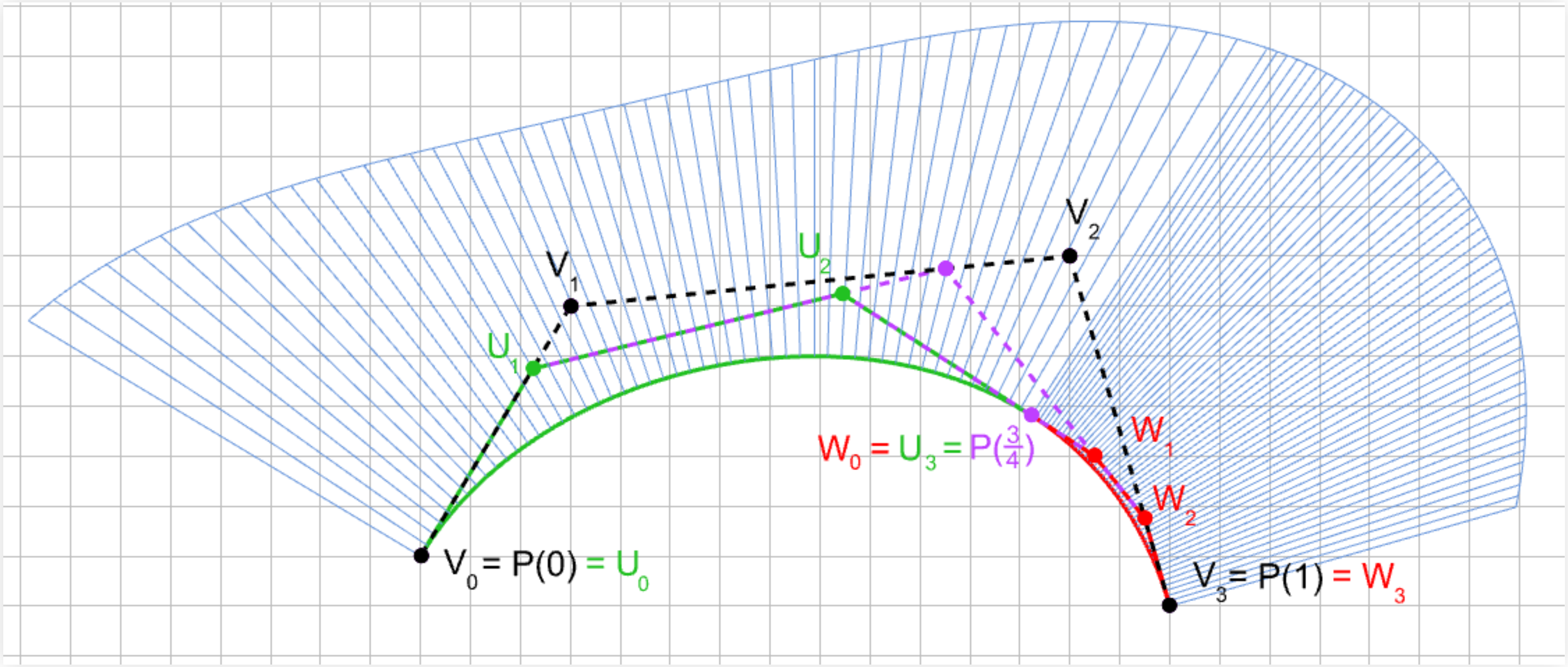
KONSTRUKCE BODU BÉZIEROVY KUBIKY $\left(t = \frac{3}{4}\right)$



DEKOMPOZICE BÉZIEROVY KUBIKY



GRAFY KŘIVOSTI



STUPŇŮ

Křivka $P(t)$: řídící polygon $V_i, i = 0, 1, 2, 3$

Křivka $Q(s)$: řídící polygon $U_i, i = 0, 1, \ldots$

Odvození podmínek pro umístění řídících bodů U_i, tak aby napojení bylo $C^0, C^1, \ldots$

BERNSTEINOVY POLYNOMY - PŘEHLED

$\boldsymbol{n}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{4}$
$B_{0,n}$	$1-t$	$(1-t)^2$	$(1-t)^3$	$(1-t)^4$
$B_{1,n}$	t	$2t(1-t)$	$3t(1-t)^2$	$4t(1-t)^3$
$B_{2,n}$	$\times$	t^2	$3t^2(1-t)$	$6t^2(1-t)^2$
$B_{3,n}$	$\times$	$\times$	t^3	$4t^3(1-t)$
$B_{4,n}$	$\times$	$\times$	$\times$	t^4

BERNSTEINOVY POLYNOMY - PRVNÍ DERIVACE

n	**1**		**2**		**3**		**4**	
t	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
$B'_{0,n}$	-1	-1	-2	0	-3	0	-4	0
$B'_{1,n}$	1	1	2	-2	3	0	4	0
$B'_{2,n}$	$\times$	$\times$	0	2	0	-3	0	0
$B'_{3,n}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	0	3	0	-4
$B'_{4,n}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	0	4

BERNSTEINOVY POLYNOMY - DRUHÁ DERIVACE

n	$\mathbf{1}$		$\mathbf{2}$		$\mathbf{3}$		$\mathbf{4}$	
t	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
$B''_{0,n}$	0	0	2	2	6	0	12	0
$B''_{1,n}$	0	0	-4	-4	-12	6	-24	0
$B''_{2,n}$	$\times$	$\times$	2	2	6	-12	12	12
$B''_{3,n}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	0	6	0	-24
$B''_{4,n}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	0	12

SPOJITOST NAPOJENÍ C^1

lineární Bézierova křivka:

$$U_0 = V_3 \wedge U_1 = V_3 + 3\overrightarrow{V_2V_3}$$

kvadratická Bézierova křivka:

$$U_0 = V_3 \wedge U_1 = V_3 + \frac{3}{2}\overrightarrow{V_2V_3}$$

kubická Bézierova křivka:

$$U_0 = V_3 \wedge U_1 = V_3 + \overrightarrow{V_2V_3}$$

kvartická Bézierova křivka:

$$U_0 = V_3 \wedge U_1 = V_3 + \frac{3}{4}\overrightarrow{V_2V_3}$$

SPOJITOST NAPOJENÍ C^2

kvadratická Bézierova křivka:

$$U_0 = V_3 \wedge U_1 = V_3 + \frac{3}{2}\overrightarrow{V_2V_3} \wedge U_2 = V_1 + 2\overrightarrow{V_2V_1} + 7\overrightarrow{V_2V_3}$$

kubická Bézierova křivka:

$$U_0 = V_3 \wedge U_1 = V_3 + \overrightarrow{V_2V_3} \wedge U_2 = V_1 + 4\overrightarrow{V_2V_3}$$

kvartická Bézierova křivka:

$$U_0 = V_3 \wedge U_1 = V_3 + \frac{3}{4}\overrightarrow{V_2V_3} \wedge U_2 = V_1 + \frac{5}{2}\overrightarrow{V_2V_3} + \frac{1}{2}\overrightarrow{V_1V_3}$$

