POČÍTAČOVÁ GRAFIKA 23/24

Coonsova kubika, Coonsův kubický B-spline
ukotvená B-spline kubika
interpolační křivky

COONSOVA KUBIKA

Steven Anson Coons (1912 - 1979)

Massachusetts Institute of Technology (MIT)

COONSOVA KUBIKA

aproximační křivka 3. stupně daná 4 řídicími body P_0, P_1, P_2, P_3

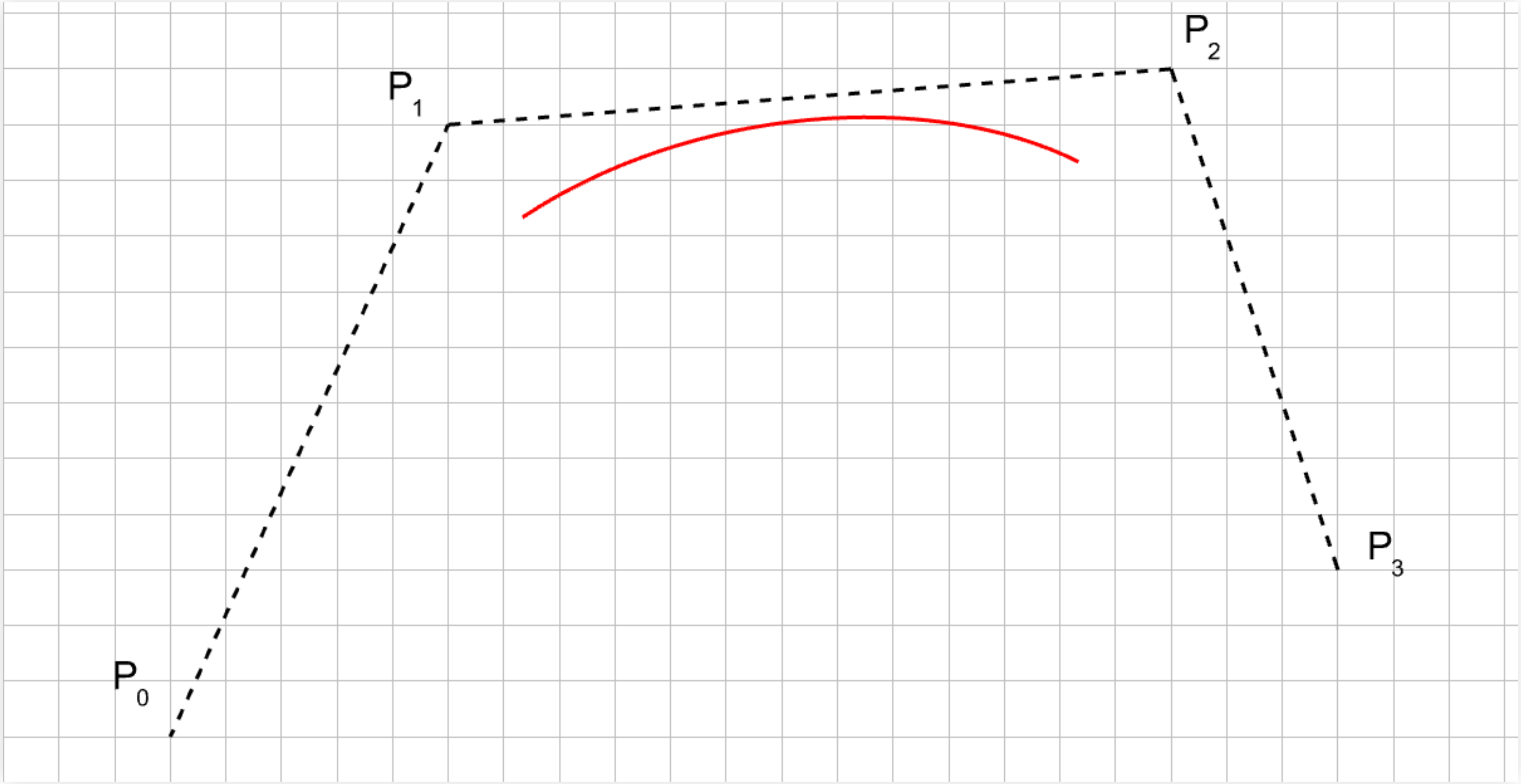
vektorová rovnice:

$$\mathscr{P}(t) = C_0(t)P_0 + C_1(t)P_1 + C_2(t)P_2 + C_3(t)P_3,\ t \in [0,1]$$

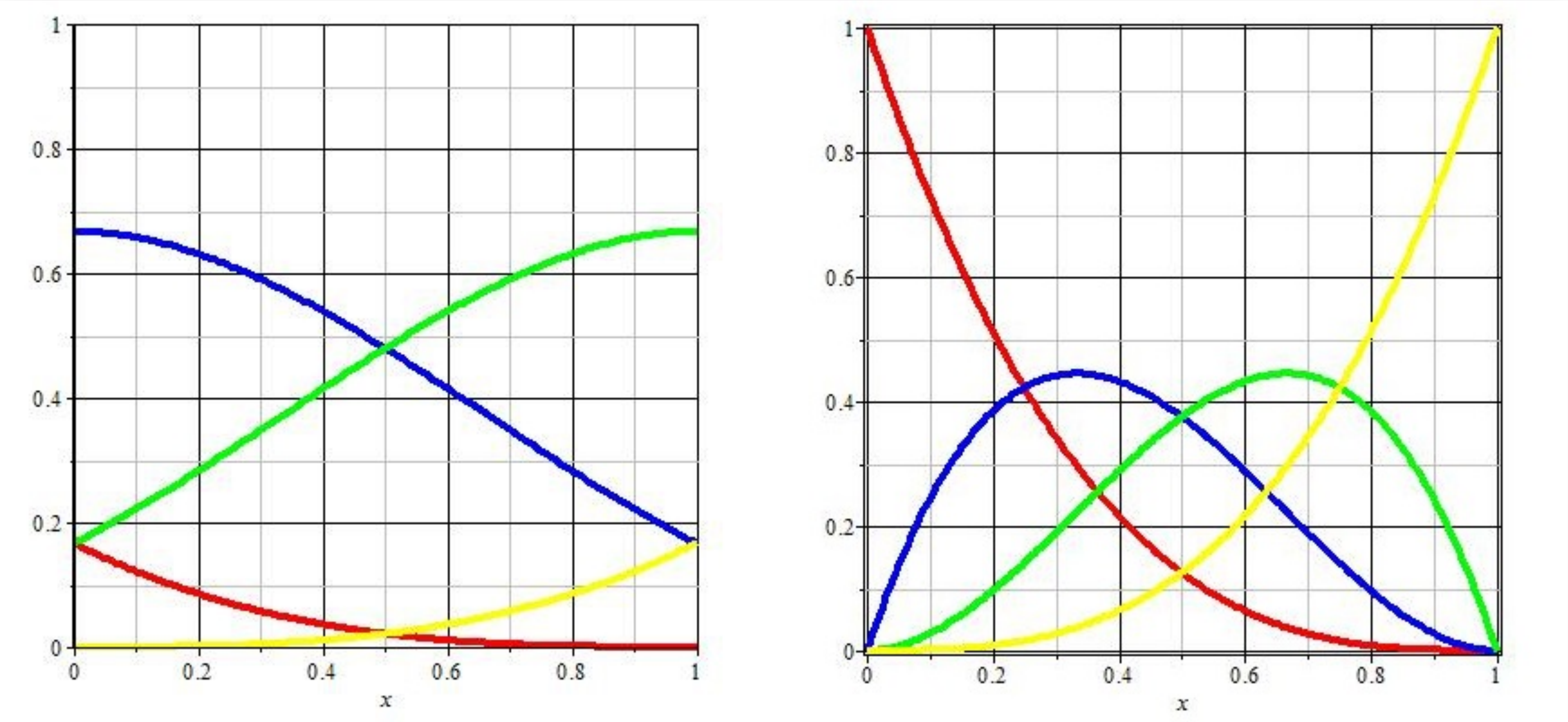
Coonsovy polynomy

$$C_0(t) = \tfrac{1}{6}(1-t)^3$$
$$C_1(t) = \tfrac{1}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4)$$
$$C_2(t) = \tfrac{1}{6}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1)$$
$$C_3(t) = \tfrac{1}{6}t^3$$

COONSOVA KUBIKA



COONSOVY A BERNSTEINOVY POLYNOMY - PRŮBĚHY



POČÁTEČNÍ BOD KŘIVKY

$$\mathscr{P}(0) = \frac{1}{6}P_0 + \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{6}P_2$$

