

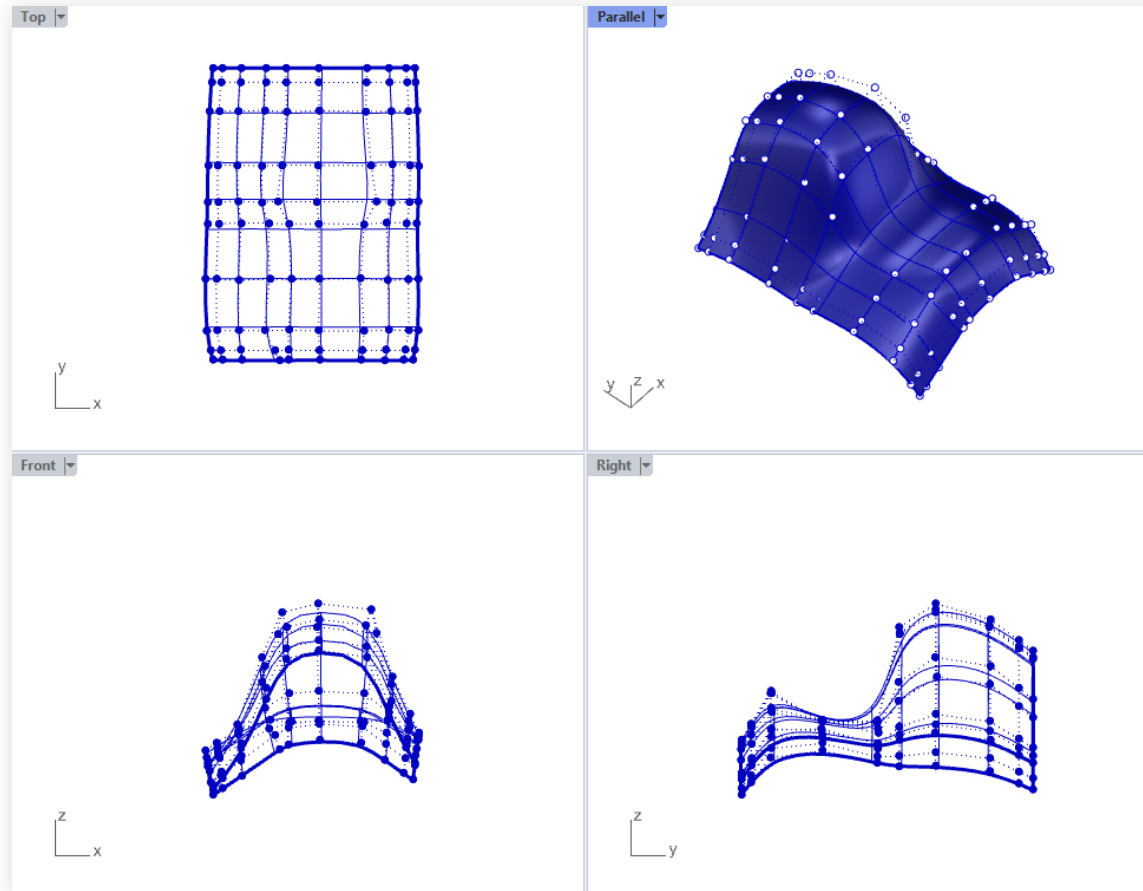
POČÍTAČOVÁ GRAFIKA 2023/24

PLOCHY

UNIFORMNÍ UKOTVENÁ BIKUBICKÁ B-SPLINE PLOCHA

- aproximační plocha - segmentovaná
- dána sítí řídicích bodů (minimálně 4x4)
- okraje jsou ukotvené kubiky
- jednotlivé segmenty jsou Bézierovy bikubické pláty (řídicí body z konstrukce segmentů řádkových a sloupcových ukotvených kubik)
- všechny segmenty jsou na sebe napojeny s C^2 spojitostí
- zobecněním těchto ploch jsou NeUniformní Racionální B-Spline plochy (NURBS)

UNIFORMNÍ UKOTVENÁ BIKUBICKÁ B-SPLINE PLOCHA



Je dán Bézierův bikubický plát $P(u, v)$ mapou M_P . Určete mapu M_R dalšího Bézierova bikubického plátu $R(s, t)$, který bude napojen na $P(u, v)$ podél křivky $P_1(u)$ se spojitostí C^2 (u bodů neovlivňujících spojitost volte z-souřadnici nulovou). Určete také řídicí body (= mapu plátu M_T) ukotvené bikubické (B-spline) plochy T , která je tvořena segmenty P a R .

$$M_P = \begin{pmatrix} (0, 0, 3) & (0, 1, 0) & (0, 2, 3) & (0, 3, 1) \\ (1, 0, 2) & (1, 1, 1) & (1, 2, 2) & (1, 3, 1) \\ (2, 0, 4) & (2, 1, 1) & (2, 2, 1) & (2, 3, 0) \\ (3, 0, 0) & (3, 1, 0) & (3, 2, 0) & (3, 3, 0) \end{pmatrix}$$