Steven Anson Coons (1912 - 1979)

Massachusetts Institute of Technology (MIT)

COONSOVA KUBIKA

aproximační křivka 3. stupně daná 4 řídicími body P_0, P_1, P_2, P_3

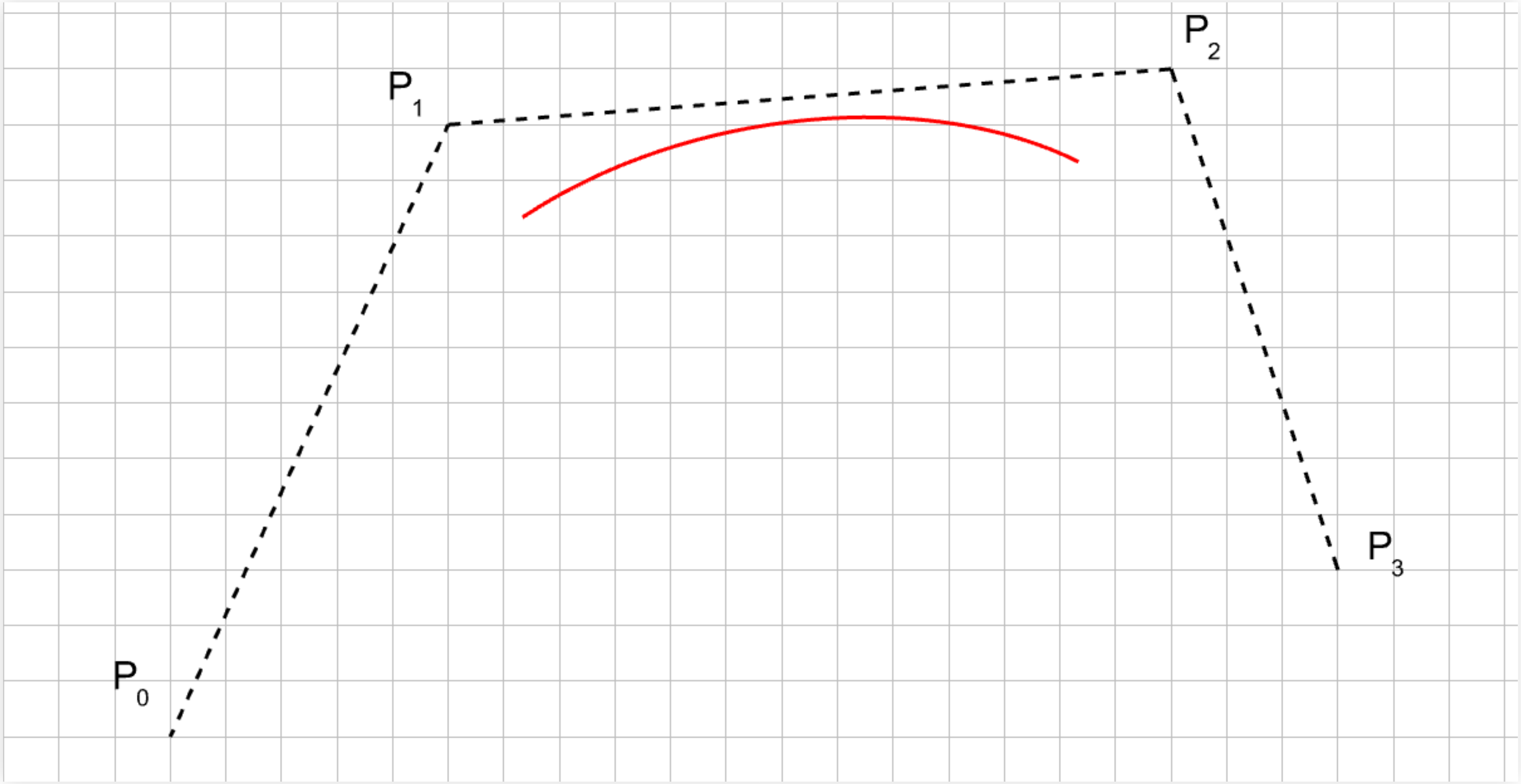
vektorová rovnice:

$$\mathscr{P}(t) = C_0(t)P_0 + C_1(t)P_1 + C_2(t)P_2 + C_3(t)P_3,\ t \in [0, 1]$$