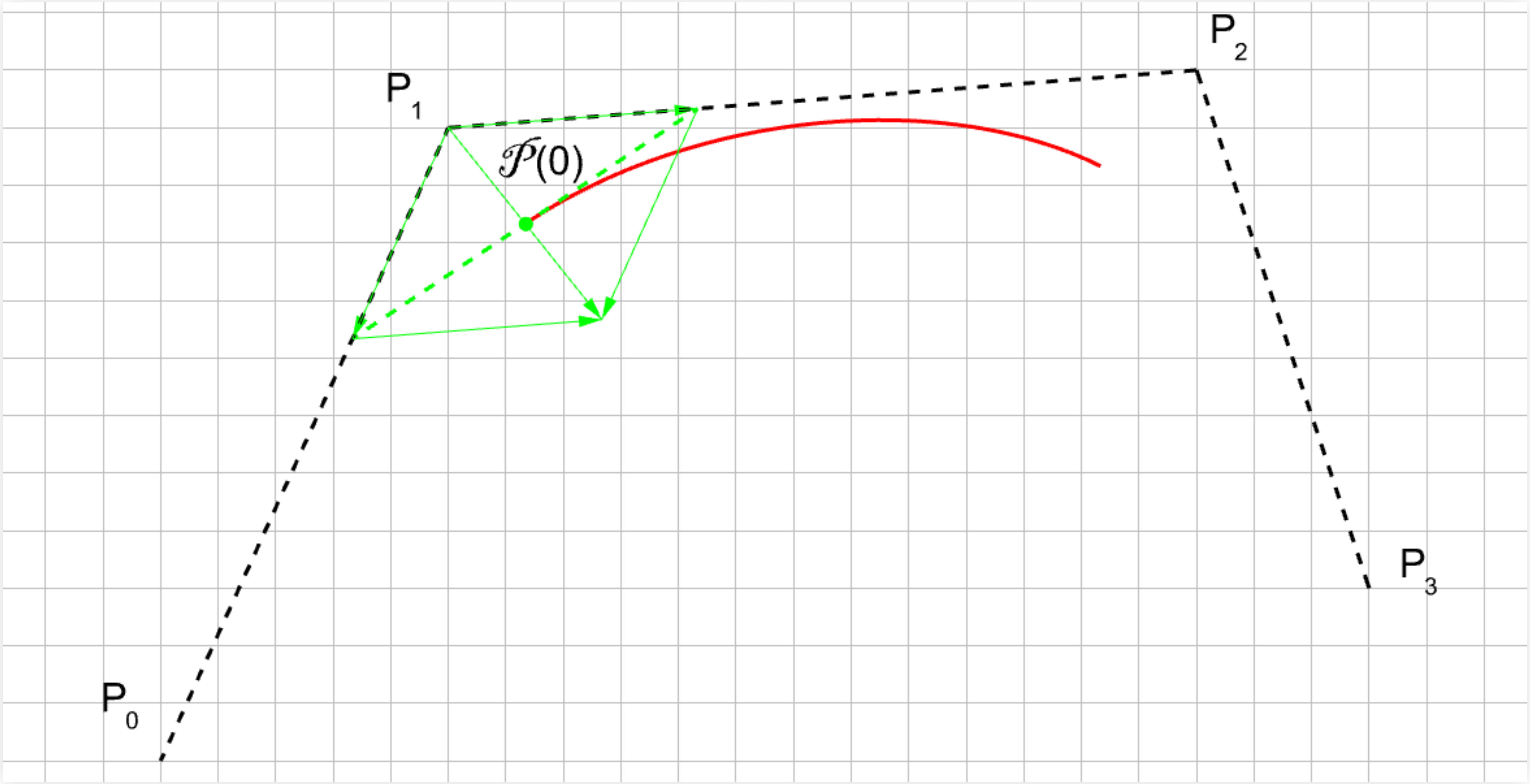
$$\Downarrow$$

$$\mathscr{P}(0) = P_1 + \frac{1}{6}(P_0 - P_1) + \frac{1}{6}(P_2 - P_1)$$

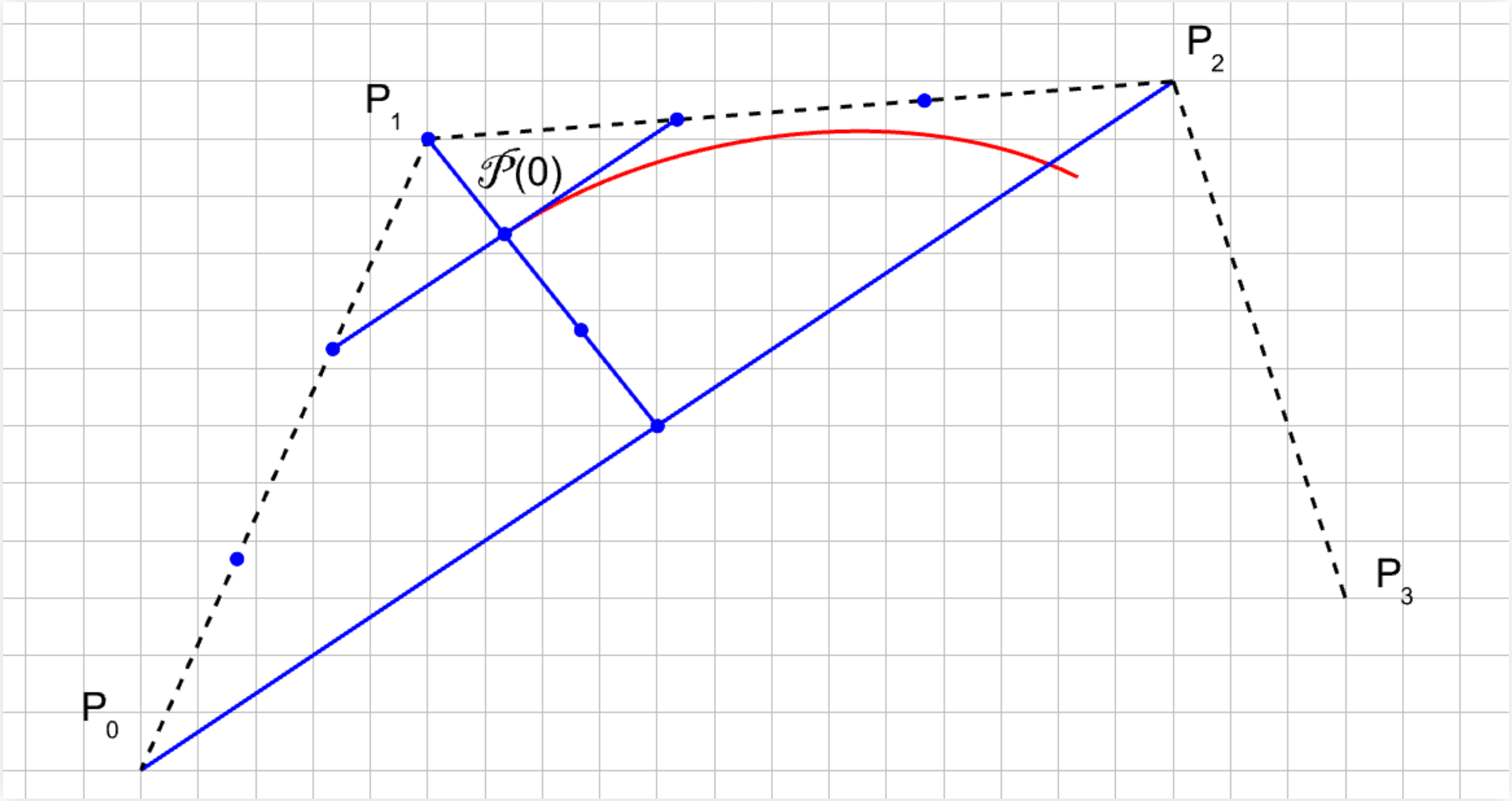
$$\Downarrow$$

$$\mathscr{P}(0) = P_1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_0} + \frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2})$$

KONSTRUKCE POČÁTEČNÍHO BODU



POČÁTEČNÍ BOD - VLASTNOSTI



$\mathscr{P}(0)$ je tzv. antitěžiště trojúhelníka $P_0P_1P_2$

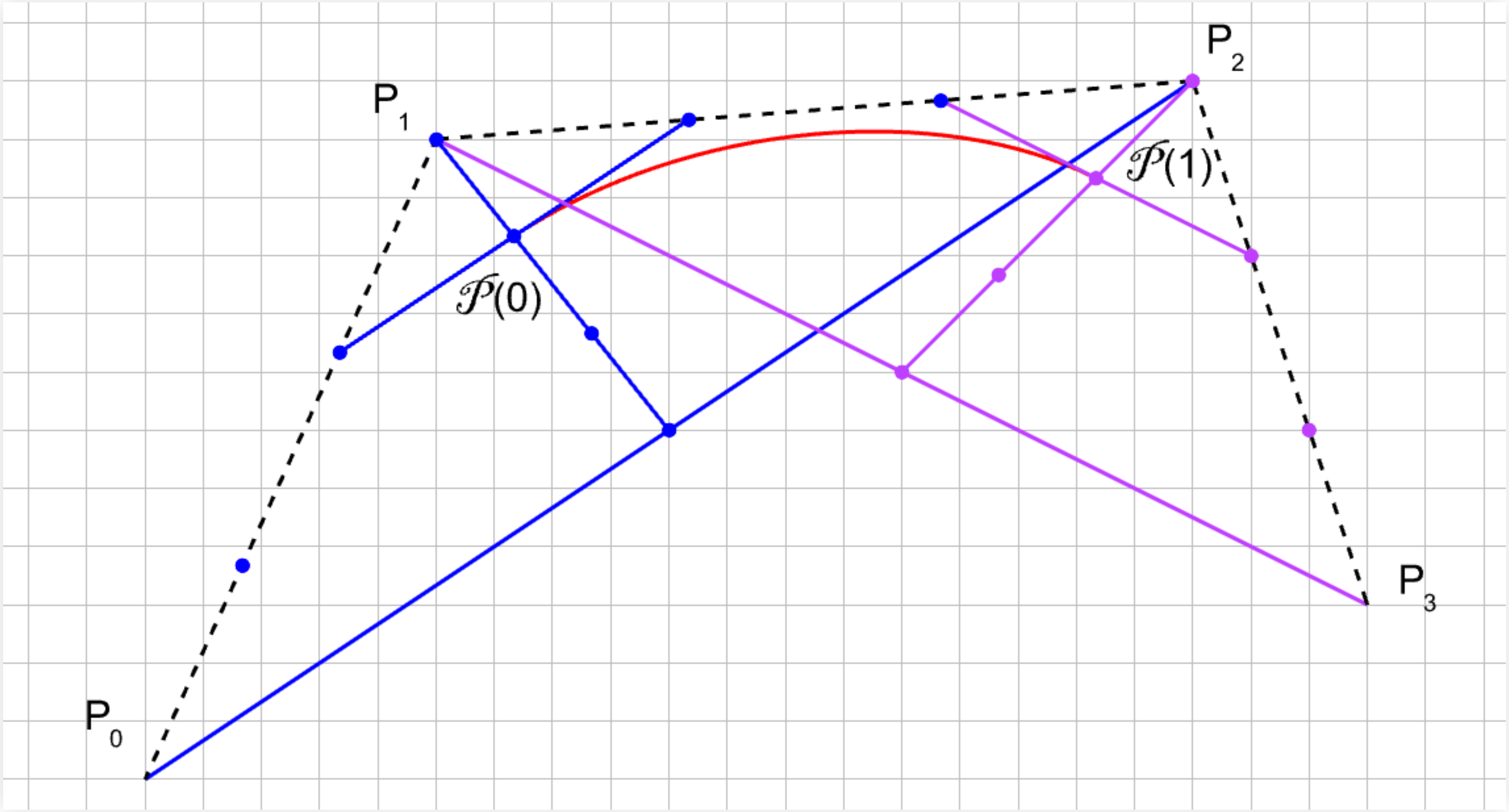
KONCOVÝ BOD KŘIVKY

$$\mathscr{P}(1) = \frac{1}{6}P_1 + \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{6}P_3$$

$$\Downarrow$$

$$\mathscr{P}(1) = P_2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}\overrightarrow{P_2P_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{P_2P_3})$$

KRAJNÍ BODY KŘIVKY



$\mathscr{P}(0)$ je "antitěžiště" trojúhelníka $P_0P_1P_2$, $\mathscr{P}(1)$ je "antitěžiště" trojúhelníka $P_1P_2P_3$

POČÁTEČNÍ A KONCOVÝ TEČNÝ VEKTOR

derivace Coonsových polynomů:

$C_0'(t) = -\frac{1}{2}(1-t)^2$

$C_1'(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 4t)$

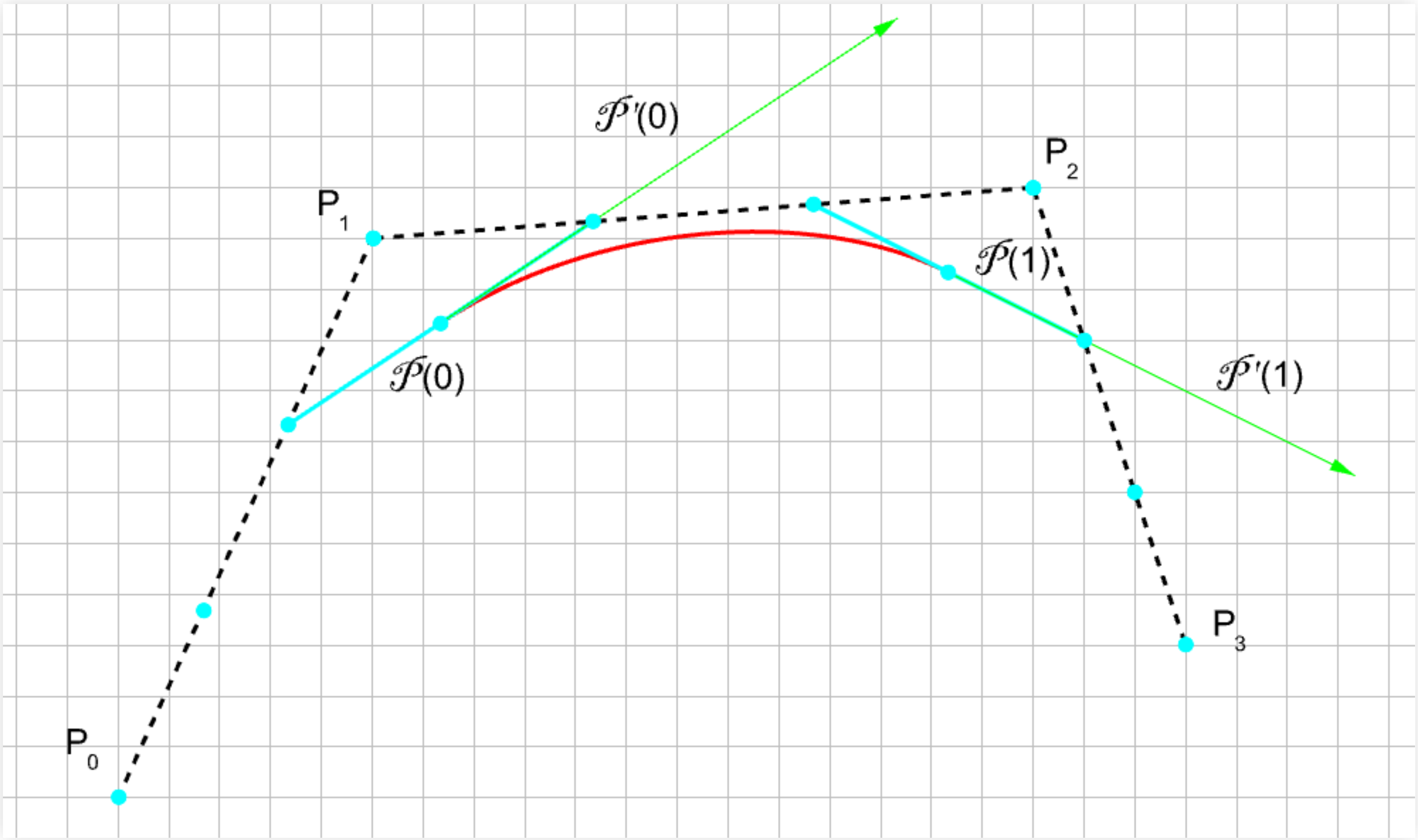
$C_2'(t) = \frac{1}{2}(-3t^2 + 2t + 1)$

$C_3'(t) = \frac{1}{2}t$

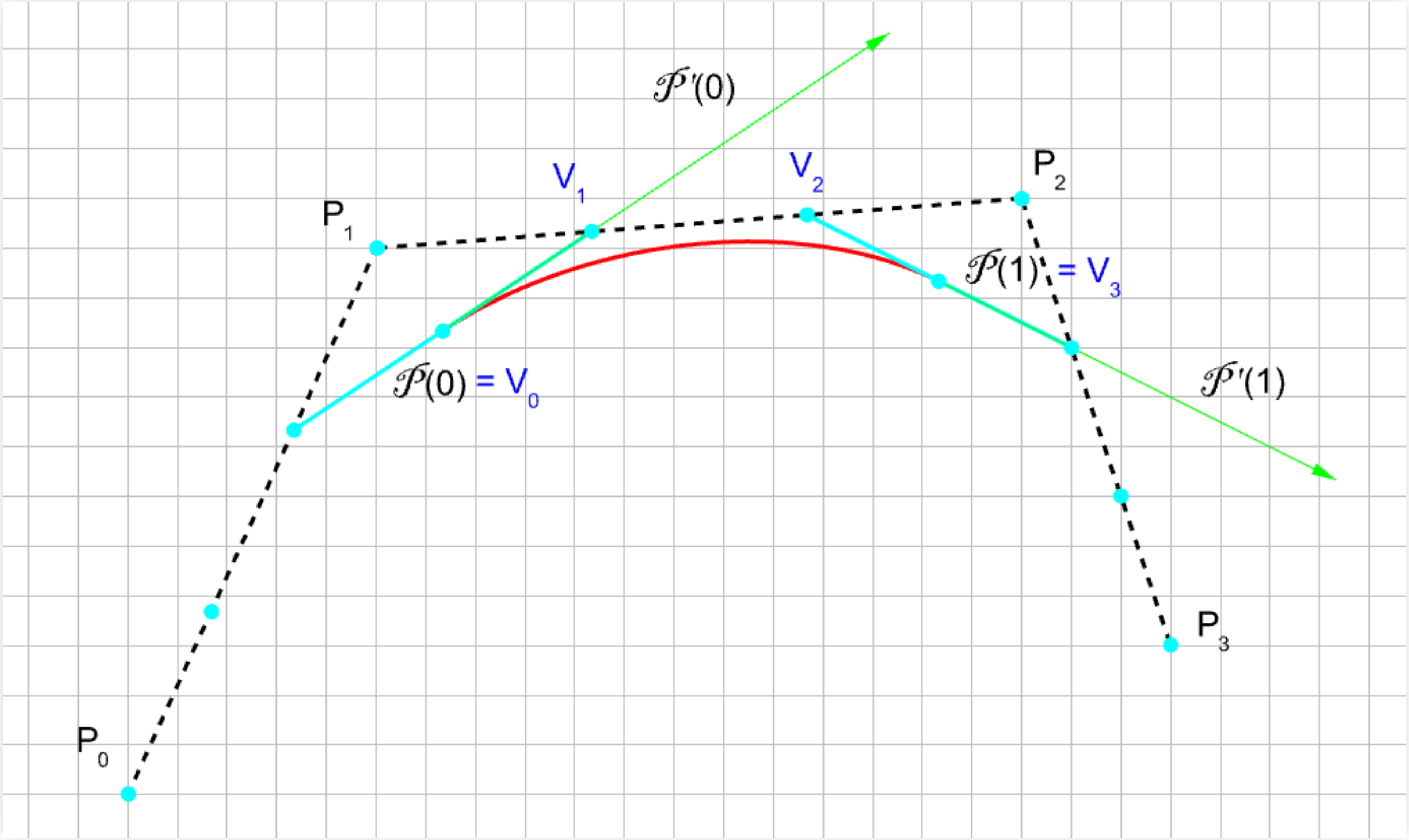
$$\mathscr{P}'(0) = -\frac{1}{2}P_0 + \frac{1}{2}P_2 = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_2}$$

$$\mathscr{P}'(1) = -\frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_3 = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_3}$$

POČÁTEČNÍ A KONCOVÝ TEČNÝ VEKTOR



VZTAH MEZI COONSOVOU A BÉZIEROVOU KUBIKOU

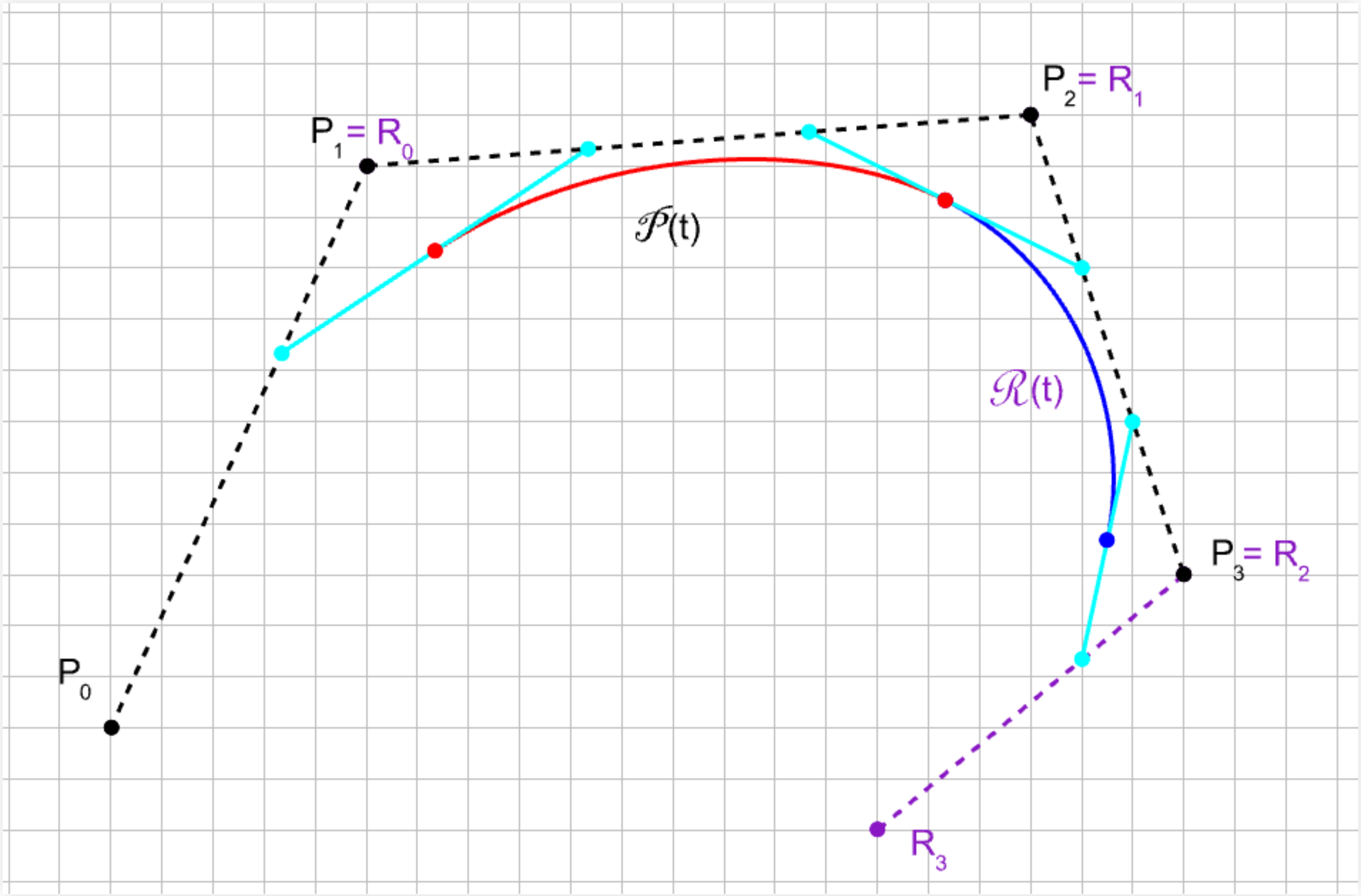


C^2 SPOJITÉ NAPOJENÍ

řídicí polygon P_0, P_1, P_2, P_3 Coonsovy kubiky $\mathscr{P}(t)$
řídicí polygon R_0, R_1, R_2, R_3 Coonsovy kubiky $\mathscr{R}(s)$