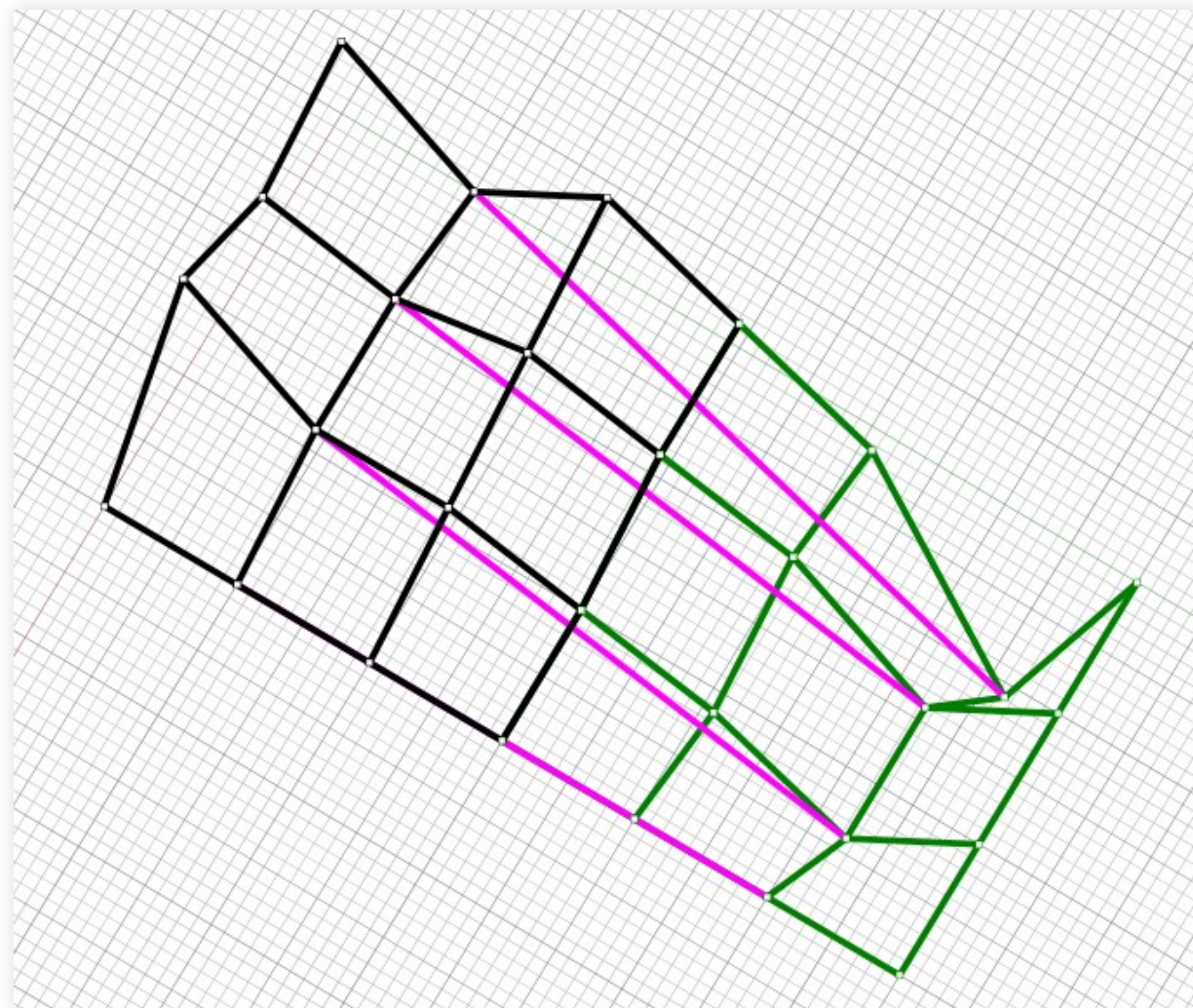
Podle podmínek C^0 , C^1 a C^2 spojitosti řádkových Béziových kubik doplnit z-souřadnice plátu R

$$M_{P_z} | M_{R_z} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 & -8 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