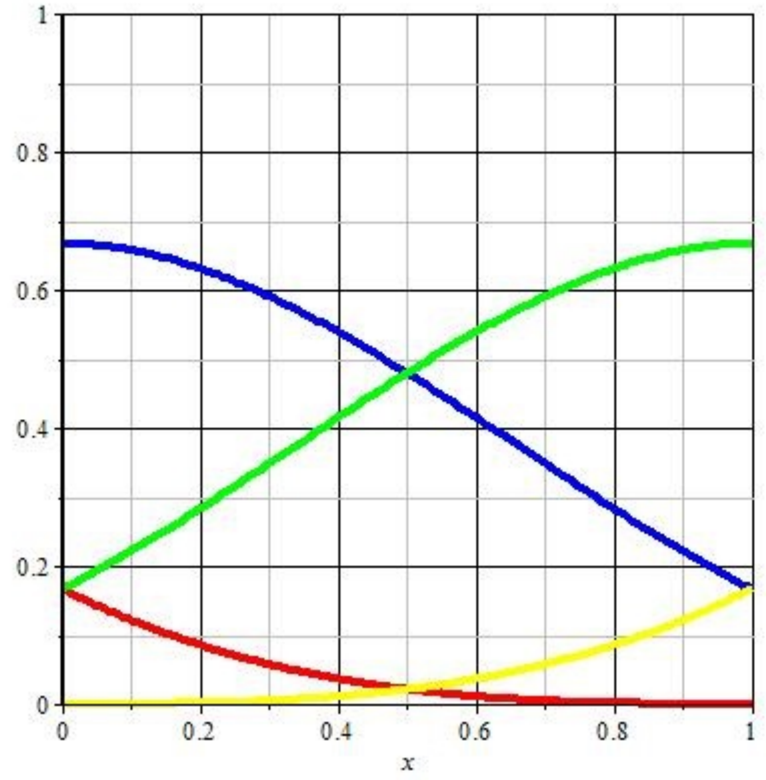
Coonsovy polynomy

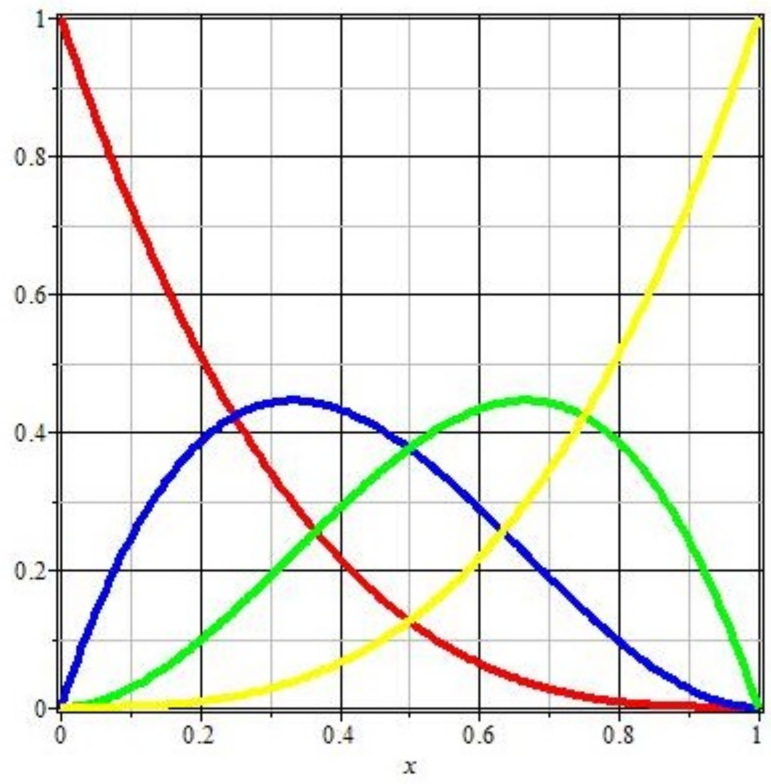
$$C_0(t) = \tfrac{1}{6}(1-t)^3$$
$$C_1(t) = \tfrac{1}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4)$$
$$C_2(t) = \tfrac{1}{6}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1)$$
$$C_3(t) = \tfrac{1}{6}t^3$$

COONSOVA KUBIKA



COONSOVY A BERNSTEINOVY POLYNOMY - PRŮBĚHY





POČÁTEČNÍ BOD KŘIVKY

$$\mathscr{P}(0) = \frac{1}{6}P_0 + \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{6}P_2$$

