POČÍTAČOVÁ GRAFIKA 2023/24

PLOCHY

PLOCHA

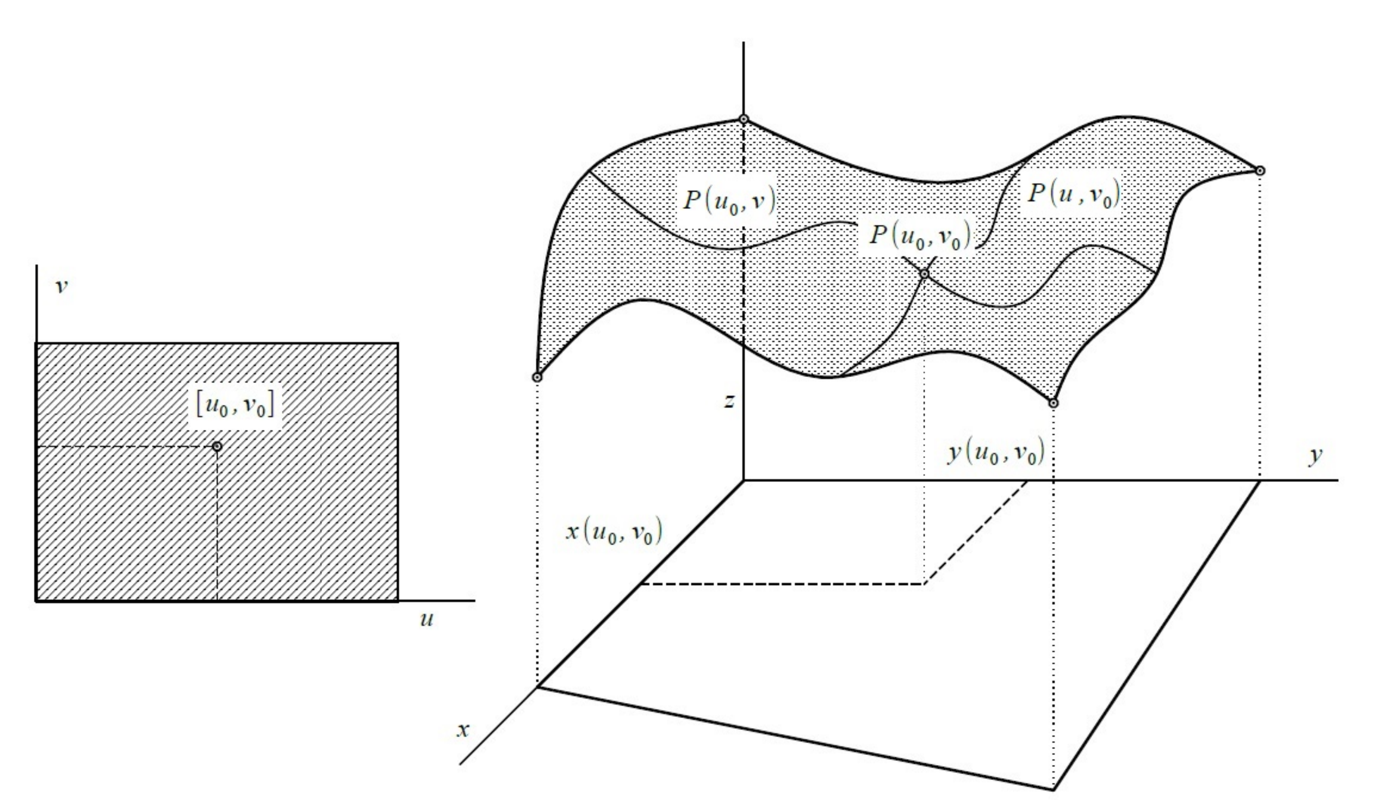
každá souvislá podmnožina $\mathbb{E}_3$, která je spojitým obrazem souvislé oblasti $I \subset \mathbb{E}_2$.

- vektorová rovnice plochy
  $P(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ (u,v) \in I$

- plát $\iff I = [a,b] \times [c,d]$
- plát s uniformní parametrizací $\iff I = [0,1]^2$

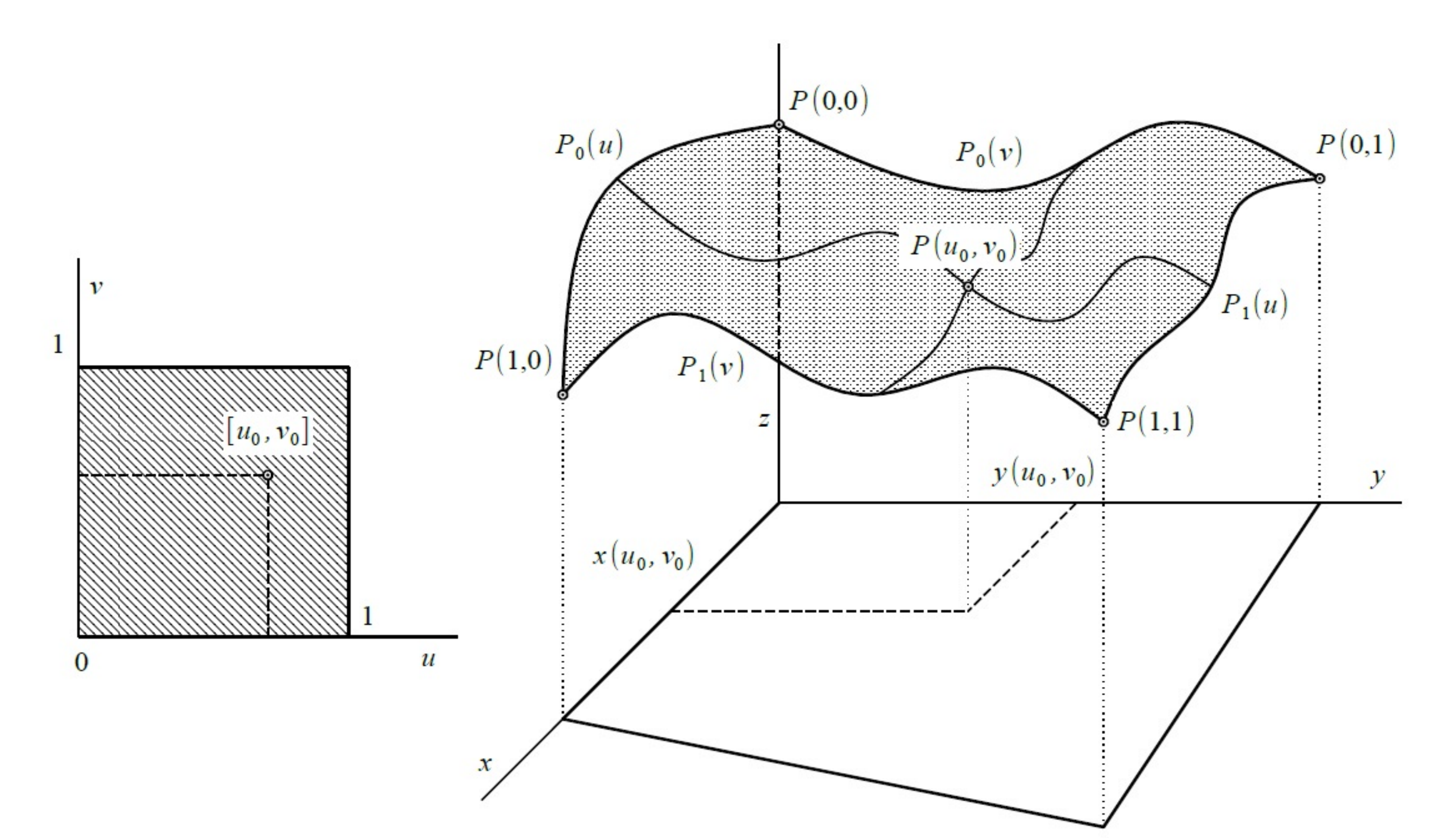
PLÁT

- parametrické (křivočaré) souřadnice (u_0, v_0) bodu plochy $P(u_0, v_0)$
- parametrická u-křivka plochy
  $P(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)) = P_{v_0}(u), u \in [a, b]$
- parametrická v-křivka plochy $P(u_0, v) = P_{u_0}(v), v \in [c, d]$