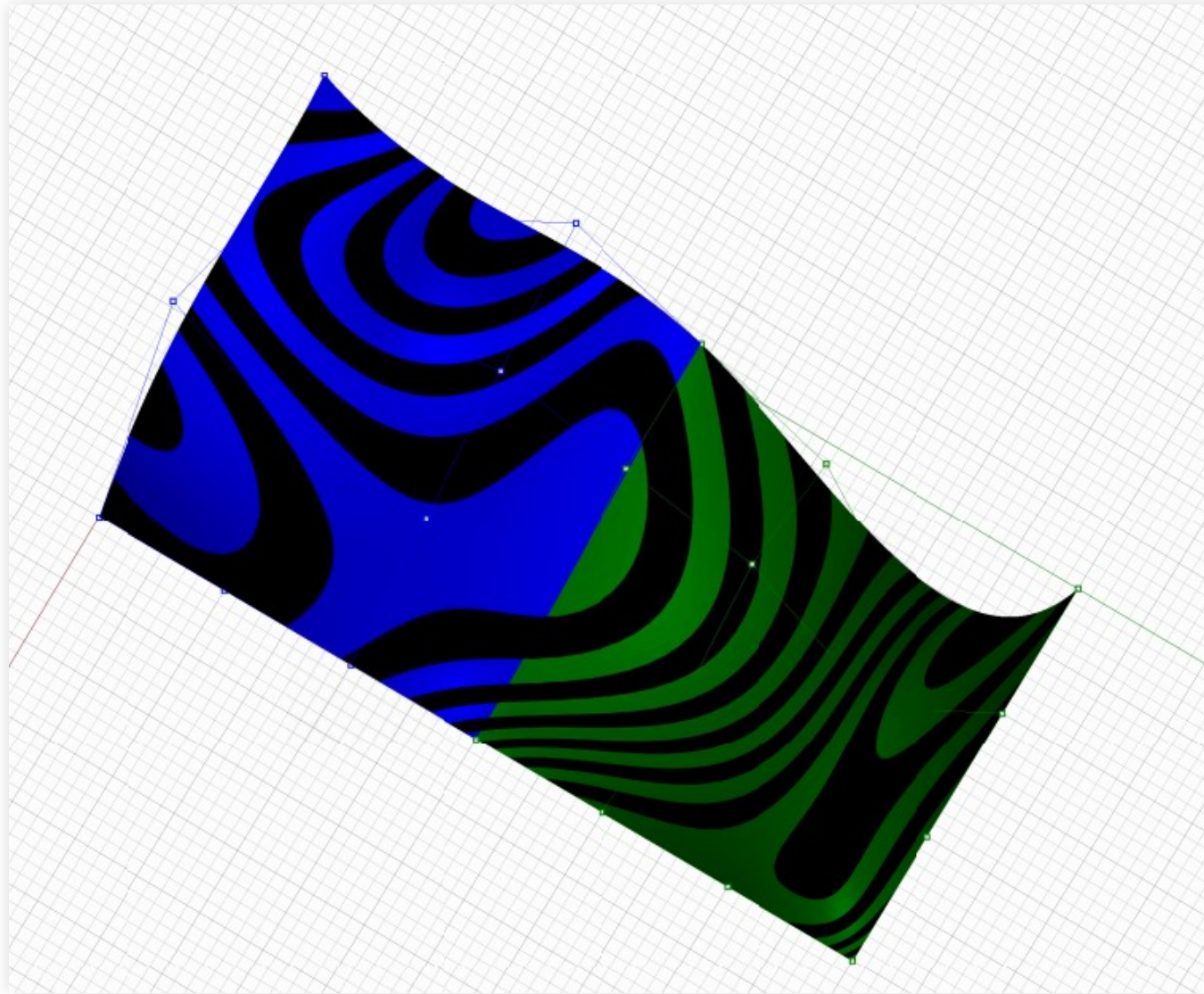
Mapa plátu R

$$M_R = \left(\begin{array}{cccc} (0, 3, 1) & (0, 4, -1) & (0, 5, -8) & (0, 6, 0) \\ (1, 3, 1) & (1, 4, 0) & (1, 5, -3) & (1, 6, 0) \\ (2, 3, 0) & (2, 4, -1) & (2, 5, -3) & (2, 6, 0) \\ (3, 3, 0) & (3, 4, 0) & (3, 5, 0) & (3, 6, 0) \end{array} \right)$$

Konstrukce bodů mapy M_R



Kontrola napojení plátů P a R zebřími pruhy



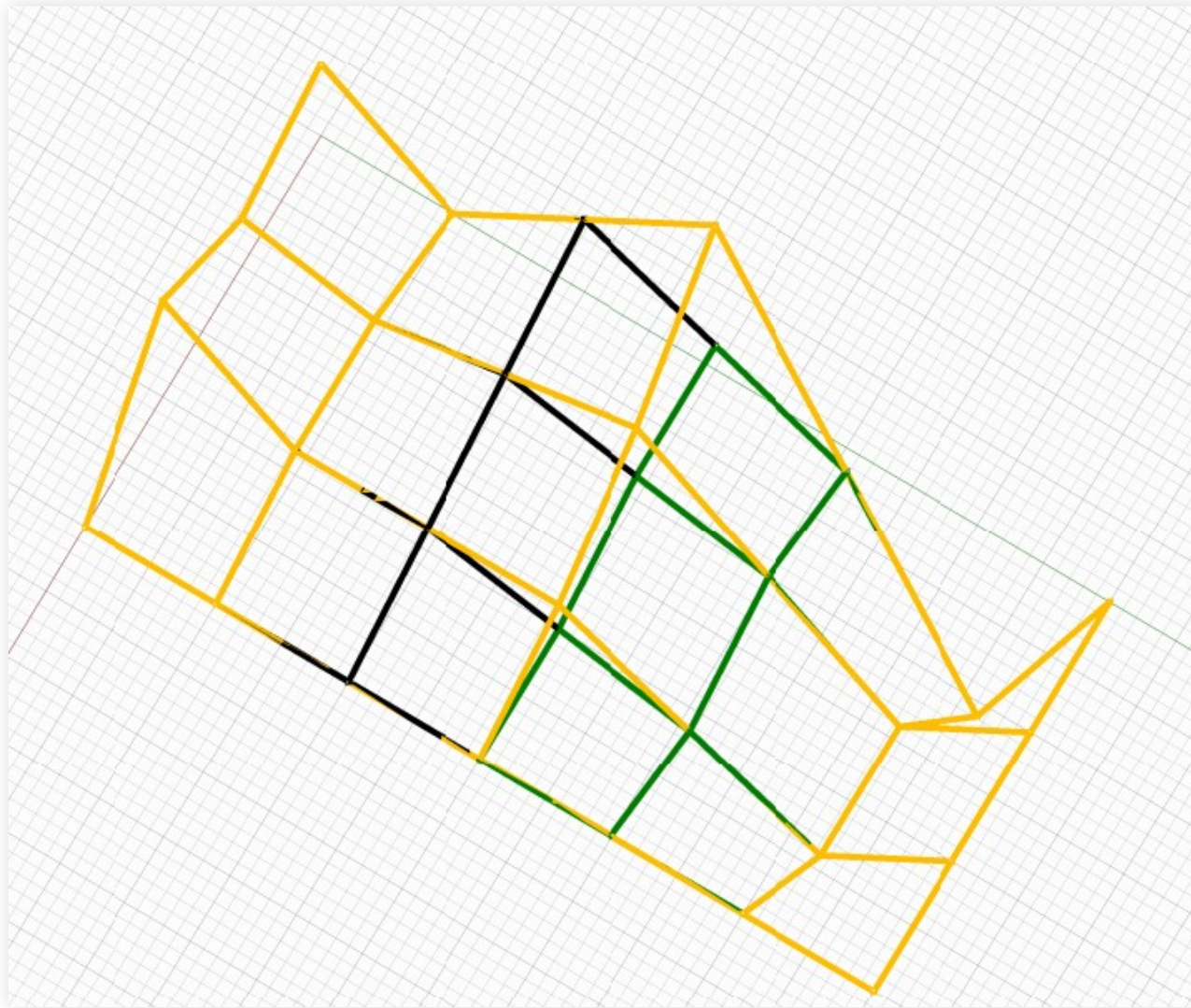
Místo společného uzlu každé řádkové ukotvené kubiky doplnit její řídicí bod (= spojit dvě Bézierovy kubiky do jedné ukotvené kubiky) a odstranit z každé kubiky jeden další bod (pro ukotvenou není řídicí, leží v polovině ramene)

$(0, 0, 3)$ $(0, 1, 0)$ $(0, 2, 3)$ $(0, 3, 1)$ | $(0, 3, 1)$ $(0, 4, -1)$ $(0, 5, -8)$ $(0, 6, 0)$