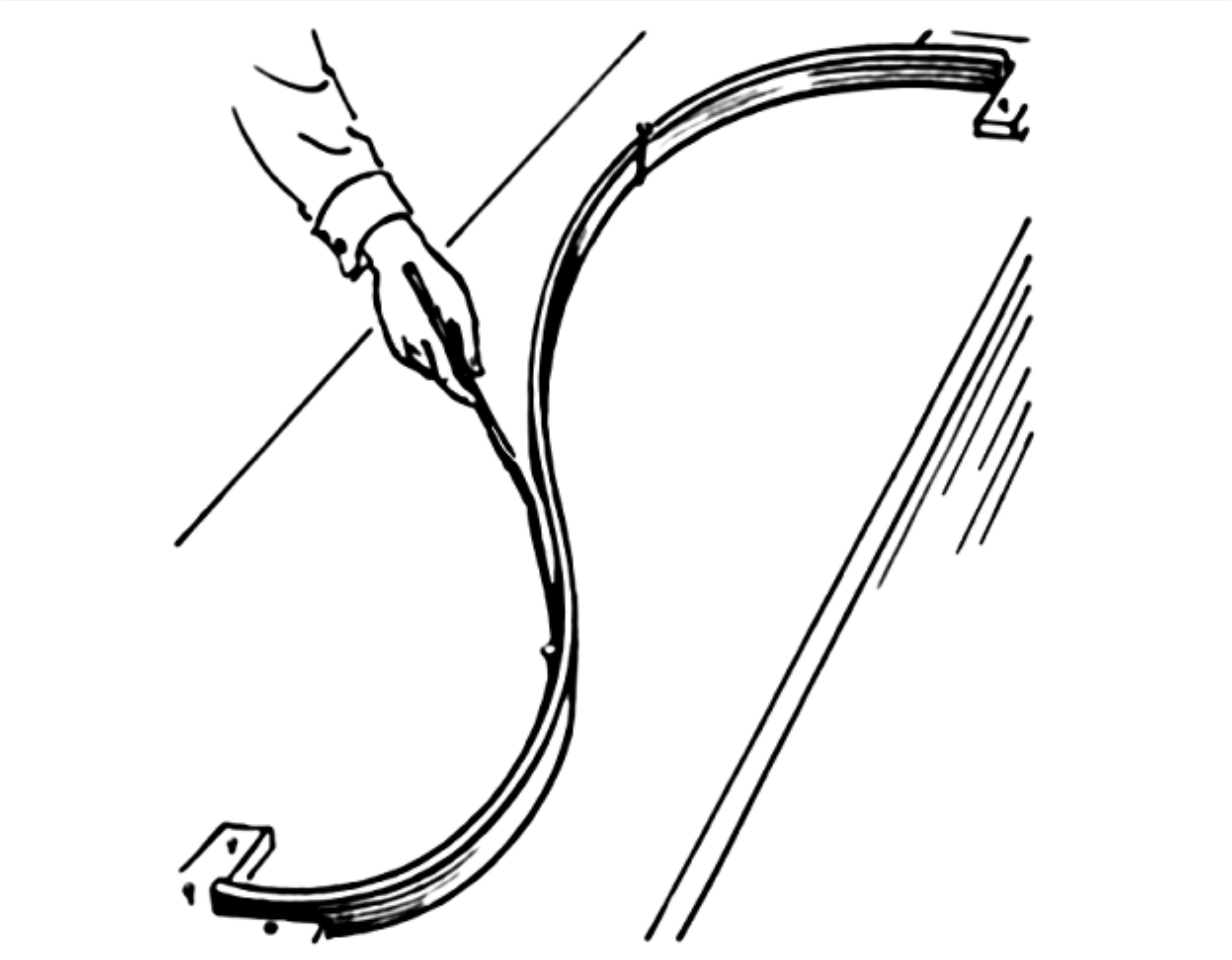
$$
\begin{aligned}
C^0 &\iff \tfrac{1}{6}P_1 + \tfrac{2}{3}P_2 + \tfrac{1}{6}P_3 = \tfrac{1}{6}R_0 + \tfrac{2}{3}R_1 + \tfrac{1}{6}R_2 \\
C^1 &\iff C^0 \wedge -\tfrac{1}{2}P_1 + \tfrac{1}{2}P_3 = -\tfrac{1}{2}R_0 + \tfrac{1}{2}R_2 \\
C^2 &\iff C^1 \wedge P_1 - 2P_2 + P_3 = R_0 - 2R_1 + R_2
\end{aligned}
$$

soustava 3 rovnic pro neznámé $R_0, R_1, R_2 \Rightarrow$ jediné řešení $R_0 = P_1, R_1 = P_2, R_2 = P_3$



P_0
$P_1 = R_0$
$P_2 = R_1$
$P_3 = R_2$
R_3
$\mathscr{P}(t)$
$\mathscr{R}(t)$

- interpolační vícesegmentová polynomiální křivka



B-SPLINE KŘIVKA

- aproximační vícesegmentová křivka

- B (basis) - bázové funkce
- všechny segmenty napojeny se spojitostí min. C^2 (např. segmenty Bézierových kubik napojené s C^2 spojitostí)
- zobecněním B-spline křivky je NeUniformní Racionální B-Spline (NURBS)

- aproximační vícesegmentová křivka třetího stupně, jejíž segmenty jsou Coonsovy kubiky napojené s C^2 spojitostí

v terminologii NURBS $\Rightarrow$ Uniformní neRacionální B-Spline 3. stupně

COONSŮV KUBICKÝ B-SPLINE

Dáno: $P_0, P_1, \ldots, P_n$

jednotlivé segmenty k_i jsou Coonsovy kubiky s řídicími polygony:

$k_1 \,:\, (P_0 P_1 P_2 P_3)$

$k_1 \,:\, (P_1 P_2 P_3 P_4)$

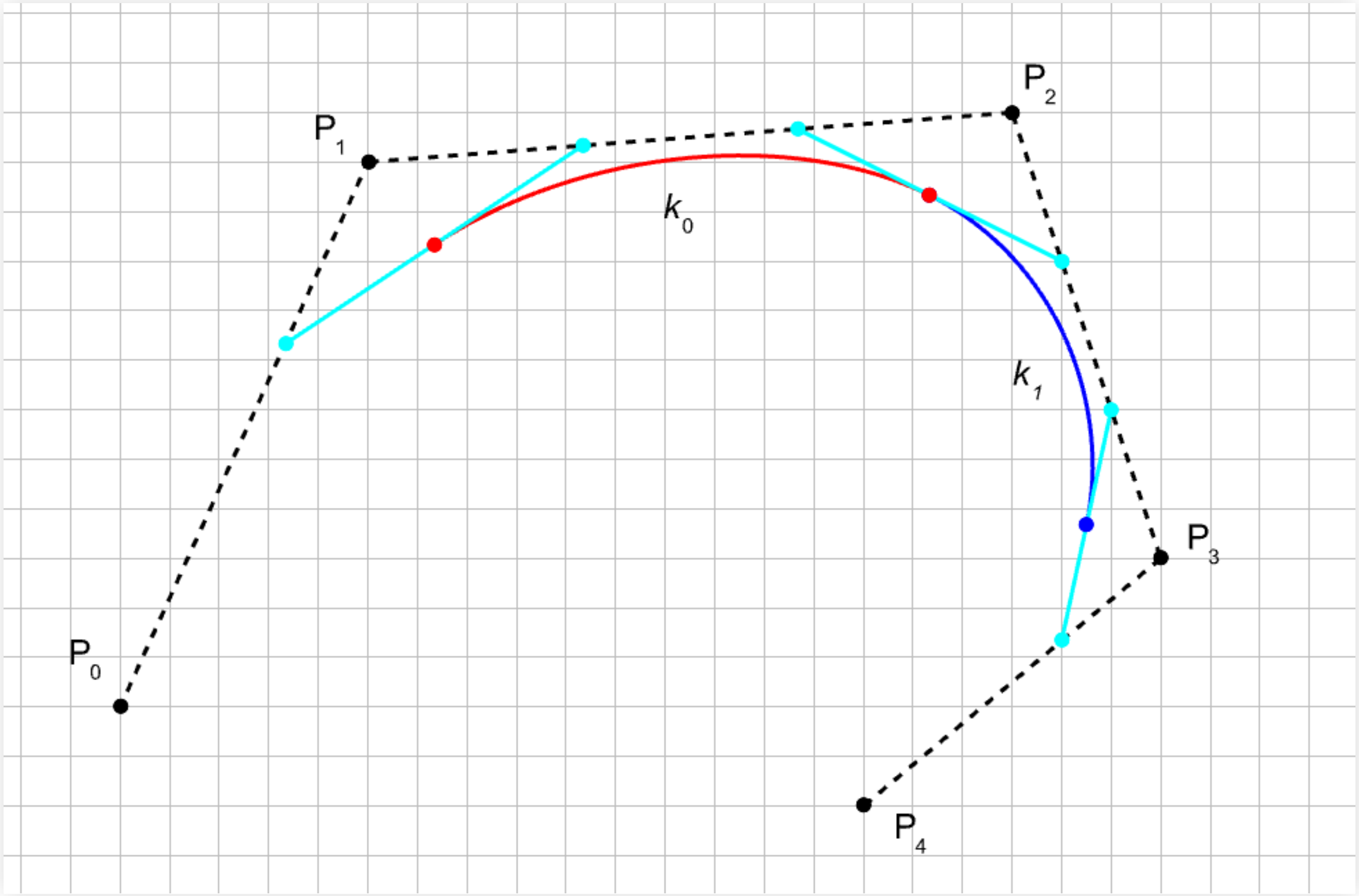
$\ldots$

$k_{n-3} \,:\, (P_{n-3} P_{n-2} P_{n-1} P_n)$

počet segmentů: $n-2$

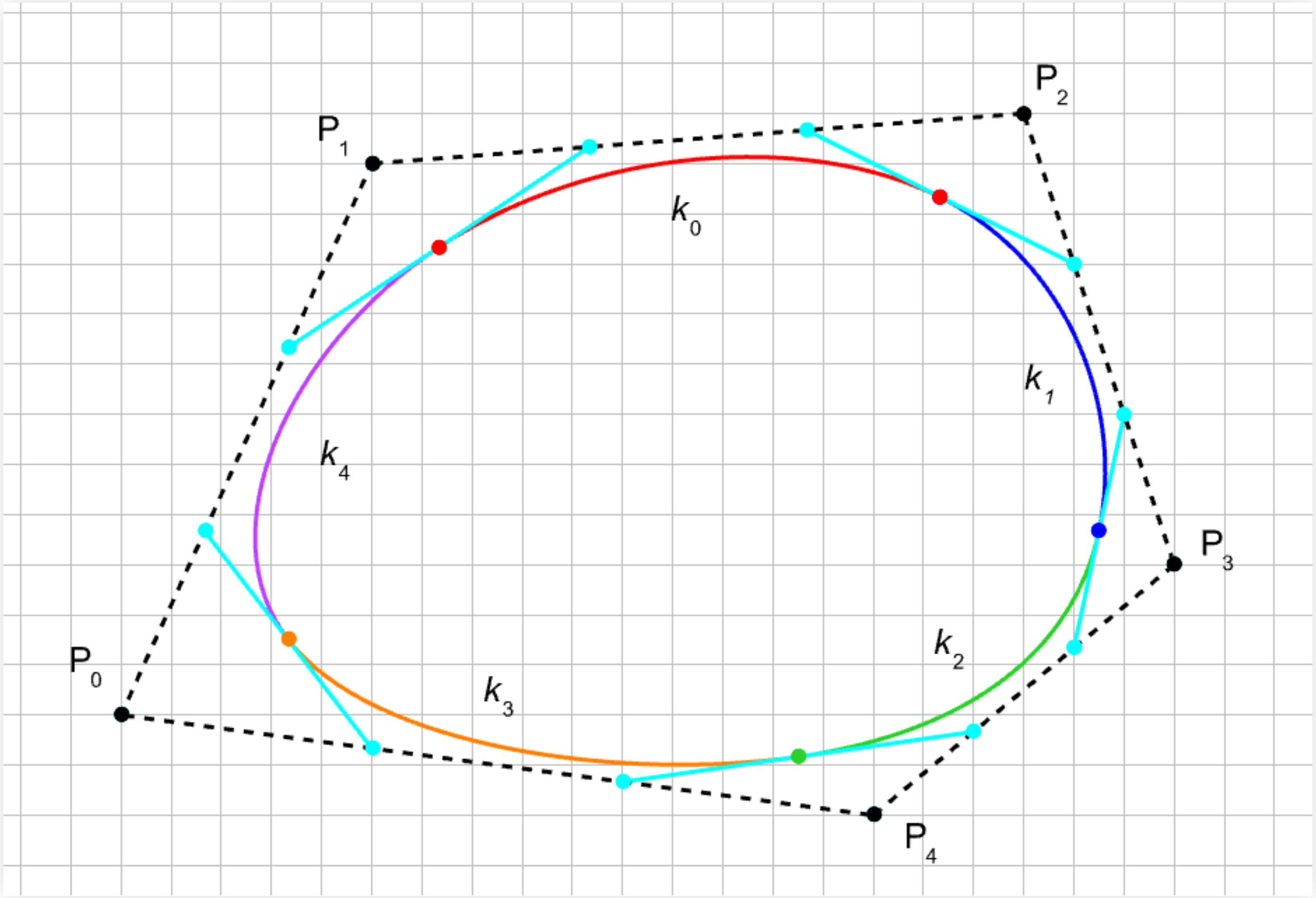
COONSŮV KUBICKÝ B-SPLINE OTEVŘENÝ

řídicí polygon P_0, P_1, P_2, P_3, P_4



COONSŮV KUBICKÝ B-SPLINE UZAVŘENÝ

řídící polygon $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 (, P_5 = P_0, P_6 = P_1, P_7 = P_2)$

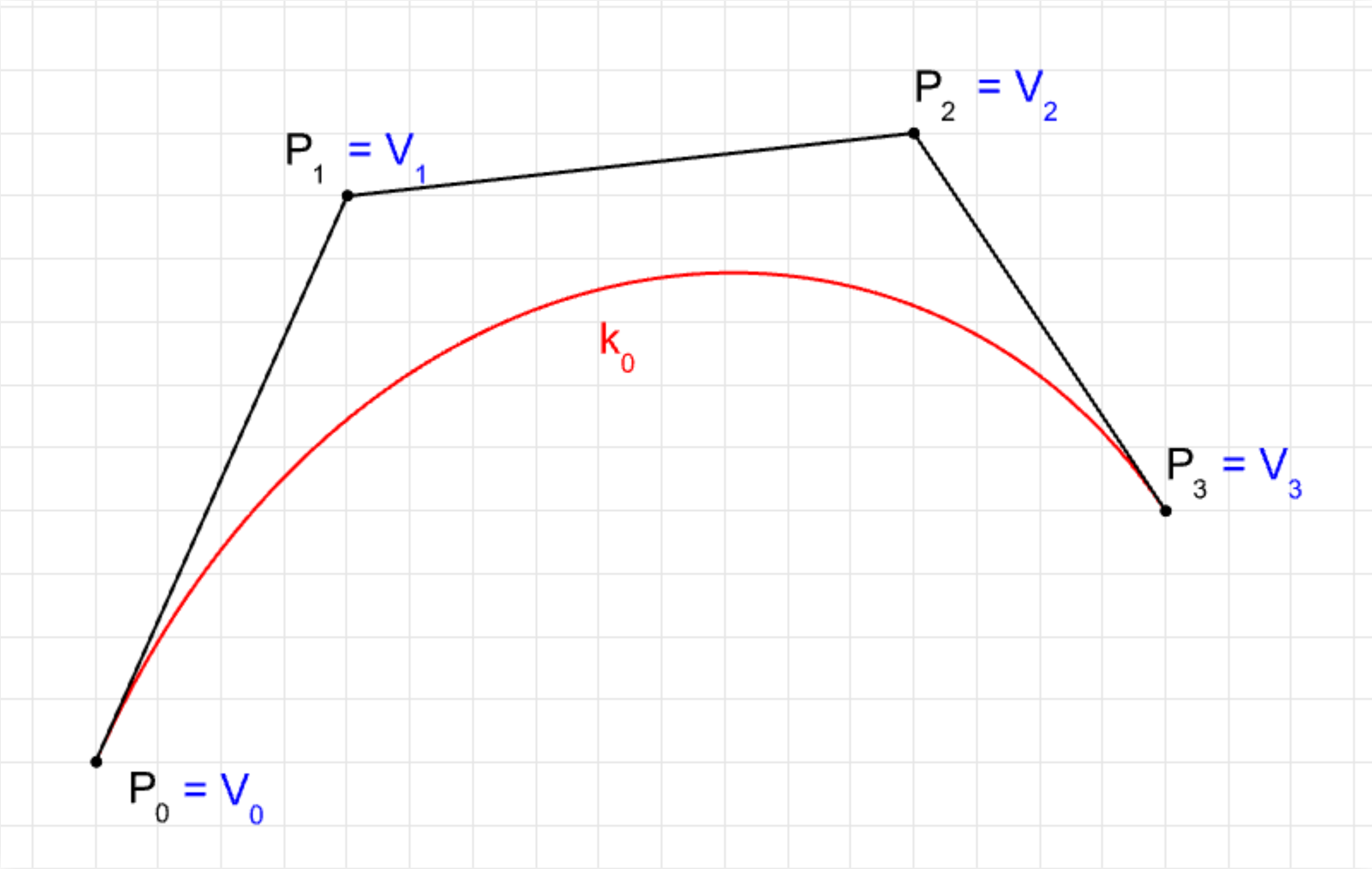


Dáno: $P_0, P_1, \ldots, P_n$

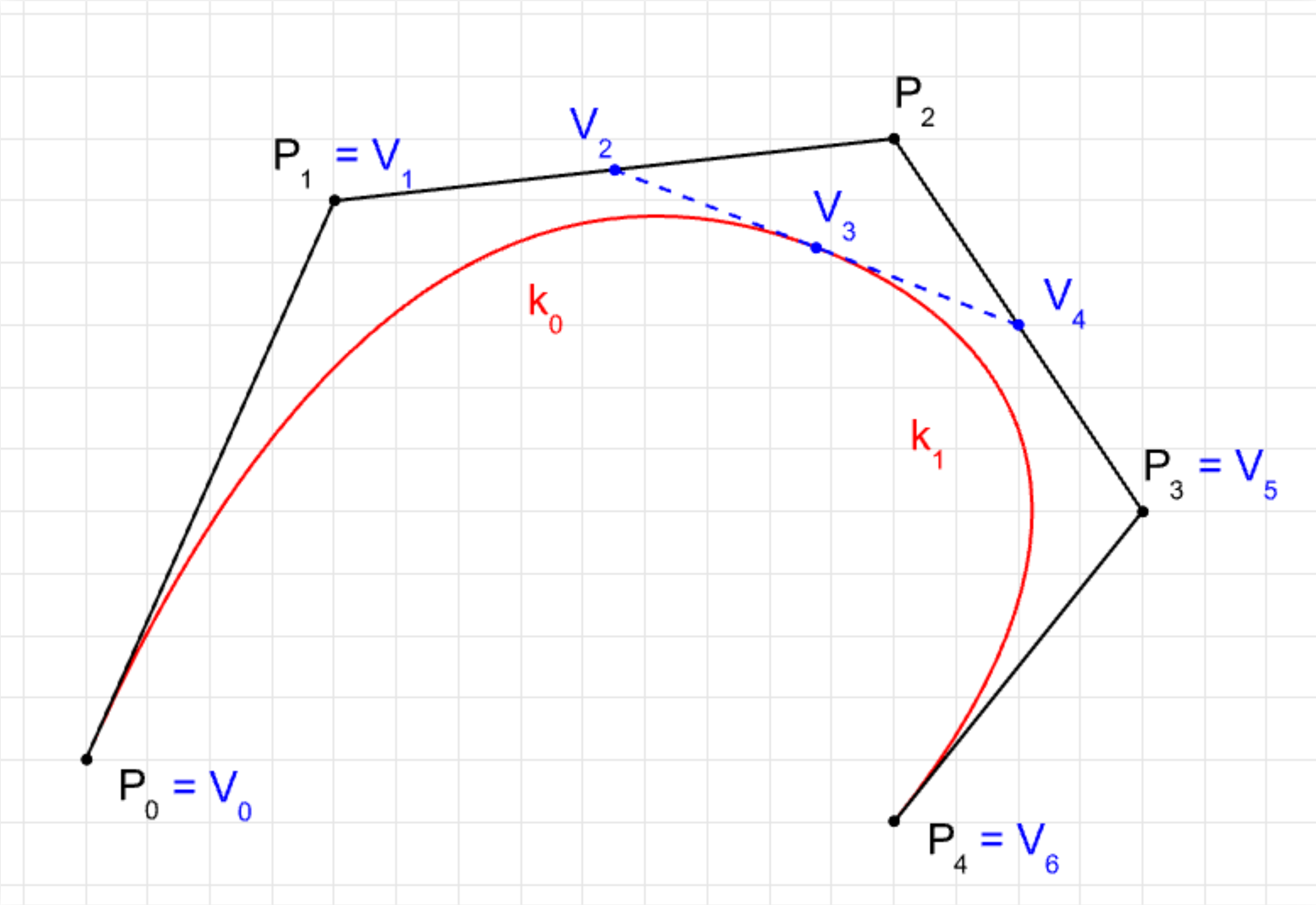
vícesegmentová B-spline křivka třetího stupně, prochází krajními řídícími body, ostatní body aproximuje