PLÁT S UNIFORMNÍ PARAMETRIZACÍ

- rohy plátu $P_{0,0} = P(0,0), P_{0,1} = P(0,1), P_{1,0} = P(1,0), P_{1,1} = P(1,1)$
- okrajové křivky plátu $P_0(u), P_1(u), P_0(v), P_1(v)$



PLOCHA

tečné vektory

$$P^u(u,v) = \frac{\partial P(u,v)}{\partial u} = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\right)$$

$$P^v(u,v) = \frac{\partial P(u,v)}{\partial v} = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\right)$$

tečná rovina a normála

$$\vec{n}(u,v) = P^u(u,v) \times P^v(u,v)$$

vektor zkrutu

$$P^{uv}(u,v) = \frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 P(u,v)}{\partial v \partial u}$$

BÉZIEROVA PLOCHA

aproximační plocha

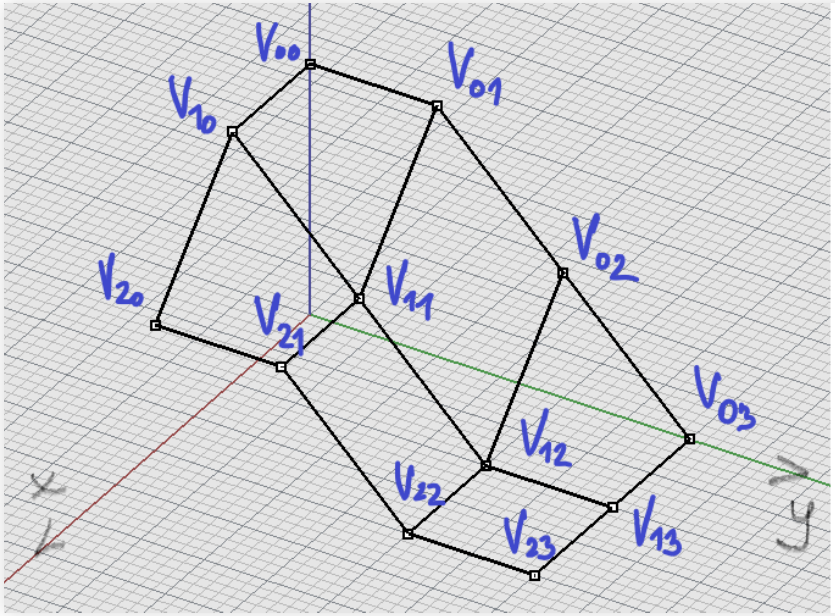
Dáno: mapa plátu

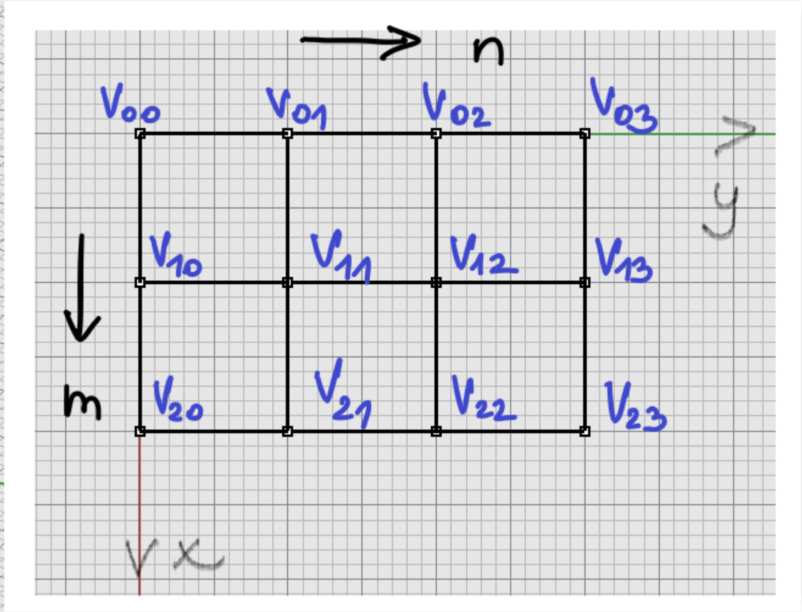
$$M = \begin{pmatrix} V_{00} & V_{01} & \dots & V_{0n} \\ V_{10} & V_{11} & \dots & V_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{m0} & V_{m1} & \dots & V_{mn} \end{pmatrix}$$

$(m+1) \times (n+1)$ bodů

BÉZIEROVA PLOCHA

síť řídících bodů, mapa plátu





BÉZIEROVA PLOCHA

Vektorová rovnice:

$$P(u,v) = \mathscr{B}(u) \cdot M \cdot \mathscr{B}(v)^T;\ (u,v) \in [0,1]^2$$

kde

$$\mathscr{B}(u) = (B_{0m}(u), B_{1m}(u), \ldots, B_{mm}(u))$$
$$\mathscr{B}(v) = (B_{0n}(v), B_{1n}(v), \ldots, B_{nn}(v))$$

jsou Bernsteinovy polynomy

Je dána mapa M plátu:

$$M = \begin{pmatrix} (0,0,2) & (0,1,1) & (0,2,1) & (0,3,0) \\ (1,0,2) & (1,1,1) & (1,2,0) & (1,3,0) \\ (2,0,1) & (2,1,1) & (2,2,0) & (2,3,0) \end{pmatrix}.$$

Určete:

- vektorovou rovnici plátu
- rovnice tečných vektorů parametrických křivek
- rovnici vektorů zkrutu

Načrtněte okrajové křivky plátu.

vektorová rovnice plátu:

$$P(u,v) = \mathscr{B}(u) \cdot \begin{pmatrix} (0,0,2) & (0,1,1) & (0,2,1) & (0,3,0) \\ (1,0,2) & (1,1,1) & (1,2,0) & (1,3,0) \\ (2,0,1) & (2,1,1) & (2,2,0) & (2,3,0) \end{pmatrix} \cdot \mathscr{B}(v)^T$$

kde $\mathscr{B}(u)$ a $\mathscr{B}(v)$ obsahují Bernsteinovy polynomy příslušného stupně

$$\Downarrow$$

$$\mathscr{B}(u) = (B_{02}(u), B_{12}(u), B_{22}(u))$$
$$\mathscr{B}(v) = (B_{03}(v), B_{13}(v), B_{23}(v), B_{33}(v))$$