$(0, 0, 3)$ $(0, 1, 0)$ $(0, 3, 6)$ $(0, 5, -8)$ $(0, 6, 0)$

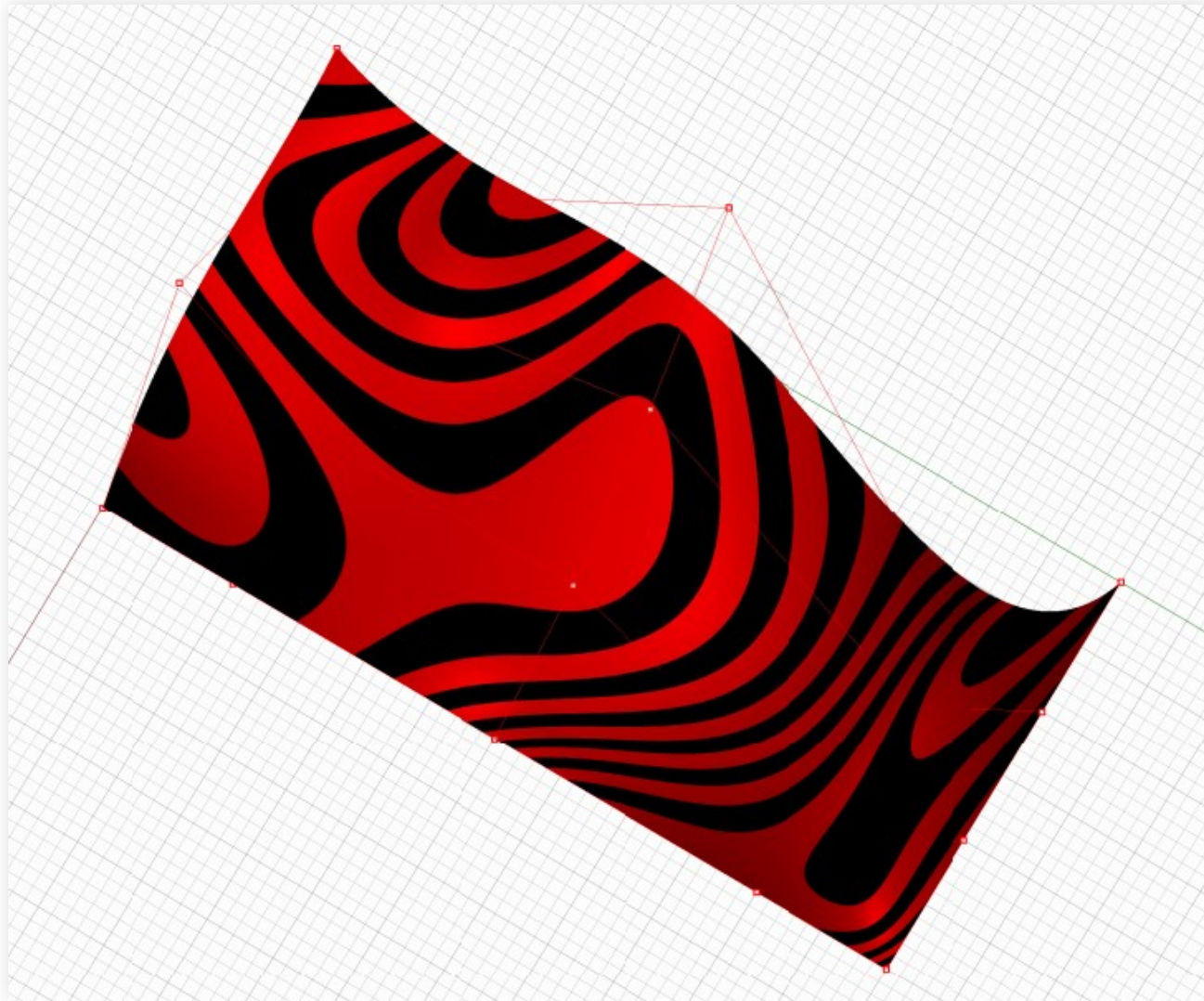
Konstrukce bodů mapy \mathcal{M}_T ukotvené plochy