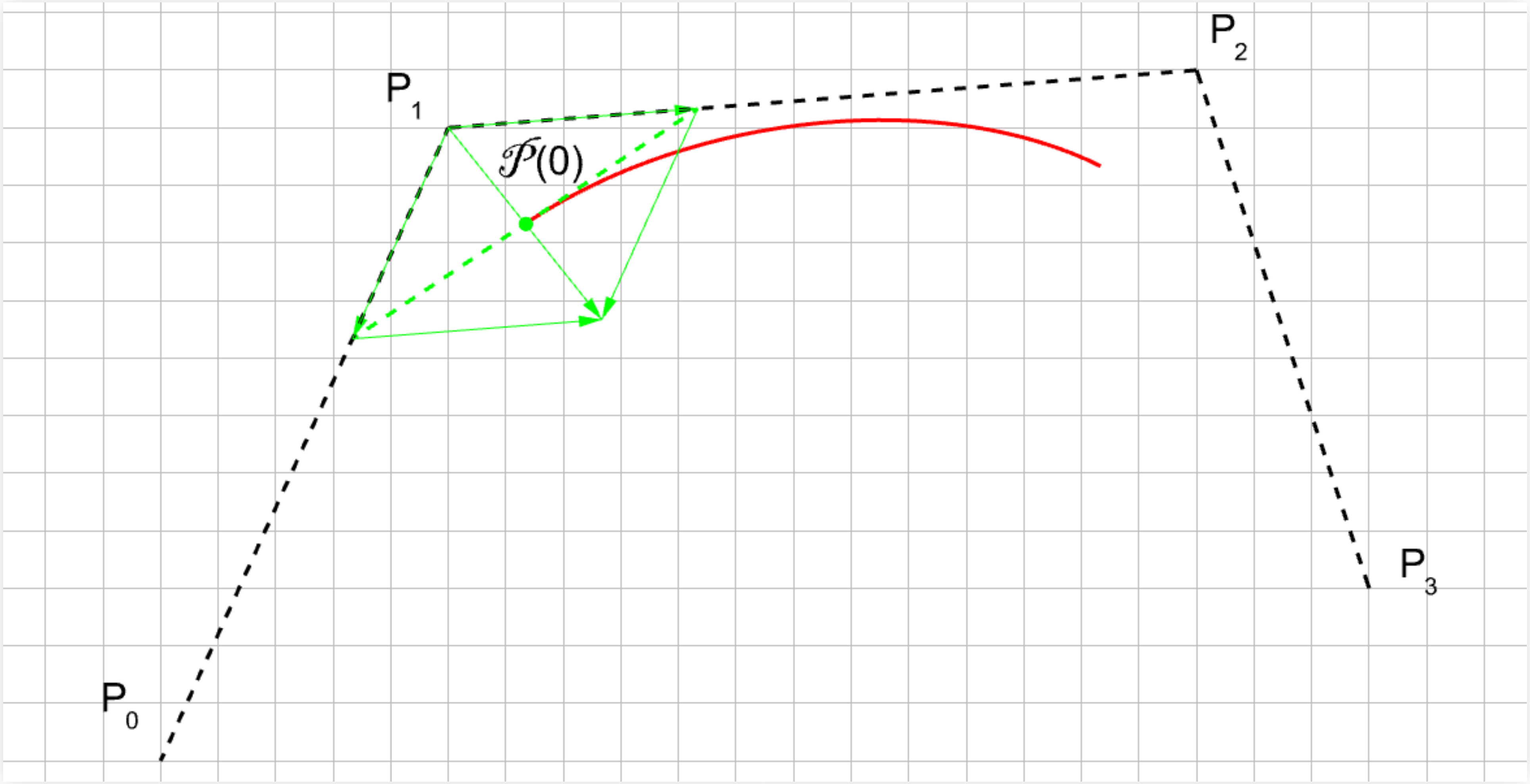
$$\Downarrow$$

$$\mathscr{P}(0) = P_1 + \frac{1}{6}(P_0 - P_1) + \frac{1}{6}(P_2 - P_1)$$

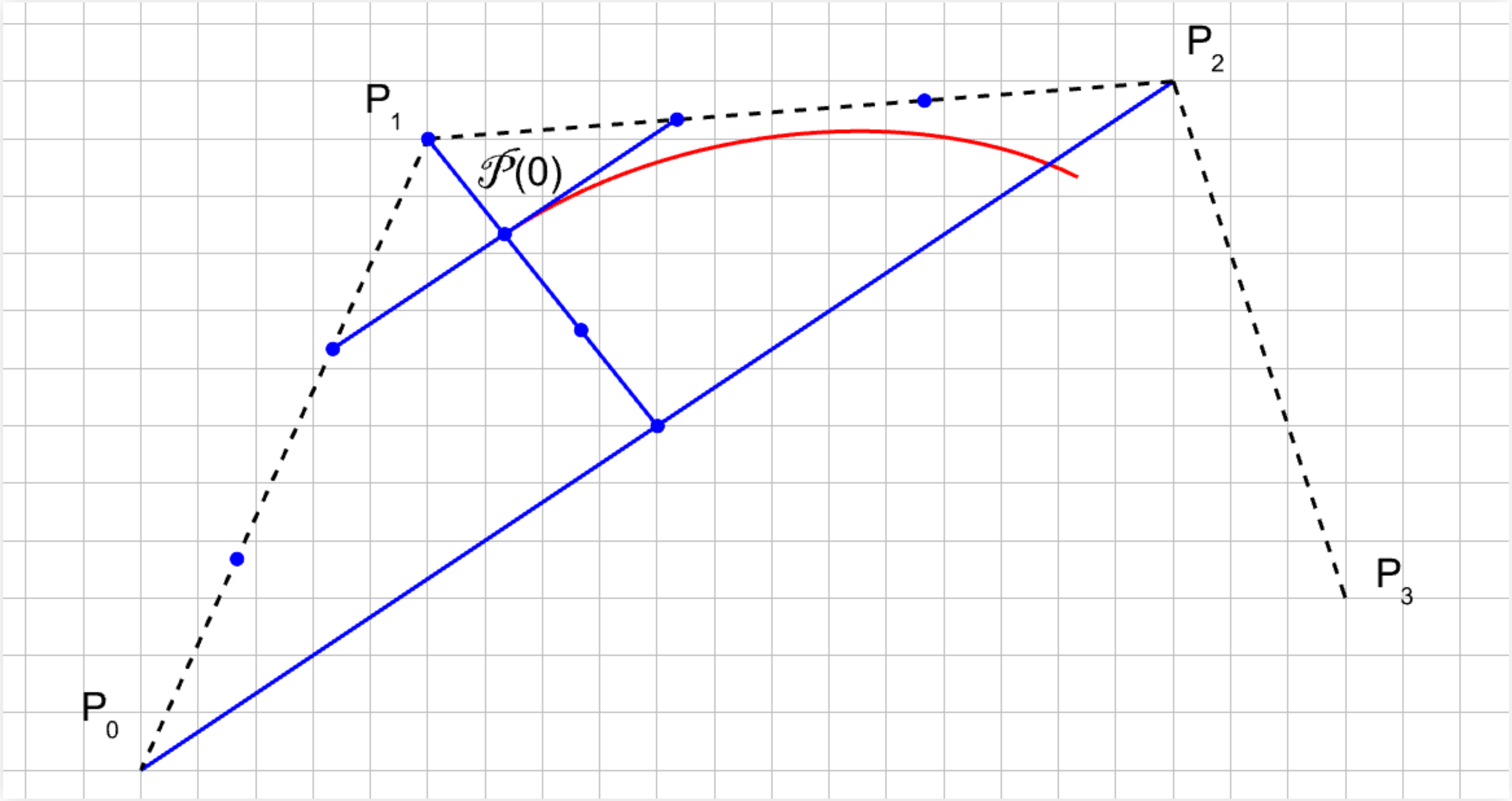
$$\Downarrow$$

$$\mathscr{P}(0) = P_1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_0} + \frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2})$$