Stupně Bernsteinových polynomů souvisí s maticí řídicích bodů (zde typ 3x4) a je od nich odvozen i název konkrétní plochy - v tomto případě Bézierova **kvadraticko-kubická** plocha vektorová rovnice plátu:

$$P(u,v) = (2u, 3v, -2u^2v^3 + 6uv^3 + 3u^2v - 6uv^2 - 2v^3 - u^2 + 3v^2 - 3v + 2);\ (u,$$

rovnice tečných vektorů parametrických křivek:

$$P^u(u,v) = (2, 0, -4uv^3 + 6v^3 + 6uv - 6v^2 - 2u)$$
$$P^v(u,v) = (0, 3, -6u^2v^2 + 18uv^2 + 3u^2 - 12uv - 6v^2 + 6v - 3)$$

rovnice vektorů zkrutu:

$$P^{uv}(u,v) = (0, 0, -12uv^2 + 18v^2 + 6u - 12v)$$

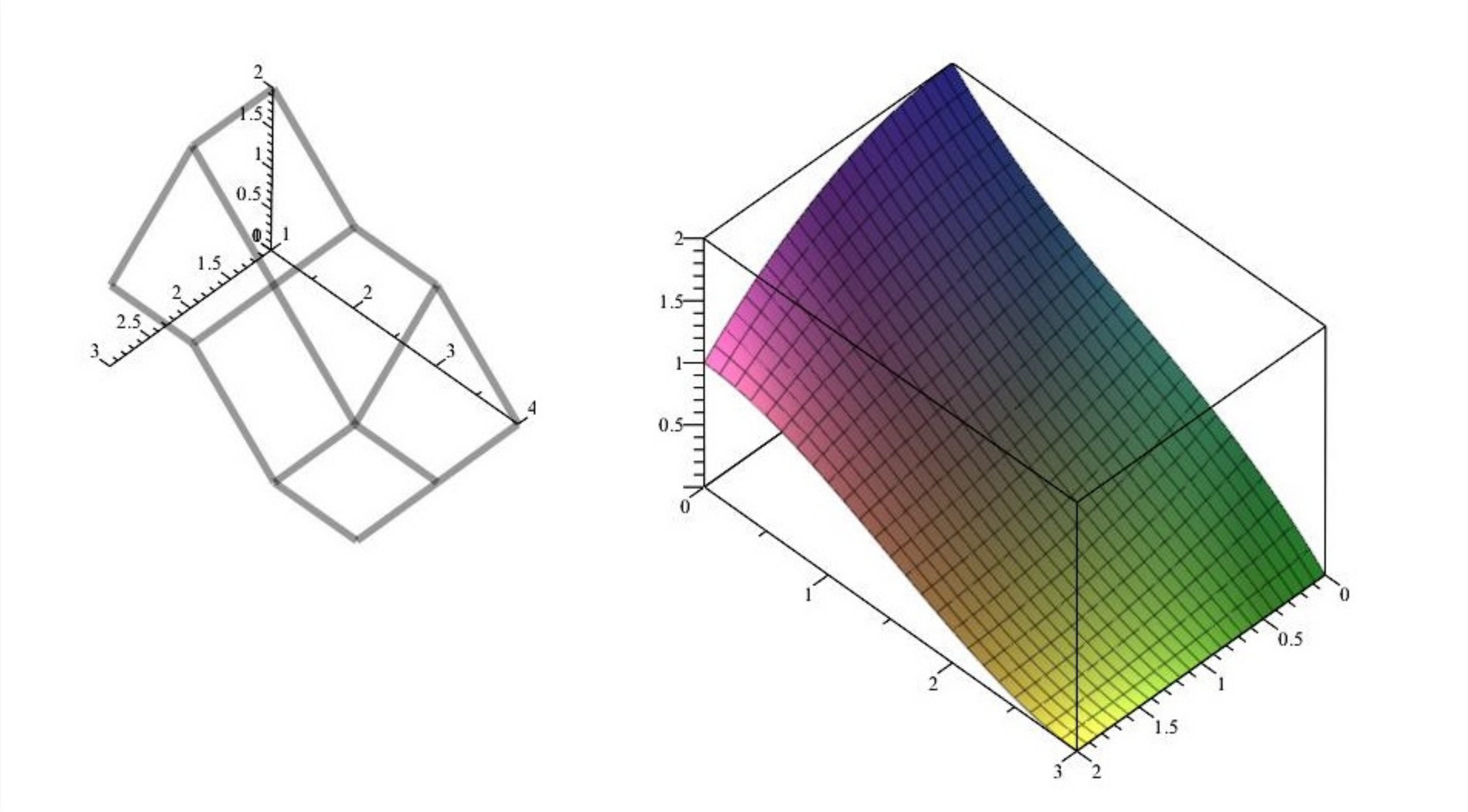
tečné vektory v rohových bodech:

$$
\begin{aligned}
P^u(0,0) &= (2,0,0) \qquad & P^v(0,0) &= (0,3,-3)\\
P^u(0,1) &= (2,0,0) \qquad & P^v(0,1) &= (0,3,-3)\\
P^u(1,0) &= (2,0,-2) \qquad & P^v(1,0) &= (0,3,0)\\
P^u(1,1) &= (2,0,0) \qquad & P^v(1,1) &= (0,3,0)
\end{aligned}
$$

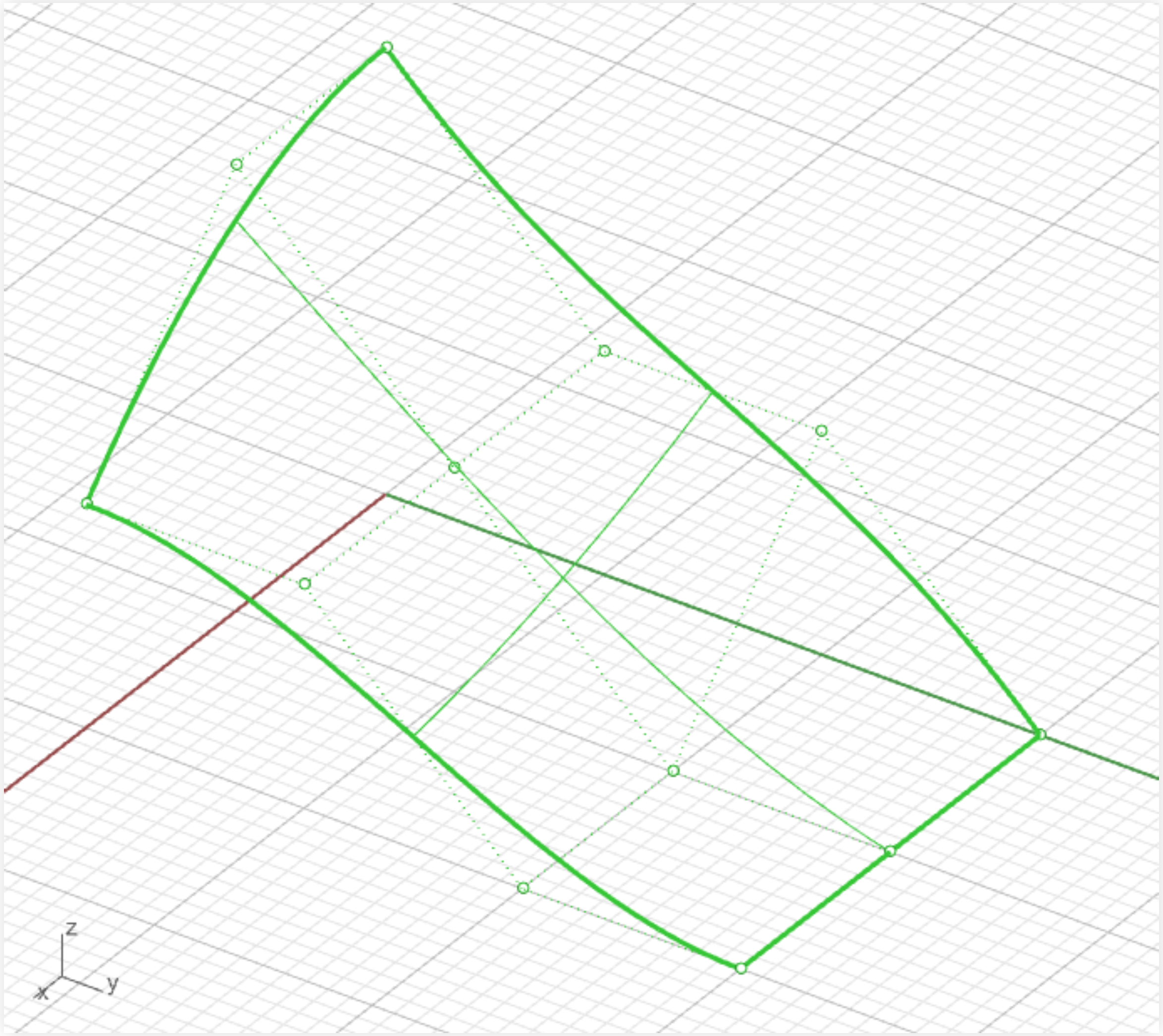
vektory zkrutu v rohových bodech:

$$
\begin{aligned}
P^{uv}(0,0) = (0,0,0) = P^{uv}(1,1)\\
P^{uv}(0,1) = (0,0,6) = P^{uv}(1,0)
\end{aligned}
$$

síť řídících bodů + plocha (Maple)



síť řídících bodů a okrajové křivky (Rhino)

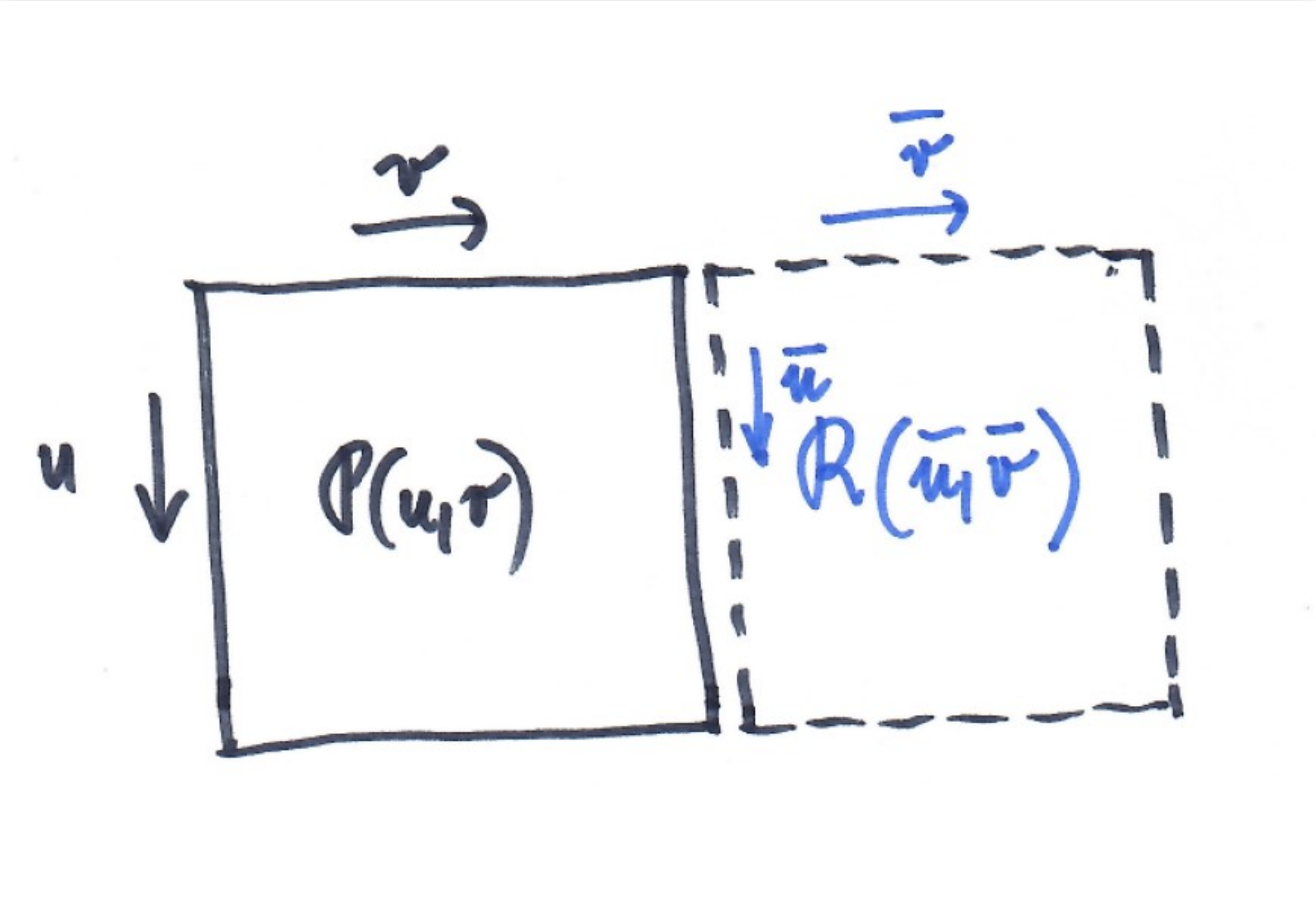


- interpoluje rohy řídící sítě
- okraje plátu jsou Bézierovy křivky
- tečné vektory v rozích plátu jsou násobky krajních ramen řídících polygonů okrajových křivek
- vektor zkrutu v rohu plátu je určen řídícími body rohového oka sítě
- jestliže je rohové oko sítě rovnoběžník, je vektor zkrutu nulový

PLÁTOVÁNÍ

PLÁTOVÁNÍ

Uvažujme dva pláty $P(u,v); (u,v) \in [0,1]^2$ a $R(\bar{u},\bar{v}); (\bar{u},\bar{v}) \in [0,1]^2$.



PLÁTOVÁNÍ

spojitost plátů je definována pomocí spojitosti napojení podél okrajové křivky

C^0 spojitost $\Leftrightarrow$ společná okrajová křivka

C^1 spojitost $\Leftrightarrow$ C^0 + stejné příčné tečné vektory v bodech společné okrajové křivky

C^2 spojitost $\Leftrightarrow$ C^1 + stejné příčné vektory druhých derivací v bodech společné okrajové křivky
C^3 spojitost ...