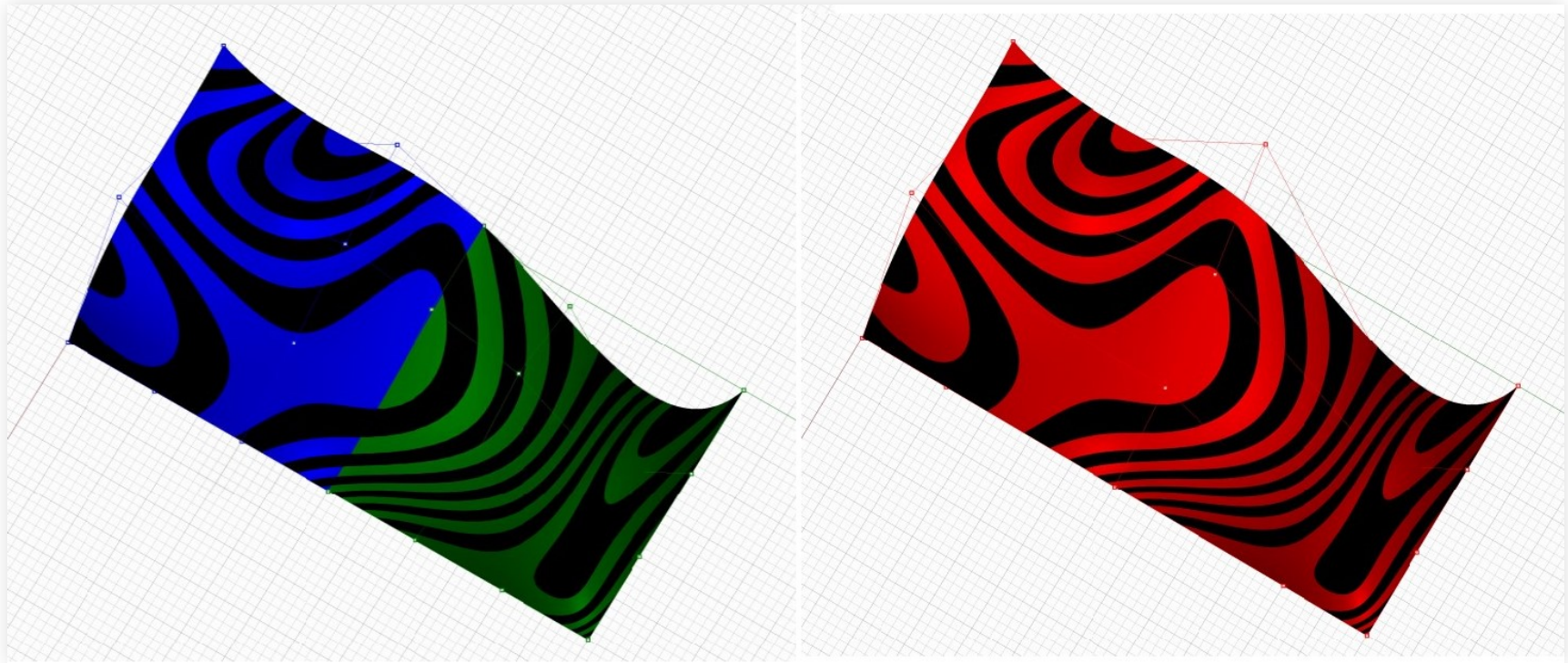
Mapa ukotvené bikubické plochy

$$M_T = \begin{pmatrix} (0, 0, 3) & (0, 1, 0) & (0, 3, 6) & (0, 5, -8) & (0, 6, 0) \\ (1, 0, 2) & (1, 1, 1) & (1, 3, 3) & (1, 5, -3) & (1, 6, 0) \\ (2, 0, 4) & (2, 1, 1) & (2, 3, 1) & (2, 5, -3) & (2, 6, 0) \\ (3, 0, 0) & (3, 1, 0) & (3, 3, 0) & (3, 5, 0) & (3, 6, 0) \end{pmatrix}$$

Ukotvená plocha T



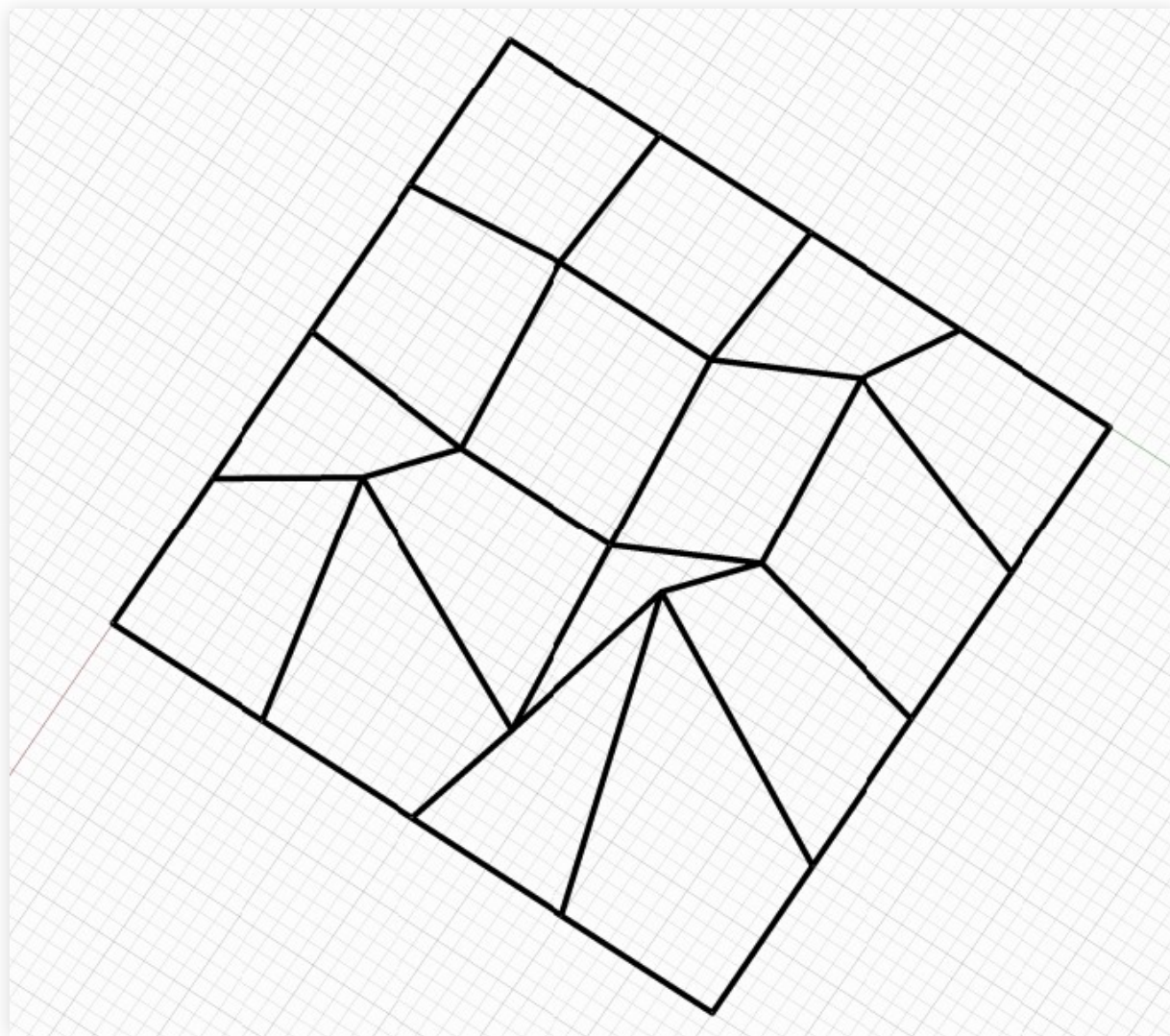
Pláty Béziových ploch a ukotvená plocha T