KONSTRUKCE POČÁTEČNÍHO BODU



POČÁTEČNÍ BOD - VLASTNOSTI



$\mathscr{P}(0)$ je tzv. antitěžiště trojúhelníka $P_0 P_1 P_2$

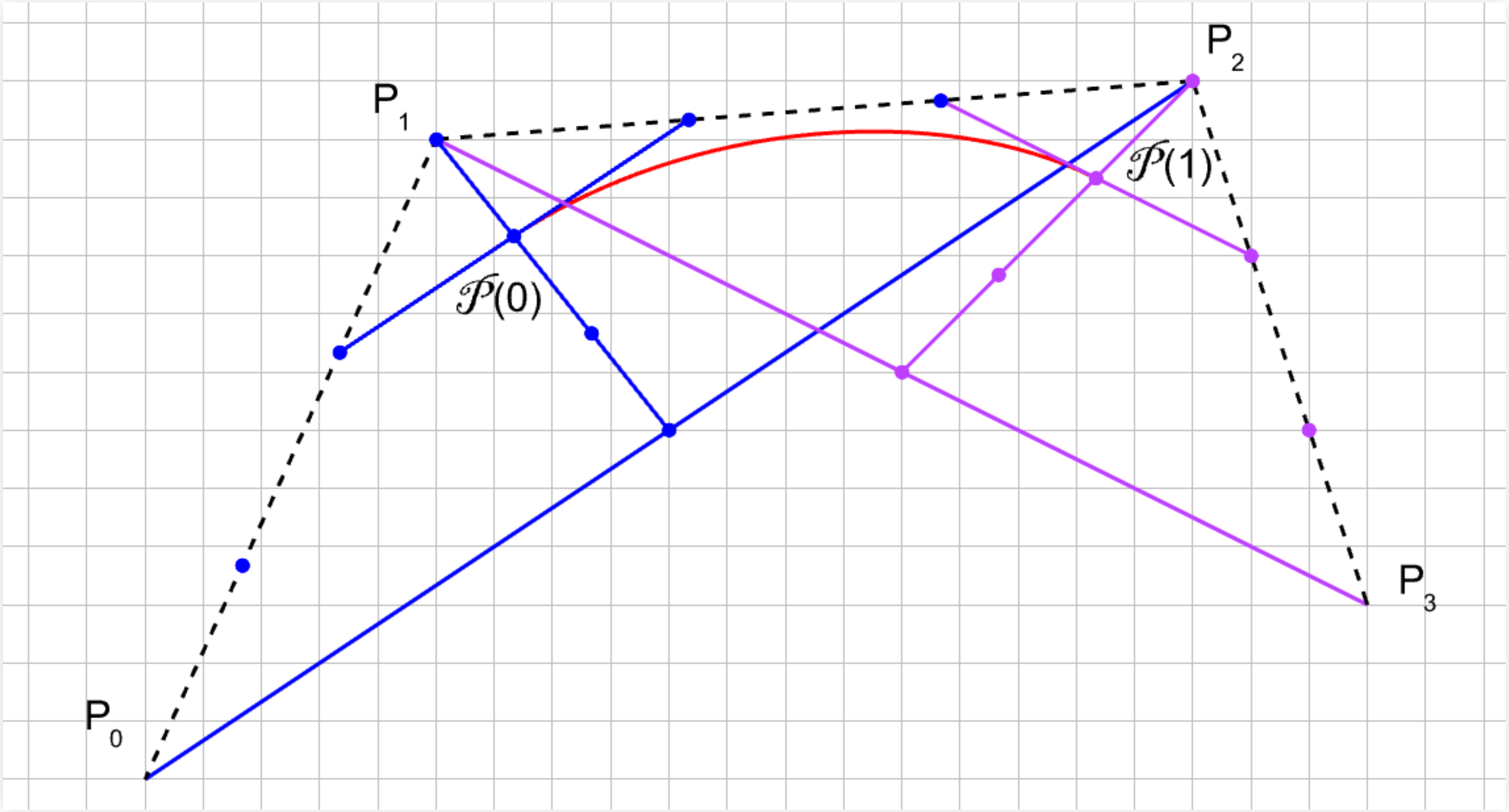
KONCOVÝ BOD KŘIVKY

$$\mathscr{P}(1) = \frac{1}{6}P_1 + \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{6}P_3$$

$$\Downarrow$$

$$\mathscr{P}(1) = P_2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}\overrightarrow{P_2P_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{P_2P_3})$$

KRAJNÍ BODY KŘIVKY



$\mathscr{P}(0)$ je "antitěžiště" trojúhelníka $P_0P_1P_2$, $\mathscr{P}(1)$ je "antitěžiště" trojúhelníka $P_1P_2P_3$

POČÁTEČNÍ A KONCOVÝ TEČNÝ VEKTOR

derivace Coonsových polynomů:

$C_0'(t) = -\frac{1}{2}(1-t)^2$

$C_1'(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 4t)$

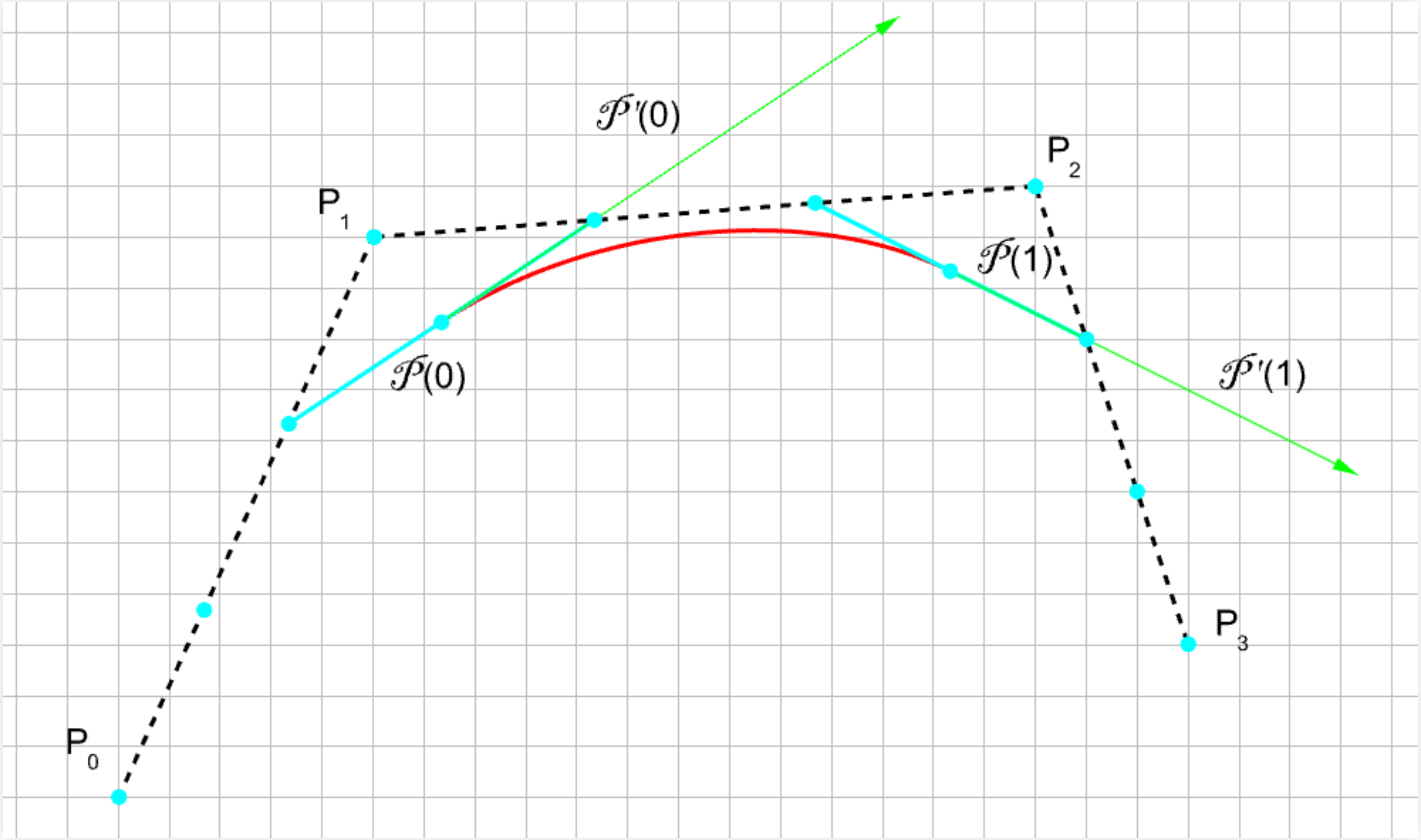
$C_2'(t) = \frac{1}{2}(-3t^2 + 2t + 1)$

$C_3'(t) = \frac{1}{2}t$

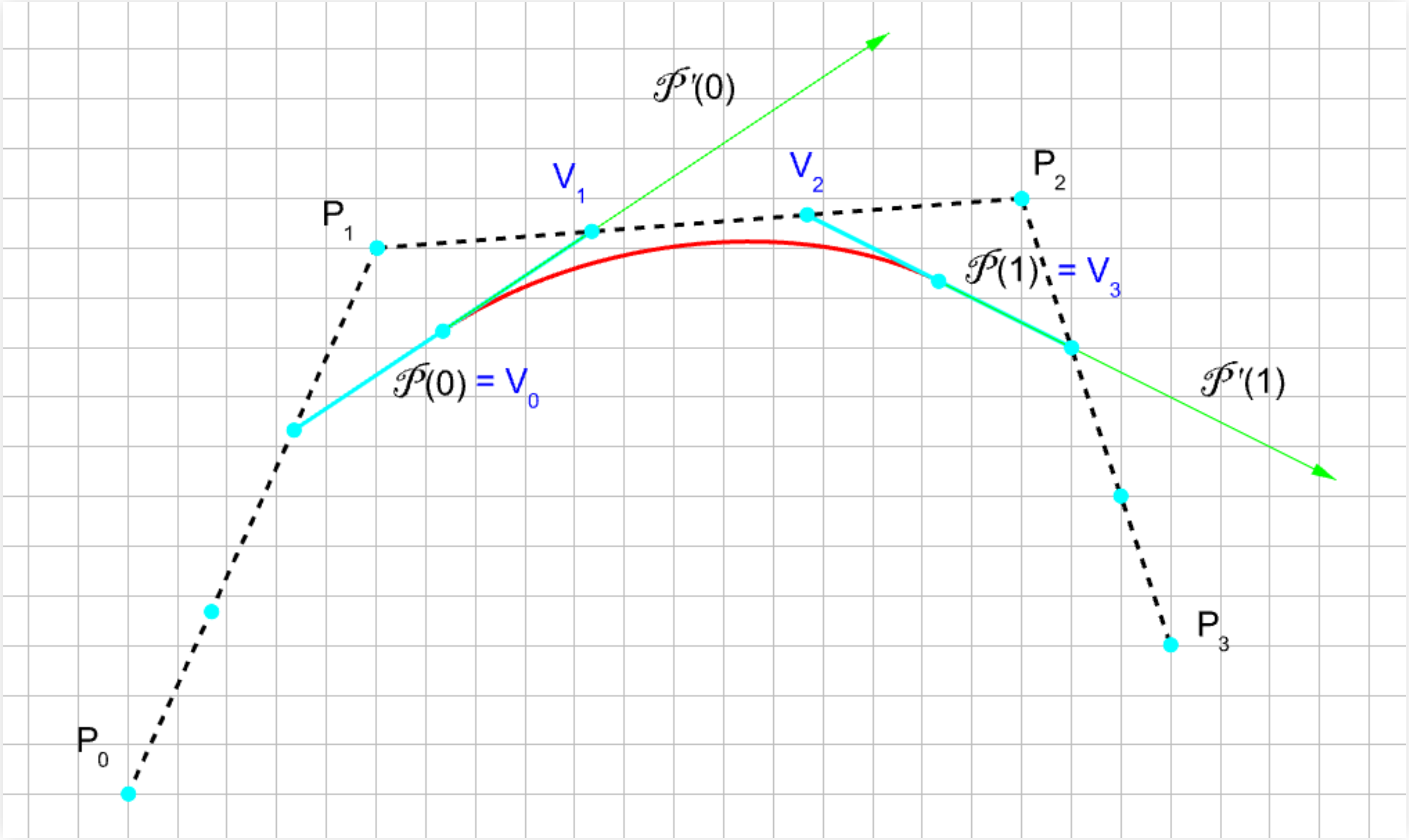
$$\mathscr{P}'(0) = -\frac{1}{2}P_0 + \frac{1}{2}P_2 = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_2}$$

$$\mathscr{P}'(1) = -\frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_3 = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_3}$$