PLÁTOVÁNÍ BÉZIEROVÝCH PLOCH

tady řešeno pouze napojení plátů stejného stupně!

$$M_P = \begin{pmatrix} V_{0,0} & \cdots & V_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{m,0} & \cdots & V_{m,n} \end{pmatrix}, M_R = \begin{pmatrix} U_{0,0} & \cdots & U_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ U_{m,0} & \cdots & U_{m,n} \end{pmatrix}$$

PLÁTOVÁNÍ BÉZIEROVÝCH PLOCH

C^n spojité napojení $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ podél u-okraje

$\Downarrow\Uparrow$

stejný sloupec + po řádcích splněny podmínky C^n spojitosti Bezierových v-křivek

C^n spojité napojení $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ podél v-okraje

$\Downarrow\Uparrow$

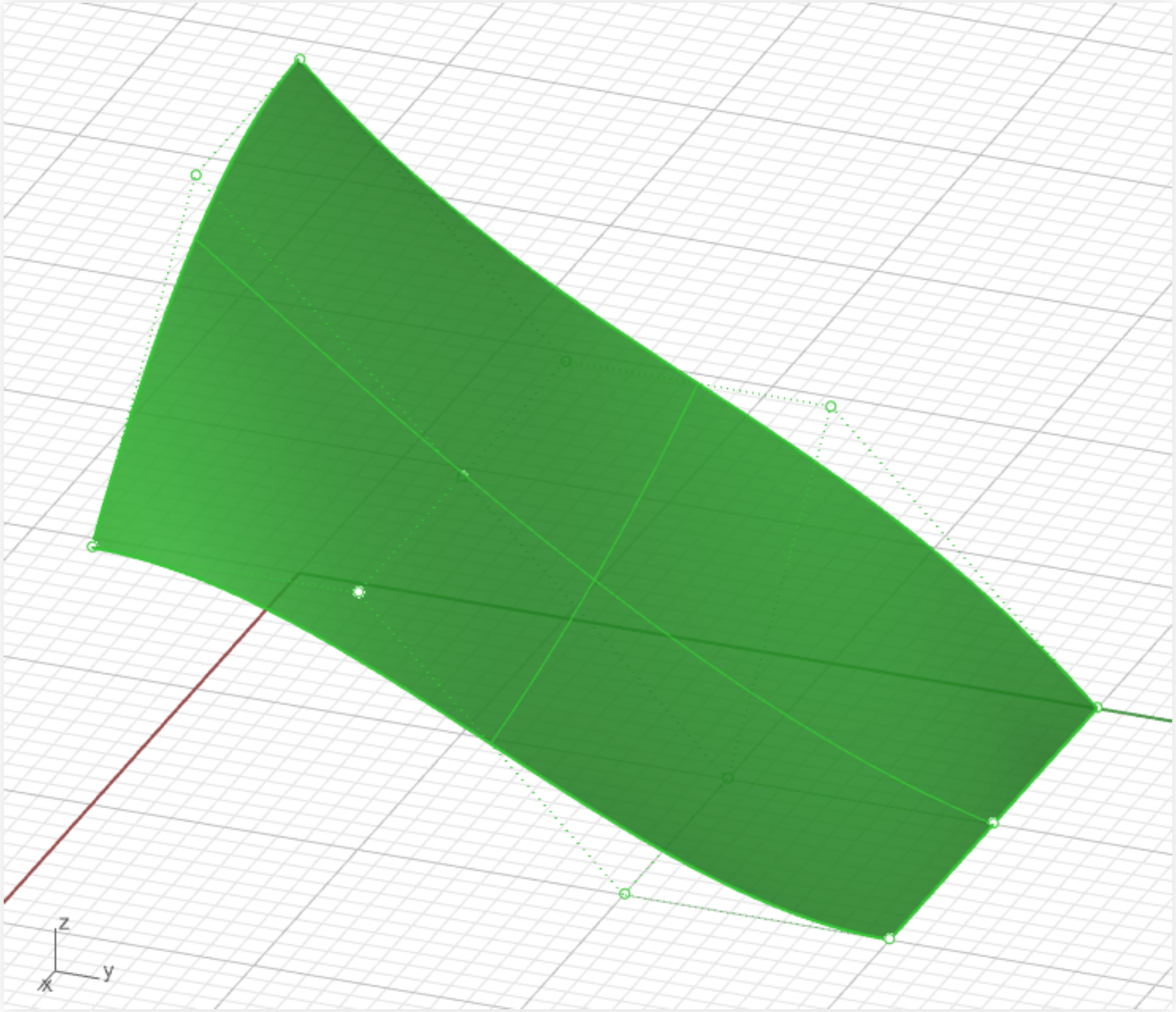
stejný řádek + po sloupcích splněny podmínky C^n spojitosti Bezierových u-křivek

Bézierova plocha P je dána mapou

$$M_P = \begin{pmatrix} (0,0,2) & (0,1,1) & (0,2,1) & (0,3,0) \\ (1,0,2) & (1,1,1) & (1,2,0) & (1,3,0) \\ (2,0,1) & (2,1,1) & (2,2,0) & (2,3,0) \end{pmatrix}.$$

Určete mapu M_R Bézierovy plochy R, která je napojena k ploše P podél okraje $P_0(u)$ se spojitostí C^0.
Určete mapu M_S Bézierovy plochy S, která je napojena k ploše P podél okraje $P_1(v)$ se spojitostí C^1.
Určete mapu M_T Bézierovy plochy T, která je napojena k ploše P podél okraje $P_1(u)$ se spojitostí C^2.
Všechny plochy jsou stejného typu, z-ové souřadnice bodů, které neovlivní danou spojitost volte nulové.

Plát P:



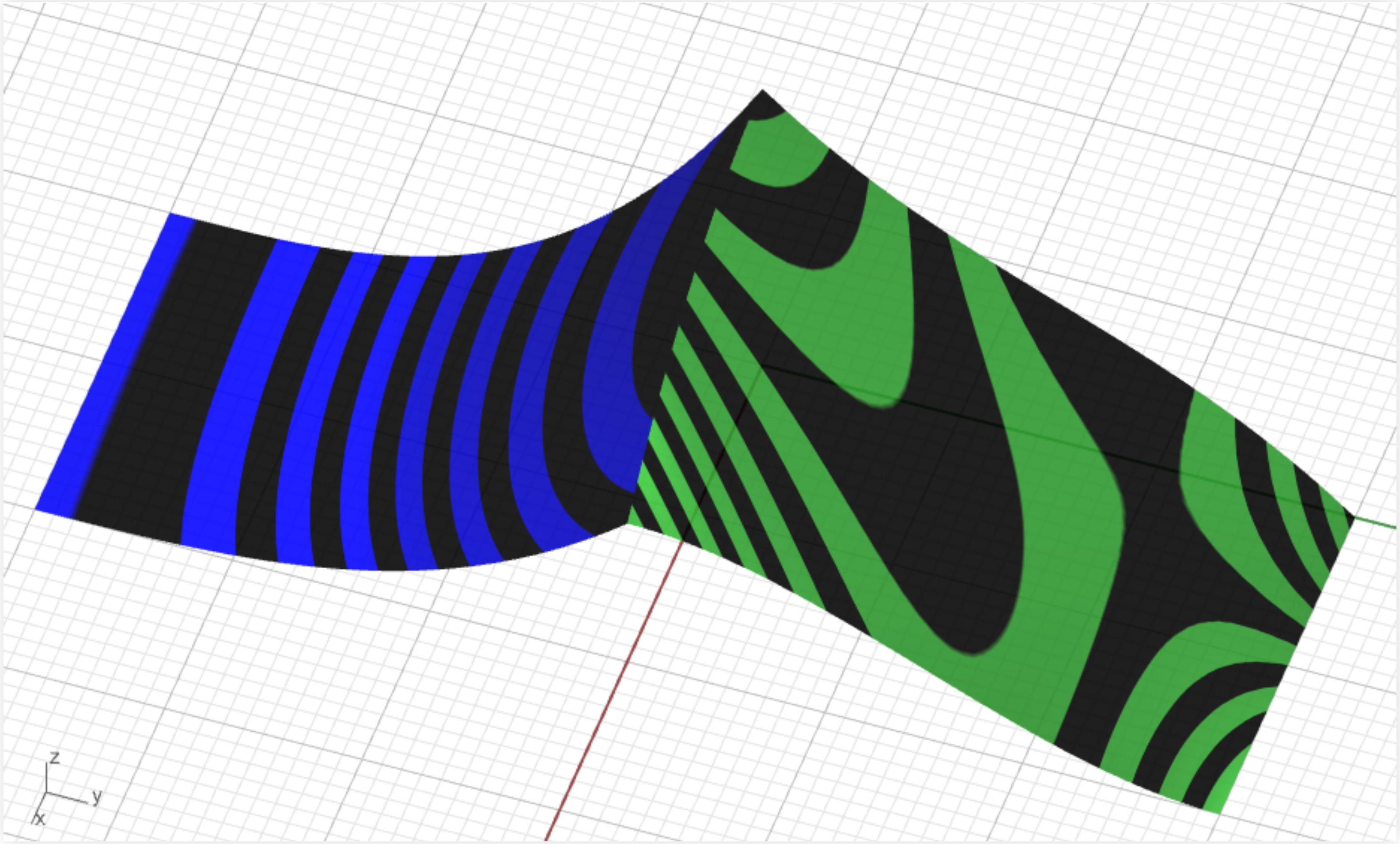
Plát R napojený podél $P_0(u)$ okraje, spojitost C^0:

$$
\begin{array}{cccccccc}
(0,-3,0) & (0,-2,0) & (0,-1,0) & (0,0,2) & | & (0,0,2) & \cdots & (0,3,0) \\
(1,-3,0) & (1,-2,0) & (1,-1,0) & (1,0,2) & | & (1,0,2) & & \vdots \\
(2,-3,0) & (2,-2,0) & (2,-1,0) & (2,0,1) & | & (2,0,1) & \cdots & (2,3,0)
\end{array}
$$

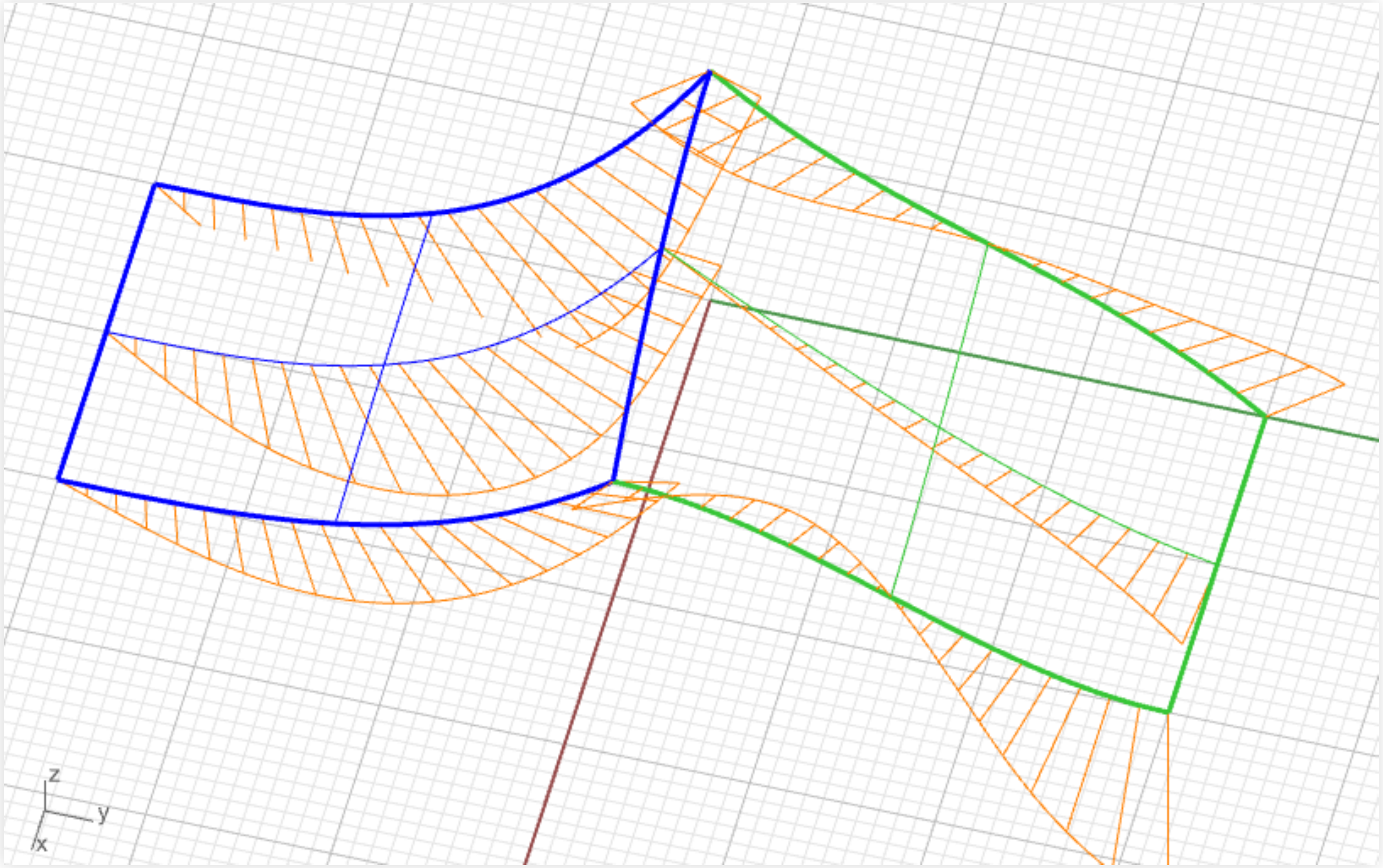
Mapa plátu R

$$M_R = \begin{pmatrix} (0,-3,0) & (0,-2,0) & (0,-1,0) & (0,0,2) \\ (1,-3,0) & (1,-2,0) & (1,-1,0) & (1,0,2) \\ (2,-3,0) & (2,-2,0) & (2,-1,0) & (2,0,1) \end{pmatrix}$$

Plát R napojený podél $P_0(u)$ okraje, spojitost C^0 - zebra



Plát R napojený podél $P_0(u)$ okraje, spojitost C^0 - grafy křivosti



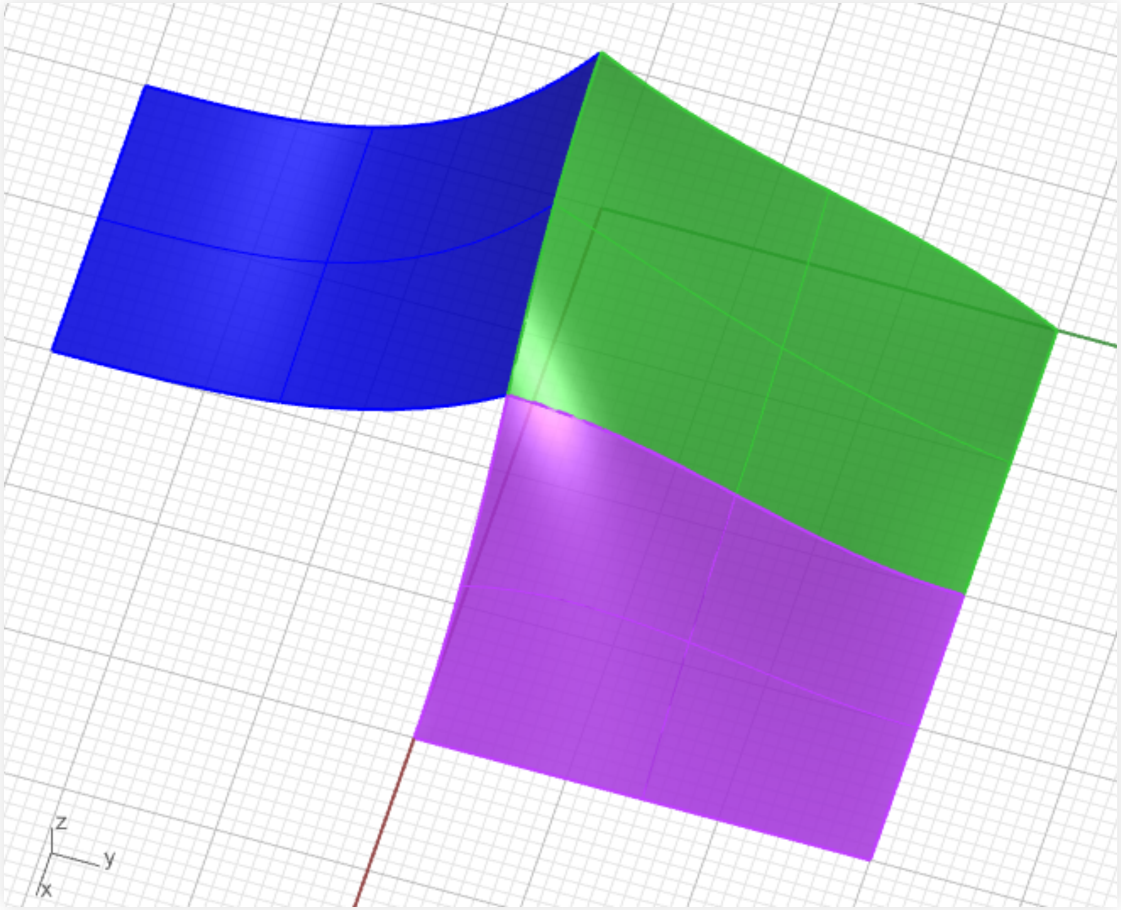
Plát S napojený podél $P_1(v)$ okraje, spojitost C^1