počet segmentů: n-2

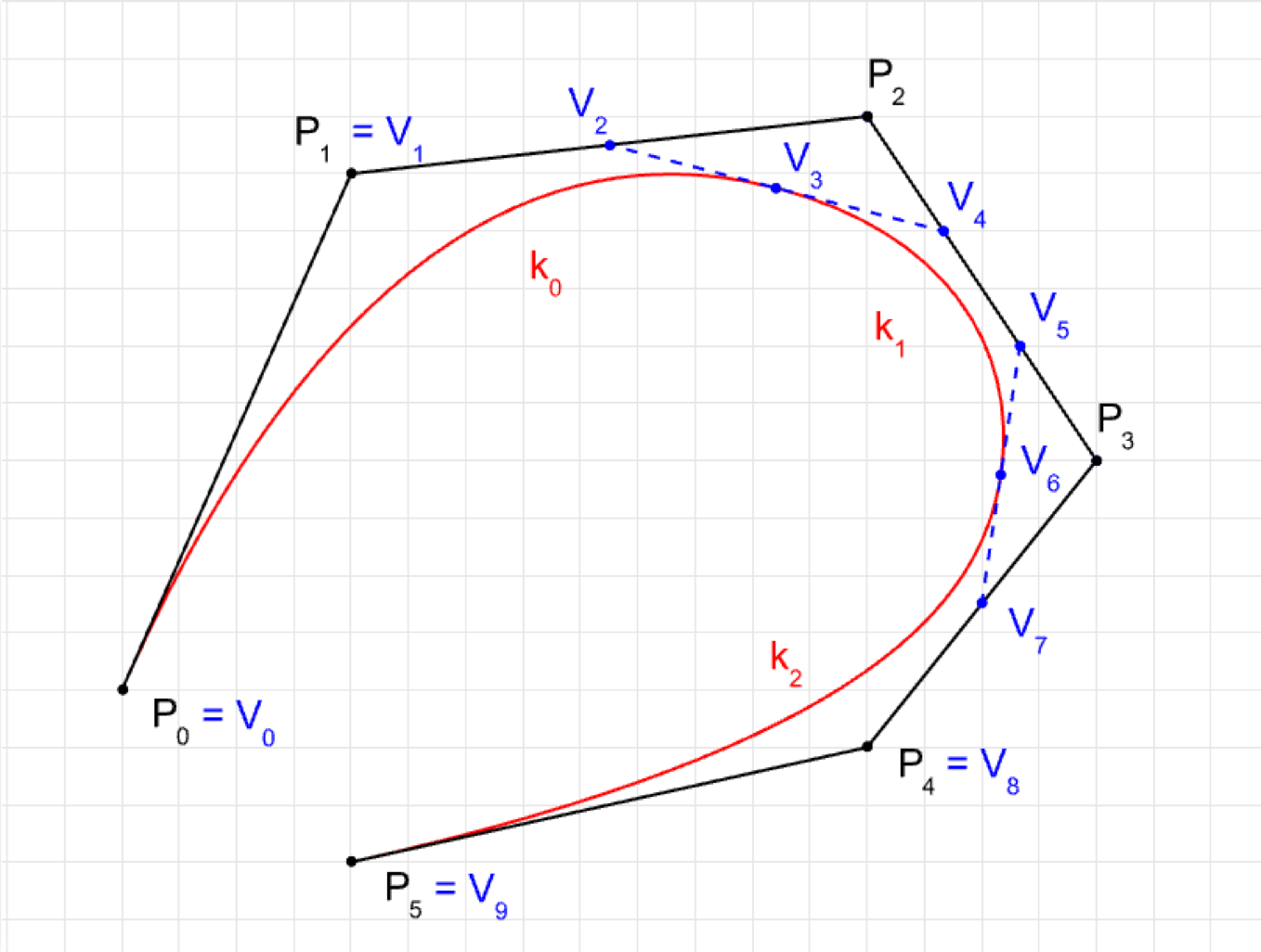
UKOTVENÁ KUBIKA - 4 BODY



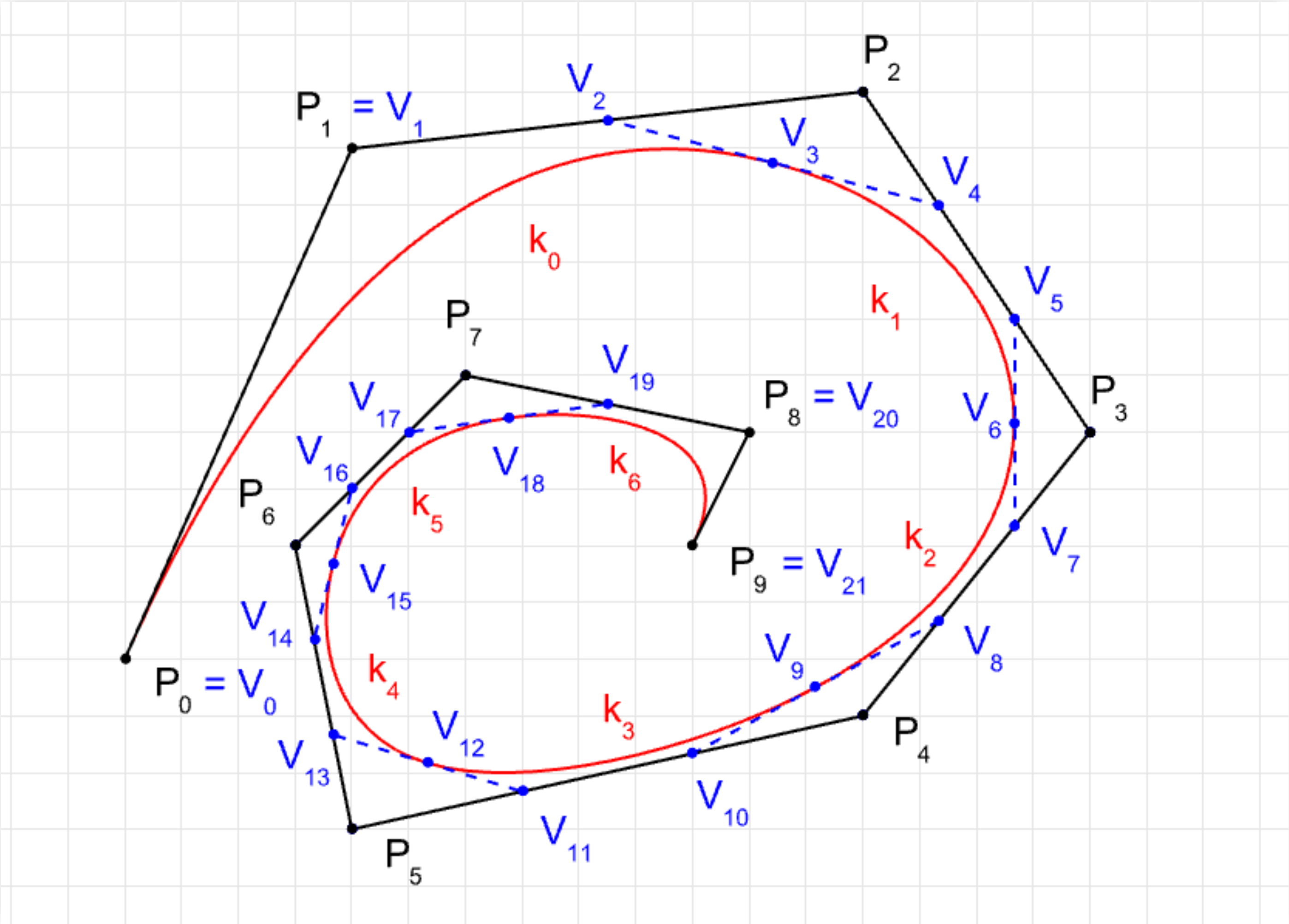
UKOTVENÁ KUBIKA - 5 BODŮ



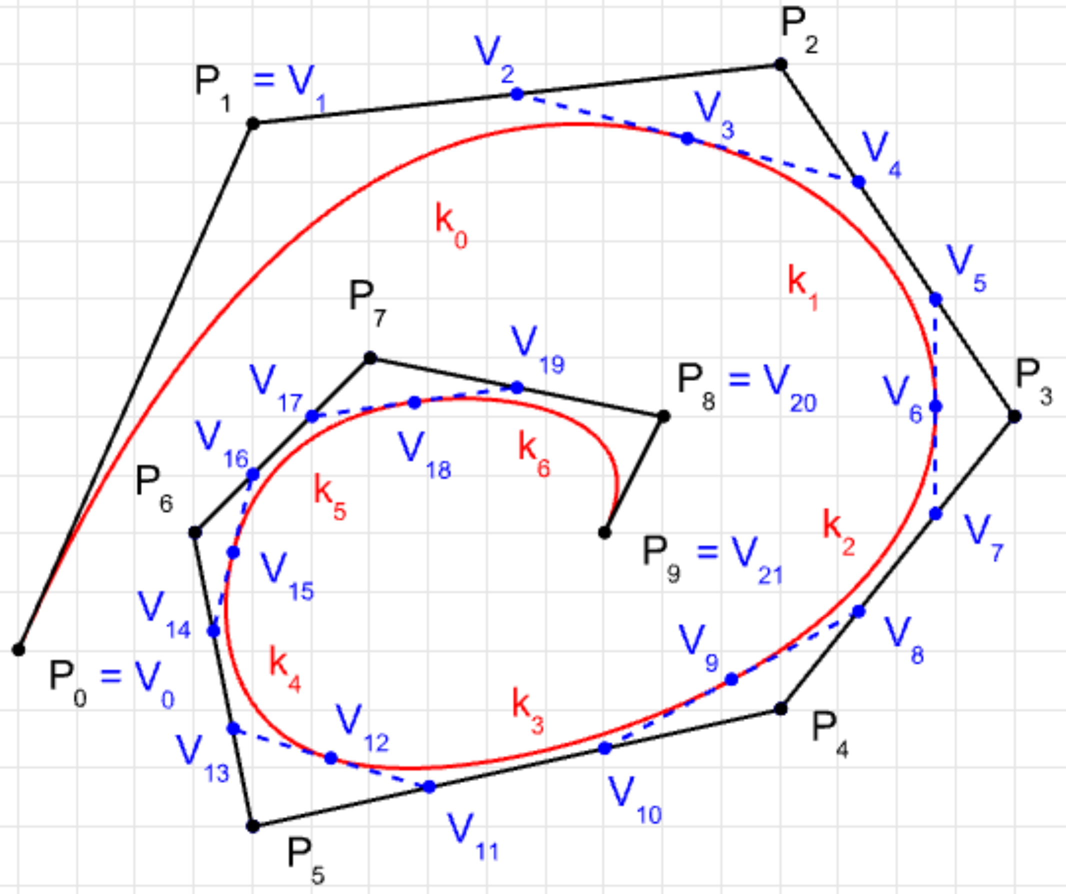
UKOTVENÁ KUBIKA - 6 BODŮ



UKOTVENÁ KUBIKA - 10 BODŮ



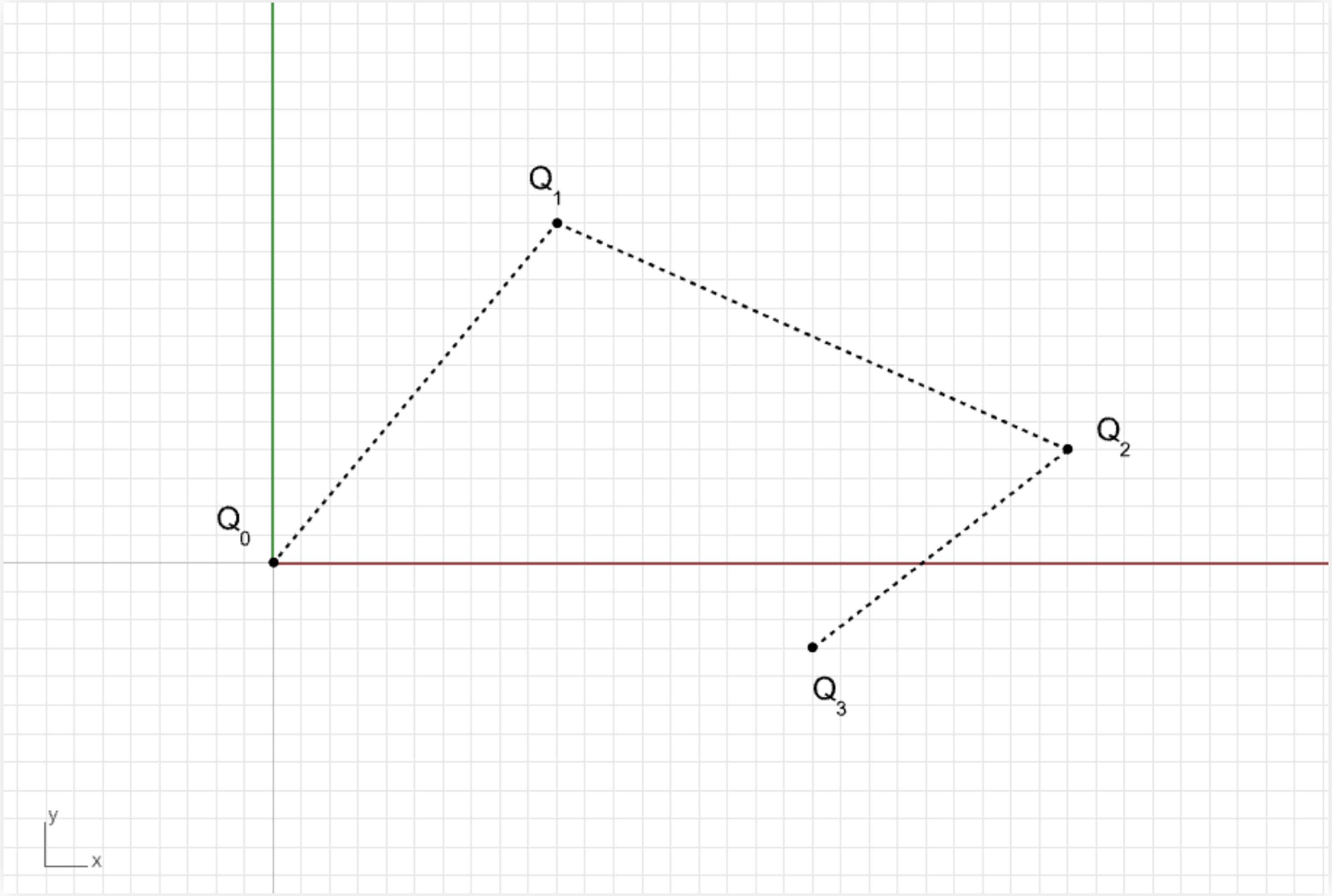
UKOTVENÁ KUBIKA - COONSŮV KUBICKÝ B-SPLINE



	Bézier	Coons
k_0	V_0 V_1 V_2 V_3	xxx
k_1	V_3 V_4 V_5 V_6	xxx
k_2	V_6 V_7 V_8 V_9	P_2 P_3 P_4 P_5
k_3	V_9 V_{10} V_{11} V_{12}	P_3 P_4 P_5 P_6
k_4	V_{12} V_{13} V_{14} V_{15}	P_4 P_5 P_6 P_7
k_5	V_{15} V_{16} V_{17} V_{18}	xxx
k_6	V_{18} V_{19} V_{20} V_{21}	xxx

- Fergusonova (Hermitova) kubika - jednosegmentová
- interpolace jedním polynomem (n definičních bodů $\Rightarrow$ stupeň křivky $n-1$)
- definiční body interpolované po částech C^2 spojitě napojenými kubikami

PŘÍKLAD - 4 DEFINIČNÍ BODY



každý segment mezi dvěma po sobě jdoucími Q body má být křivka 3. stupně

$\Downarrow$

4 neznámé koeficienty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pro rovnici segmentu ve tvaru

$$\mathscr{P}(t) = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta$$

$\Downarrow$

4 body $\rightarrow$ 3 segmenty $\rightarrow$ 12 neznámých

$\Downarrow$

$$\mathscr{P}_0(0) = Q_0, \mathscr{P}_0(1) = Q_1 = \mathscr{P}_1(0), \mathscr{P}_1(1) = Q_2 = \mathscr{P}_2(0), \mathscr{P}_2(1) = Q_3$$
$$\mathscr{P}_0'(1) = \mathscr{P}_1'(0), \mathscr{P}_1'(1) = \mathscr{P}_2'(0)$$