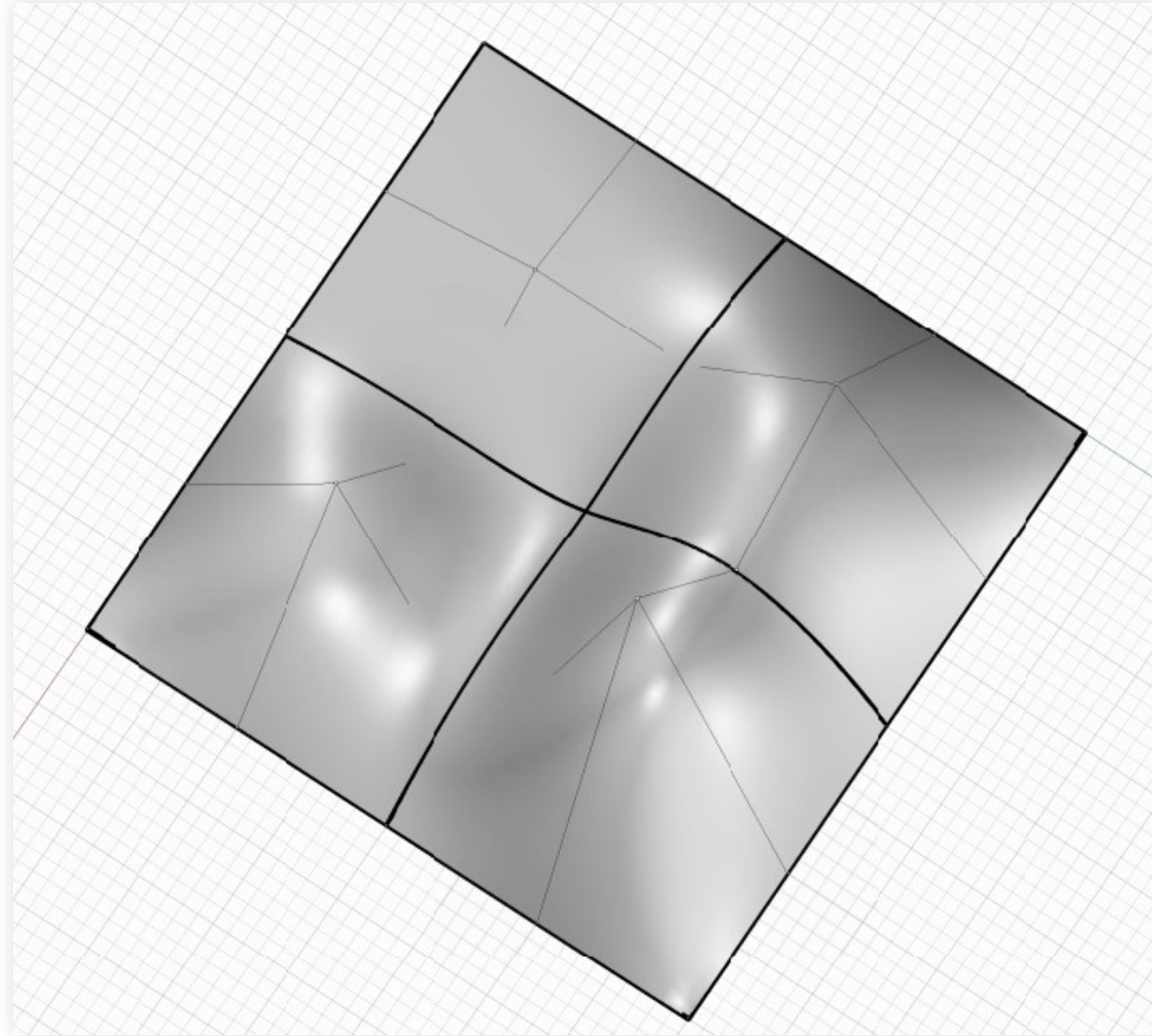
Určete řídicí body jednotlivých plátů Bézierových bikubických ploch, ze kterých je složena ukotvená bikubická B-spline plocha daná mapou M,

$$M = \begin{pmatrix} (0, 0, 0) & (0, 10, 0) & (0, 20, 0) & (0, 30, 0) & (0, 40, 0) \\ (10, 0, 0) & (10, 10, 5) & (10, 20, 5) & (10, 30, 25) & (10, 40, 0) \\ (20, 0, 0) & (20, 10, -5) & (20, 20, -5) & (20, 30, 15) & (20, 40, 0) \\ (30, 0, 0) & (30, 10, 25) & (30, 20, -15) & (30, 30, 45) & (30, 40, 0) \\ (40, 0, 0) & (40, 10, 0) & (40, 20, 0) & (40, 30, 0) & (40, 40, 0) \end{pmatrix}$$