POČÁTEČNÍ A KONCOVÝ TEČNÝ VEKTOR



VZTAH MEZI COONSOVOU A BÉZIEROVOU KUBIKOU

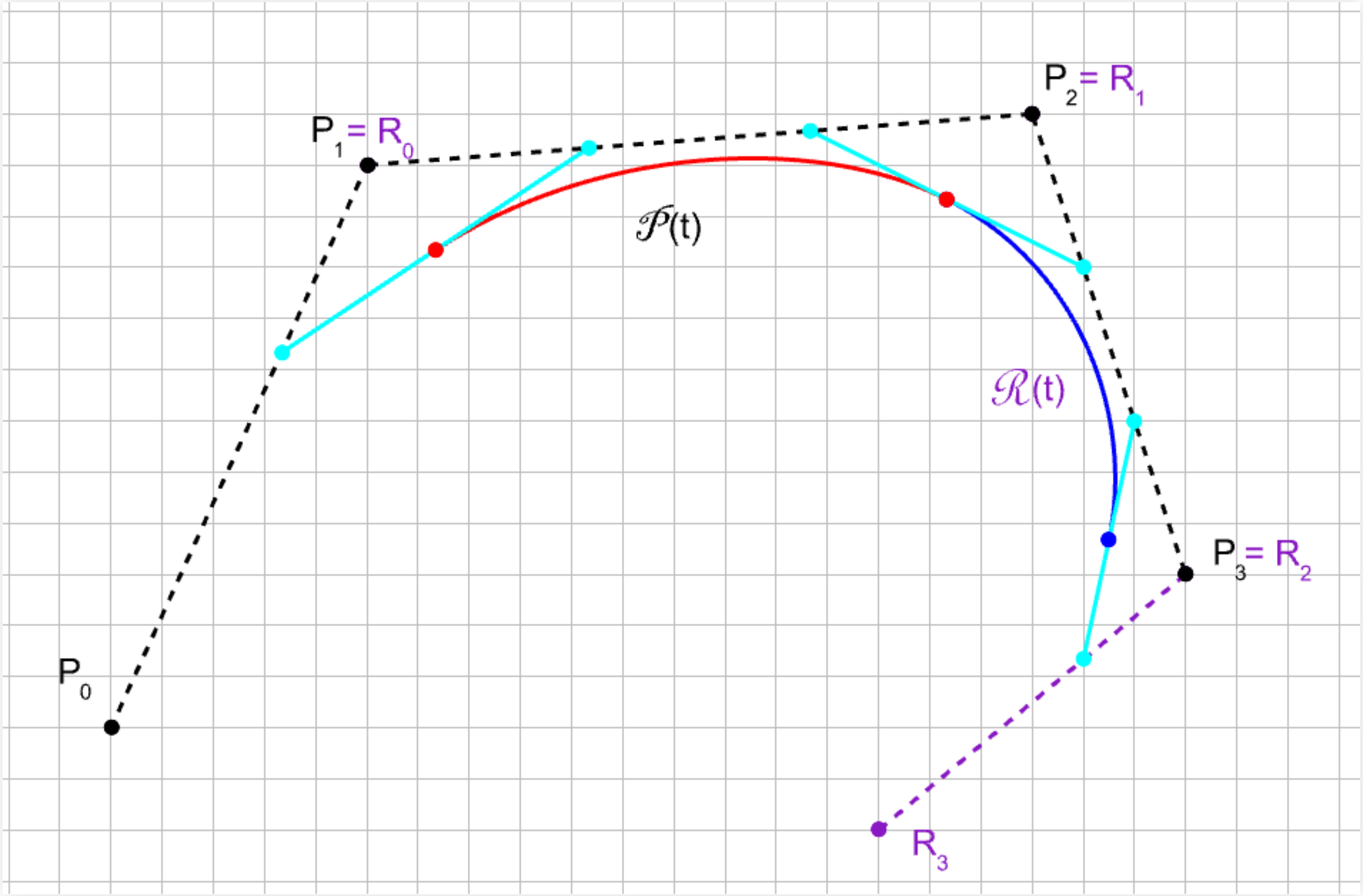


C^2 SPOJITÉ NAPOJENÍ

řídicí polygon P_0, P_1, P_2, P_3 Coonsovy kubiky $\mathscr{P}(t)$
řídicí polygon R_0, R_1, R_2, R_3 Coonsovy kubiky $\mathscr{R}(s)$

$$
\begin{aligned}
C^0 &\iff \tfrac{1}{6}P_1 + \tfrac{2}{3}P_2 + \tfrac{1}{6}P_3 = \tfrac{1}{6}R_0 + \tfrac{2}{3}R_1 + \tfrac{1}{6}R_2 \\
C^1 &\iff C^0 \wedge -\tfrac{1}{2}P_1 + \tfrac{1}{2}P_3 = -\tfrac{1}{2}R_0 + \tfrac{1}{2}R_2 \\
C^2 &\iff C^1 \wedge P_1 - 2P_2 + P_3 = R_0 - 2R_1 + R_2
\end{aligned}
$$

soustava 3 rovnic pro neznámé $R_0, R_1, R_2 \Rightarrow$ jediné řešení $R_0 = P_1, R_1 = P_2, R_2 = P_3$



P_0
P_1 = R_0
P_2 = R_1
P_3 = R_2
R_3
𝒫(t)
ℛ(t)

COONSŮV KUBICKÝ B-SPLINE

- aproximační vícesegmentová křivka třetího stupně, jejíž segmenty jsou Coonsovy kubiky napojené s C^2 spojitostí

v terminologii NURBS $\Rightarrow$ Uniformní neRacionální B-Spline 3. stupně

COONSŮV KUBICKÝ B-SPLINE

Dáno: $P_0, P_1, \ldots, P_n$

jednotlivé segmenty k_i jsou Coonsovy kubiky s řídicími polygony:

$k_1\,:\,(P_0P_1P_2P_3)$

$k_1\,:\,(P_1P_2P_3P_4)$

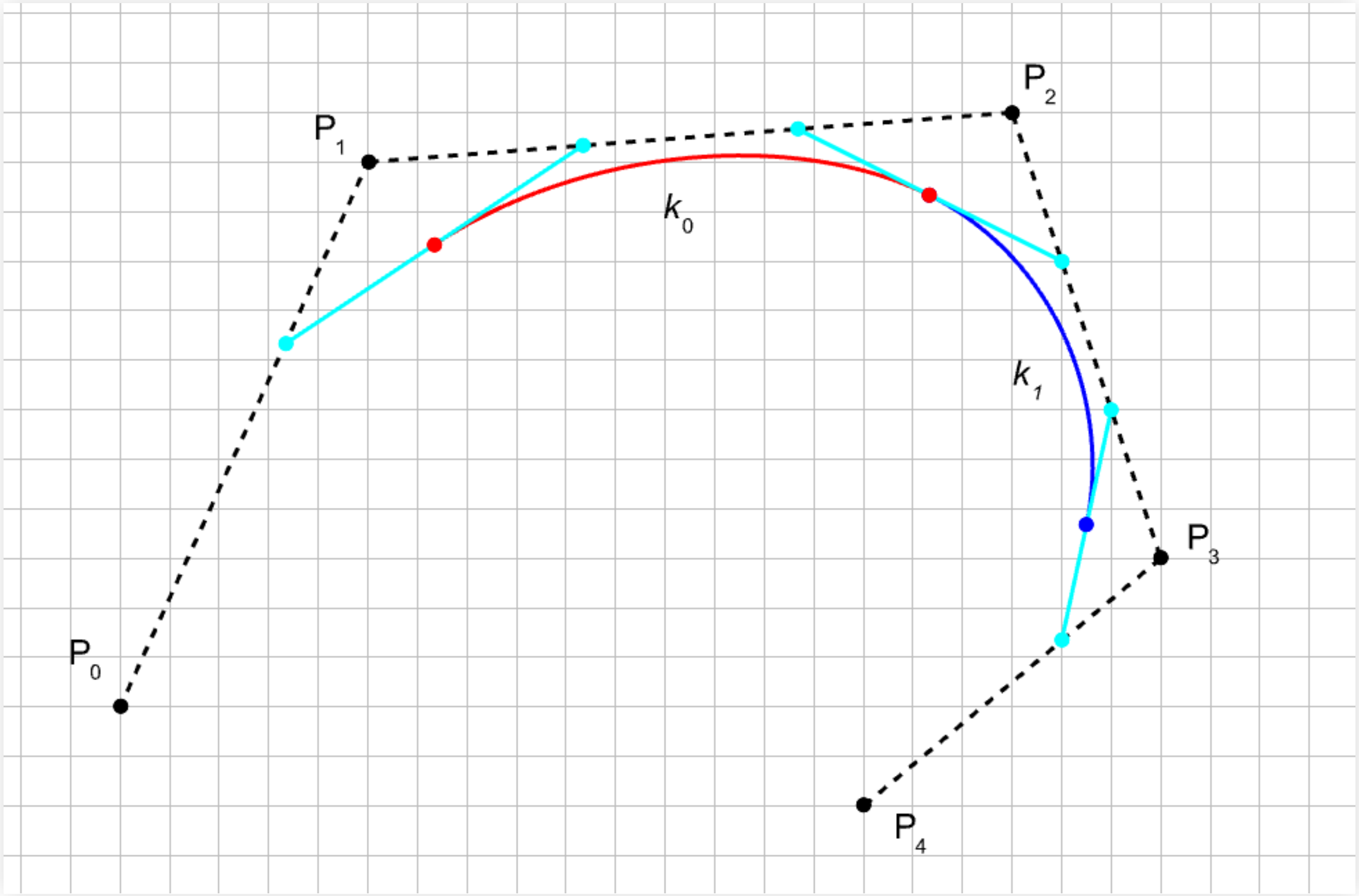
$\ldots$

$k_{n-3}\,:\,(P_{n-3}P_{n-2}P_{n-1}P_n)$

počet segmentů: $n-2$

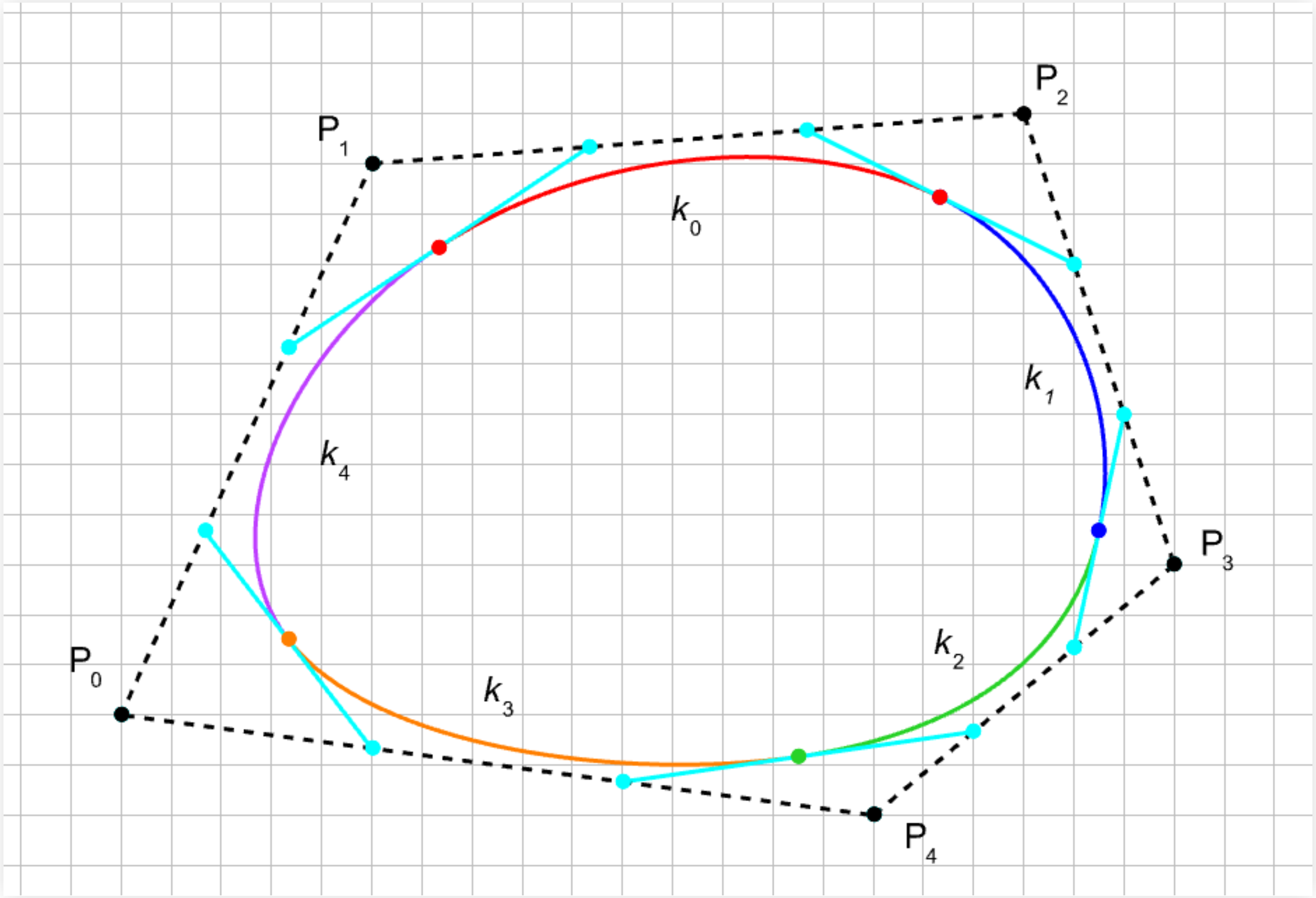
COONSŮV KUBICKÝ B-SPLINE OTEVŘENÝ

řídicí polygon P_0, P_1, P_2, P_3, P_4



COONSŮV KUBICKÝ B-SPLINE UZAVŘENÝ

řídící polygon $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4(, P_5 = P_0, P_6 = P_1, P_7 = P_2)$



INTERPOLAČNÍ KŘIVKA 3°
UKOTVENÁ KUBIKA