$$
\begin{array}{cccc}
(0,0,2) & (0,1,1) & (0,2,1) & (0,3,0) \\
(1,0,2) & (1,1,1) & (1,2,0) & (1,3,0) \\
(2,0,1) & (2,1,1) & (2,2,0) & (2,3,0) \\
---&---&---&--- \\
(2,0,1) & (2,1,1) & (2,2,0) & (2,3,0) \\
(3,0,0) & (3,1,1) & (3,2,0) & (3,3,0) \\
(4,0,0) & (4,1,0) & (4,2,0) & (4,3,0)
\end{array}
$$

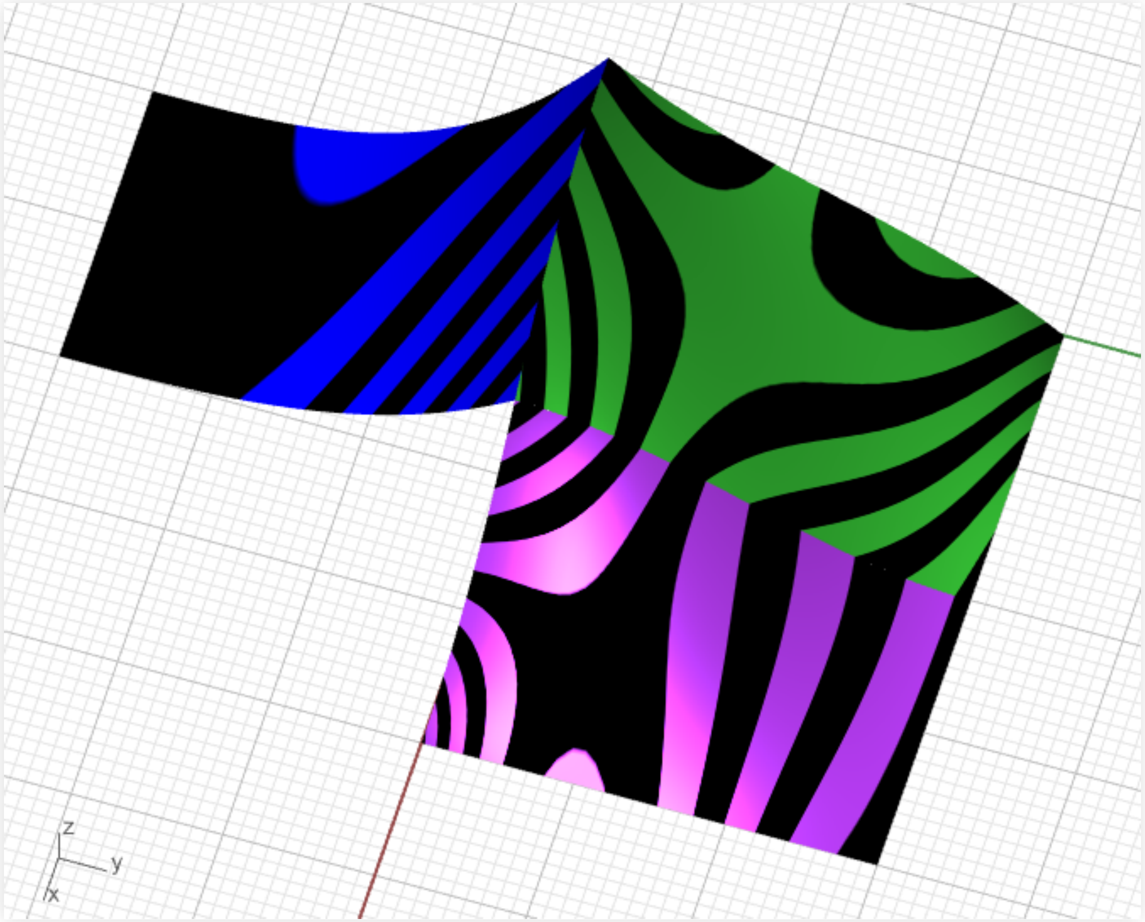
Mapa plátu S:

$$M_S = \begin{pmatrix} (2,0,1) & (2,1,1) & (2,2,0) & (2,3,0) \\ (3,0,0) & (3,1,1) & (3,2,0) & (3,3,0) \\ (4,0,0) & (4,1,0) & (4,2,0) & (4,3,0) \end{pmatrix}$$