Řídicí síť ukotvené plochy



Ukotvená plocha



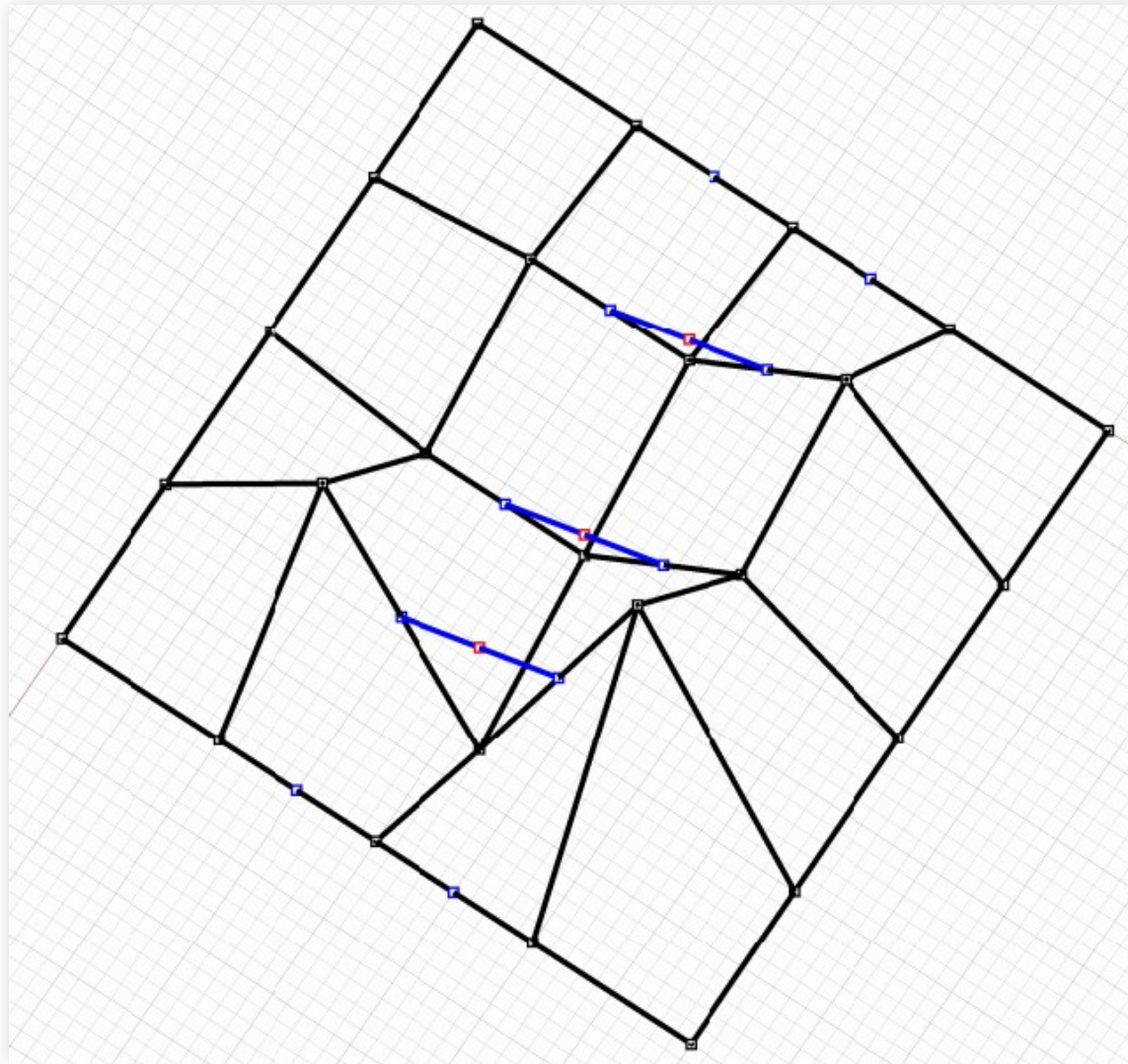
Po řádcích doplnit řídicí body segmentů (jsou to Bézierovy kubiky) ukotvených kubik viz. například druhý řádek

(10, 0, 0) (10, 10, 5) (10, 20, 5) (10, 30, 25) (10, 40, 0)



(10, 0, 0) (10, 10, 5) (10, 15, 5) (10, 20, 10) (10, 25, 15) (10, 30, 25) (10, 40, 0)