$$\mathscr{P}_0''(1) = \mathscr{P}_1''(0), \mathscr{P}_1''(1) = \mathscr{P}_2''(0)$$

$\Downarrow$

10 rovnic pro 12 neznámých

$\Downarrow$

dodat další 2 (okrajové) podmínky

(např.$\mathscr{P}_0''(0) = 0 = \mathscr{P}_2''(1)$)

SOUSTAVA ROVNIC PRO URČENÍ $\mathscr{P}_i(t)$

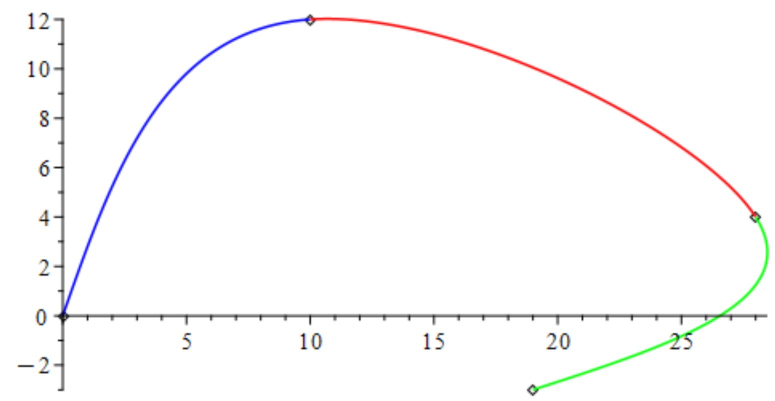
$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
\alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \\ \delta_0 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \delta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \\ \delta_2
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
Q_0 \\ Q_1 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{pmatrix}
$$

ROVNICE + VYKRESLENÍ (MAPLE)

$$p0 := \left[\frac{59}{15}t^3 + \frac{91}{15}t, -\frac{27}{5}t^3 + \frac{87}{5}t\right]$$

$$p1 := \left[-\frac{35}{3}t^3 + \frac{59}{5}t^2 + \frac{268}{15}t + 10, 7t^3 - \frac{81}{5}t^2 + \frac{6}{5}t + 12\right]$$

$$p2 := \left[\frac{116}{15}t^3 - \frac{116}{5}t^2 + \frac{97}{15}t + 28, -\frac{8}{5}t^3 + \frac{24}{5}t^2 - \frac{51}{5}t + 4\right]$$



soustava rovnic pro určení dvou vnitřních řídicích bodů každého segmentu

$$\Downarrow$$

3 Bézierovy kubiky $\rightarrow$ 6 neznámých bodů $N_i, i = 0, \ldots, 5$

$$\Downarrow$$

C^1 napojení Bézierových kubik ve vnitřních definičních bodech Q_1 a $Q_2 \rightarrow$

$$N_1 + N_2 = 2Q_1, N_3 + N_4 = 2Q_2$$

C^2 napojení Bézierových kubik ve vnitřních definičních bodech Q_1 a $Q_2 \rightarrow$