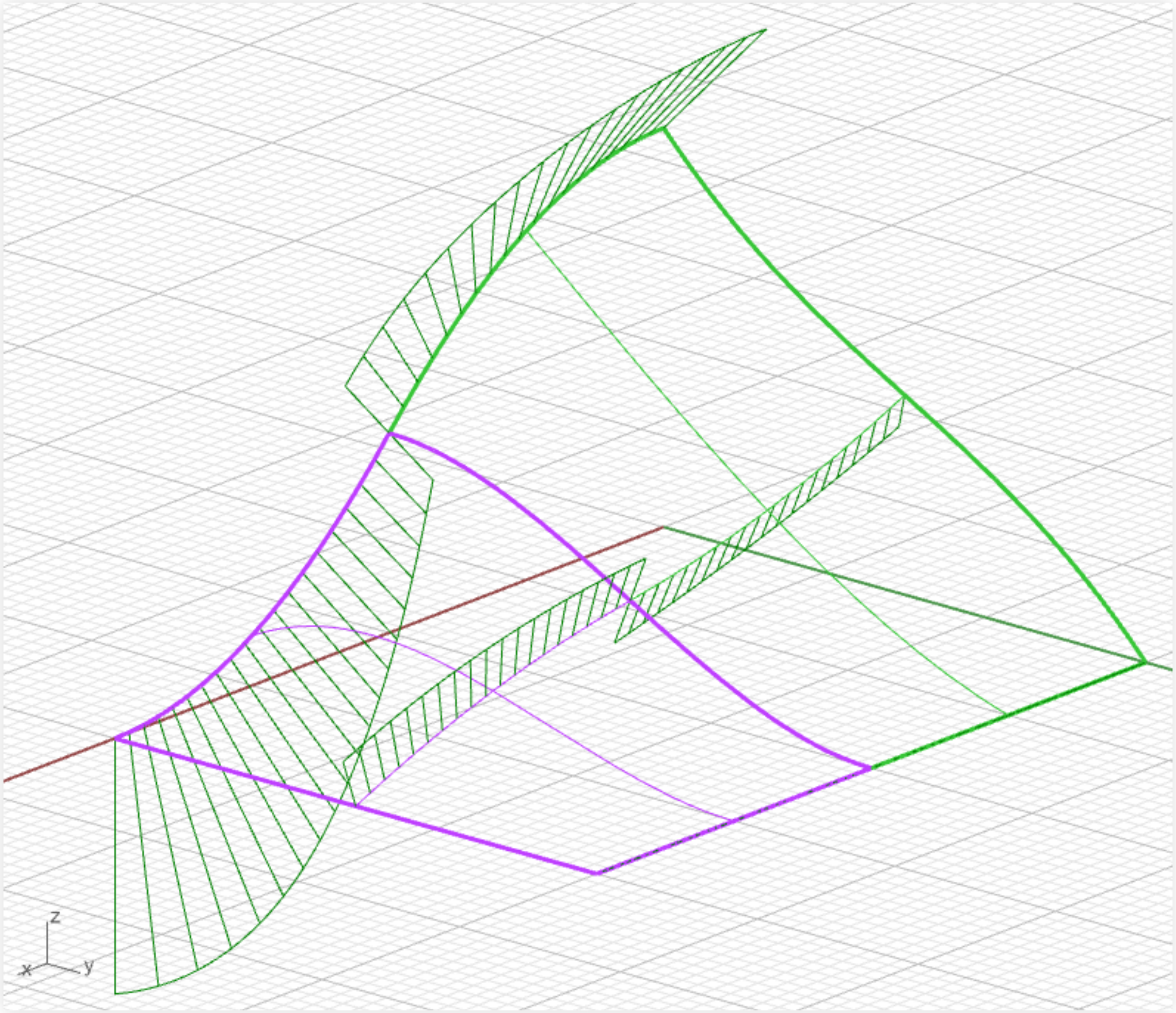
Plát S napojený podél $P_1(v)$ okraje, spojitost C^1



Plát S napojený podél $P_1(v)$ okraje, spojitost C^1 - zebra



Plát S napojený podél $P_1(v)$ okraje, spojitost C^1 - grafy křivosti



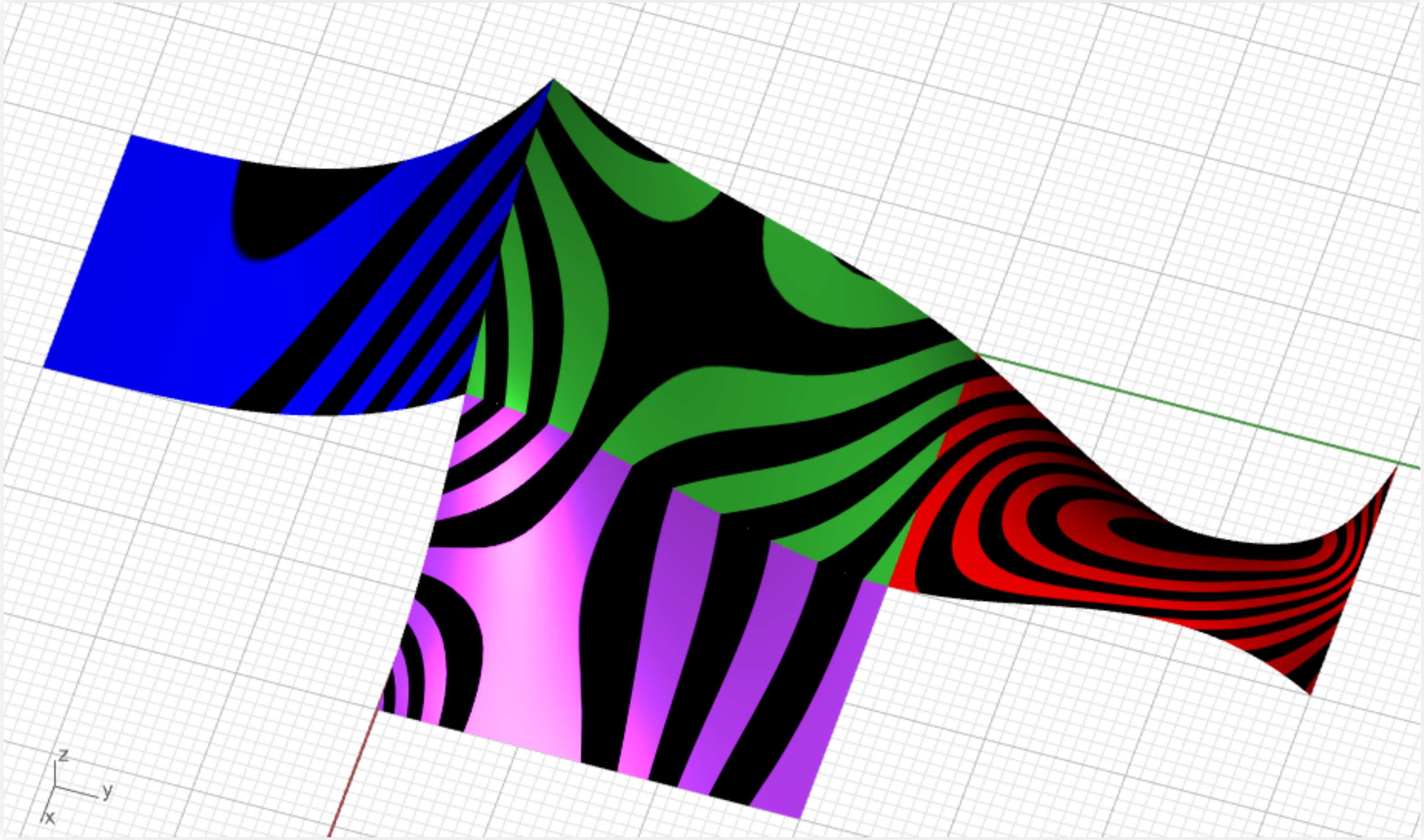
Plát T napojený podél $P_1(u)$ okraje, spojitost C^2:

$$
\begin{array}{cccc|cccc}
(0,0,2) & (0,1,1) & (0,2,1) & (0,3,0) & (0,3,0) & (0,4,-1) & (0,5,-3) & (0,6,(\\
(1,0,2) & (1,1,1) & (1,2,0) & (1,3,0) & (1,3,0) & (1,4,0) & (1,5,1) & (1,6,(\\
(2,0,1) & (2,1,1) & (2,2,0) & (2,3,0) & (2,3,0) & (2,4,0) & (2,5,1) & (2,6,(
\end{array}
$$

Mapa plátu T

$$M_T = \begin{pmatrix} (0,3,0) & (0,4,-1) & (0,5,-3) & (0,6,0) \\ (1,3,0) & (1,4,0) & (1,5,1) & (1,6,0) \\ (2,3,0) & (2,4,0) & (2,5,1) & (2,6,0) \end{pmatrix}$$

Plát T napojený podél $P_1(u)$ okraje, spojitost C^2 - zebra



Plát T napojený podél $P_1(u)$ okraje, spojitost C^2 - grafy křivosti