$$-N_0 + 4N_1 + N_3 = 4Q_1, -N_2 + 4N_3 + N_5 = 4Q_2$$

$$\Downarrow$$

4 rovnice pro 6 neznámých

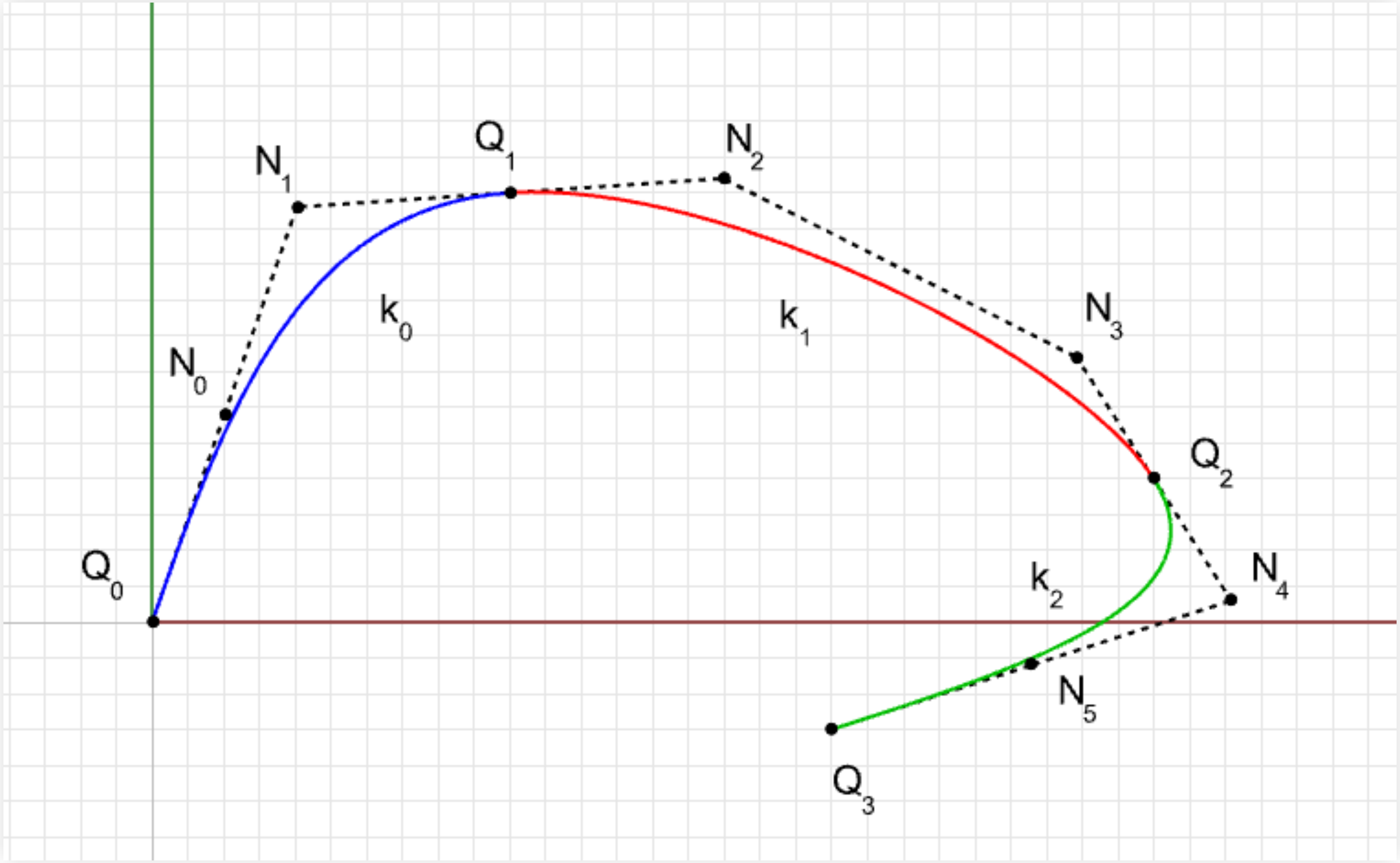
$$\Downarrow$$

dodat 2 okrajové podmínky (např. nulový vektor druhé derivace v bodech Q_0 a Q_3)

SOUSTAVA ROVNIC PRO URČENÍ BODŮ N_i

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Q_1 \\ 2Q_2 \\ 4Q_1 \\ 4Q_2 \\ Q_0 \\ Q_3 \end{pmatrix}$$

SEGMENTY JAKO BÉZIEROVY KUBIKY



soustava rovnic pro určení vnitřních tečných vektorů

$$\Downarrow$$

3 Fergusonovy kubiky $\rightarrow$ 6 neznámých vektorů $\vec{a}_i, \vec{b}_i, i = 0, \ldots, 2$

$$\Downarrow$$

C^1 napojení Fergusonových kubik ve vnitřních definičních bodech Q_1 a $Q_2 \rightarrow$

$$\vec{b}_0 = \vec{a}_1, \vec{b}_1 = \vec{a}_2$$

C^2 napojení Fergusonových kubik ve vnitřních definičních bodech Q_1 a $Q_2 \rightarrow$

$$\vec{a}_0 + 2\vec{b}_0 + 2\vec{a}_1 + \vec{b}_1 = 3Q_2 - 3Q_0, \vec{a}_1 + 2\vec{b}_1 + 2\vec{a}_2 + \vec{b}_2 = 3Q_3 - 3Q_1$$

$$\Downarrow$$

4 rovnice pro 6 neznámých

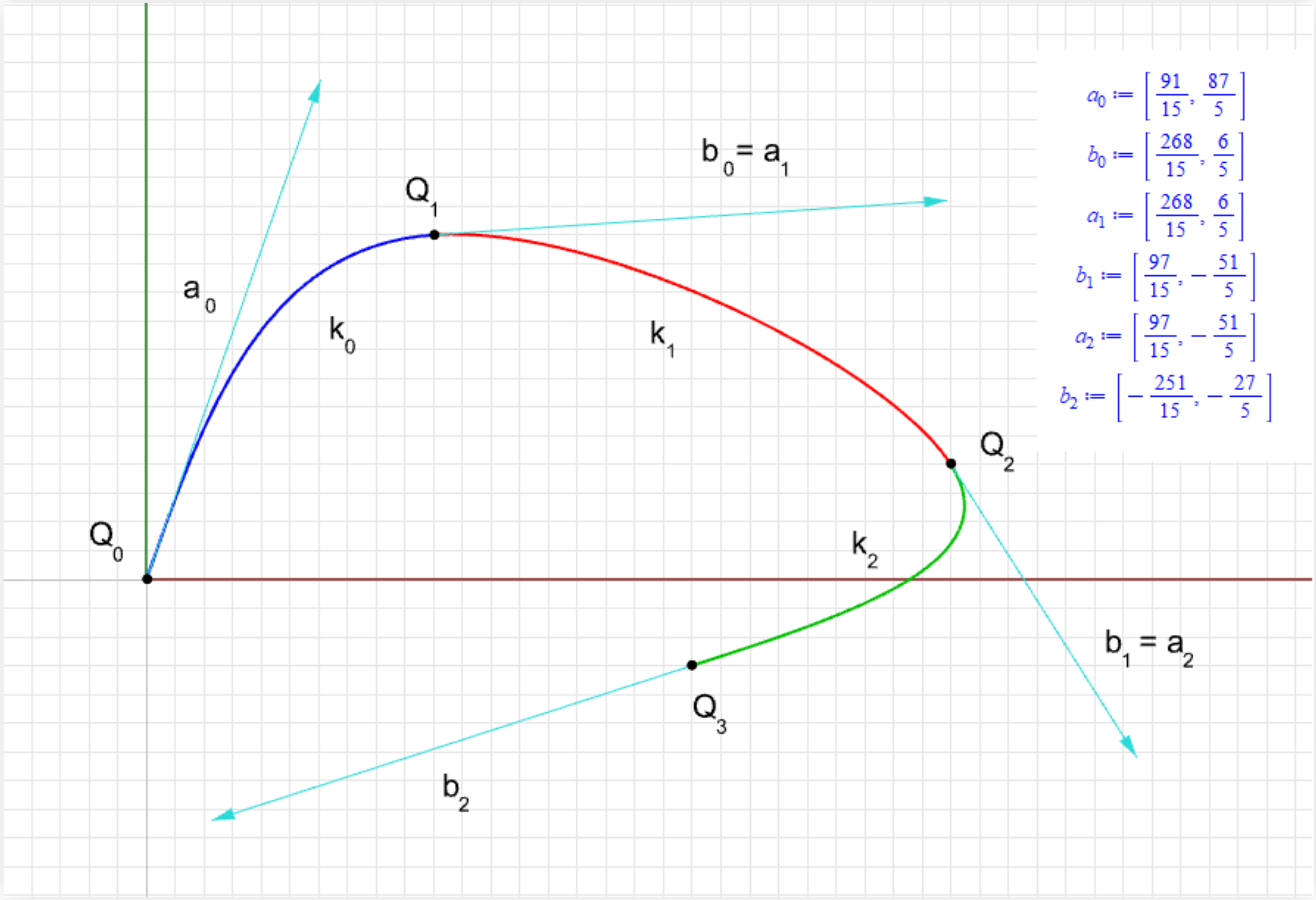
$$\Downarrow$$

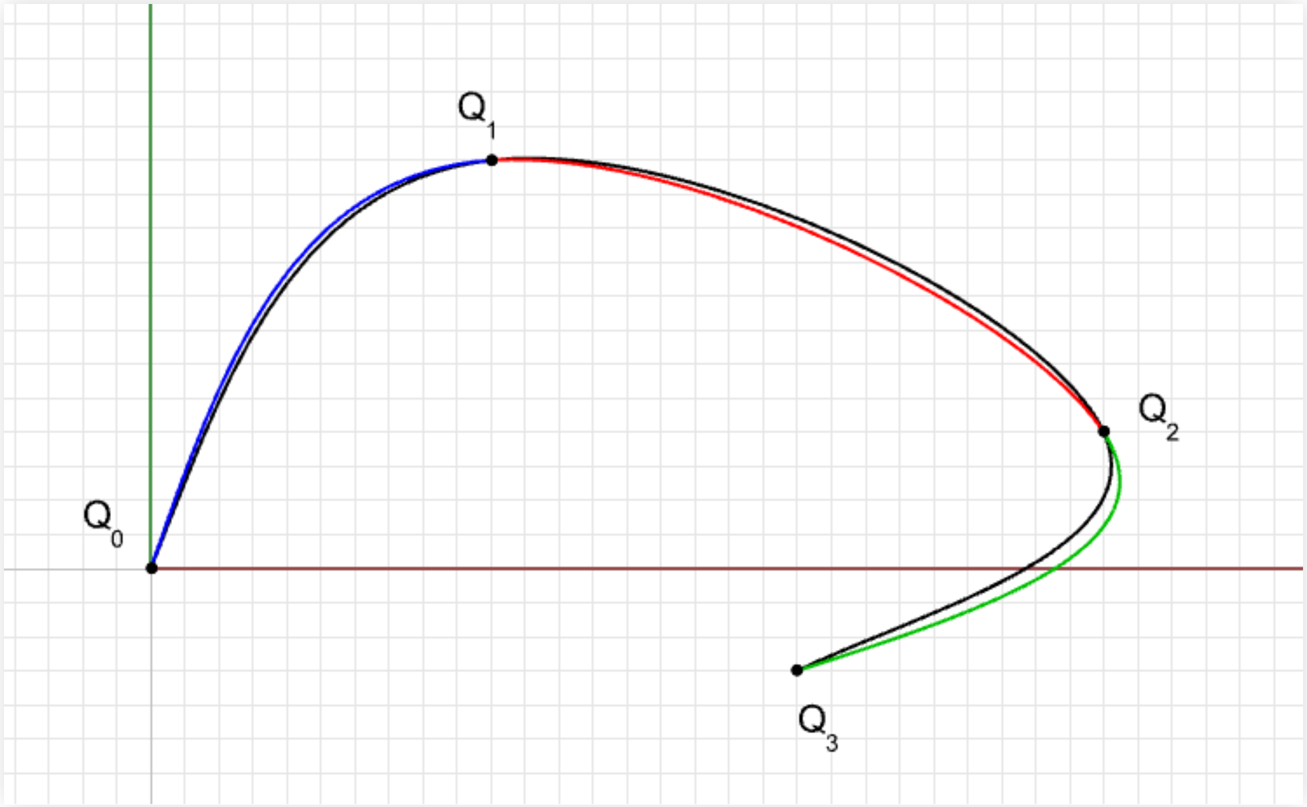
dodat 2 okrajové podmínky (např. nulový vektor druhé derivace v bodech Q_0 a Q_3)

SOUSTAVA ROVNIC PRO URČENÍ VEKTORŮ $\vec{a}_i, \vec{b}_i$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{a}_0 \\ \vec{b}_0 \\ \vec{a}_1 \\ \vec{b}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3Q_2 - 3Q_0 \\ 3Q_3 - 3Q_1 \\ -3Q_0 + 3Q_1 \\ -3Q_2 + 3Q_3 \end{pmatrix}$$

SEGMENTY JAKO FERGUSONOVY KUBIKY




Q_1
Q_2
Q_0
Q_3

PŘÍŠTĚ: PLOCHY