Konstrukce řídicích bodů "řádkových" segmentů



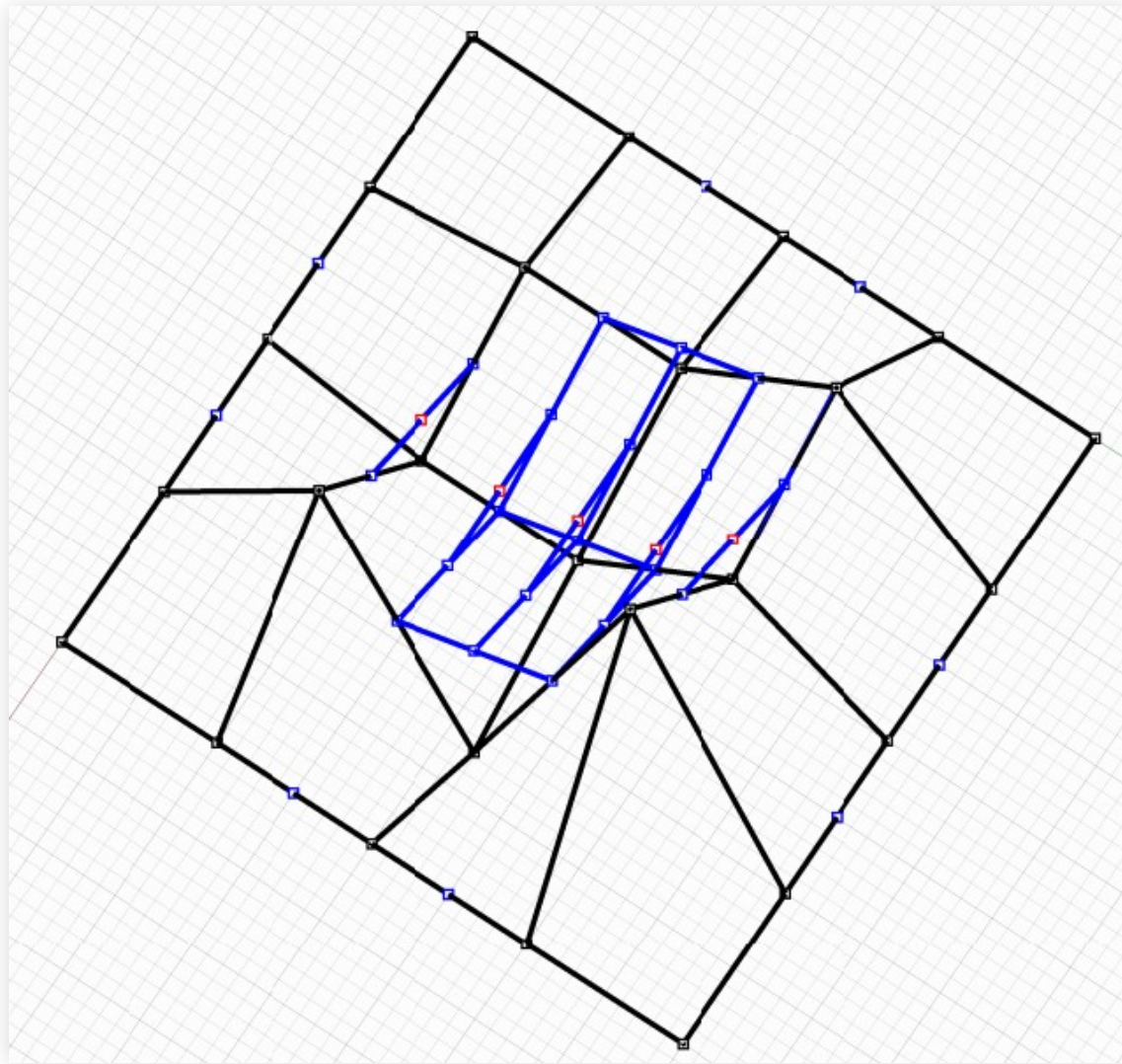
Nová "mapa" plátu je nyní typu 5x7

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} (0, 0, 0) & (0, 10, 0) & (0, 15, 0) & (0, 20, 0) & (0, 25, 0) & (0, 30, 0) \\ (10, 0, 0) & (10, 10, 5) & (10, 15, 5) & (10, 20, 10) & (10, 25, 15) & (10, 30, 15) \\ (20, 0, 0) & (20, 10, -5) & (20, 15, -5) & (20, 20, 0) & (20, 25, 5) & (20, 30, 5) \\ (30, 0, 0) & (30, 10, 25) & (30, 15, 5) & (30, 20, 10) & (30, 25, 15) & (30, 30, 15) \\ (40, 0, 0) & (40, 10, 0) & (40, 15, 0) & (40, 20, 0) & (40, 25, 0) & (40, 30, 0) \end{pmatrix}$$

Stejnou konstrukci nyní provést i pro sloupcové ukotvené kubiky → matice 7x7

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} (0, 0, 0) & (0, 10, 0) & (0, 15, 0) & (0, 20, 0) & (0, 25, 0) & (0, 30, 0) & (0, 40, 0) \\ (10, 0, 0) & (10, 10, 5) & (10, 15, 5) & (10, 20, 10) & (10, 25, 15) & (10, 30, 25) & (10, 40, 0) \\ (15, 0, 0) & (15, 10, 0) & (15, 15, 0) & (15, 20, 5) & (15, 25, 10) & (15, 30, 20) & (15, 40, 0) \\ (20, 0, 0) & (20, 10, 5) & (20, 15, 0) & (20, 20, 5) & (20, 25, 10) & (20, 30, 25) & (20, 40, 0) \\ (25, 0, 0) & (25, 10, 10) & (25, 15, 0) & (25, 20, 5) & (25, 25, 10) & (25, 30, 30) & (25, 40, 0) \\ (30, 0, 0) & (30, 10, 25) & (30, 15, 5) & (30, 20, 10) & (30, 25, 15) & (30, 30, 45) & (30, 40, 0) \\ (40, 0, 0) & (40, 10, 0) & (40, 15, 0) & (40, 20, 0) & (40, 25, 0) & (40, 30, 0) & (40, 40, 0) \end{pmatrix}$$

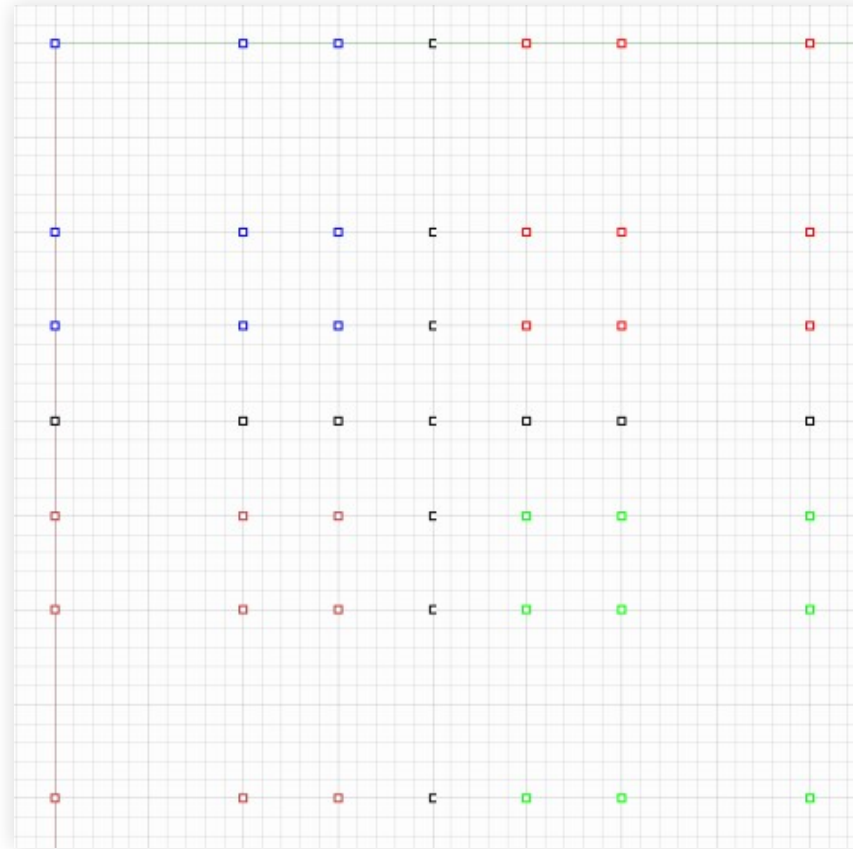
Konstrukce řídicích bodů "sloupcových" segmentů



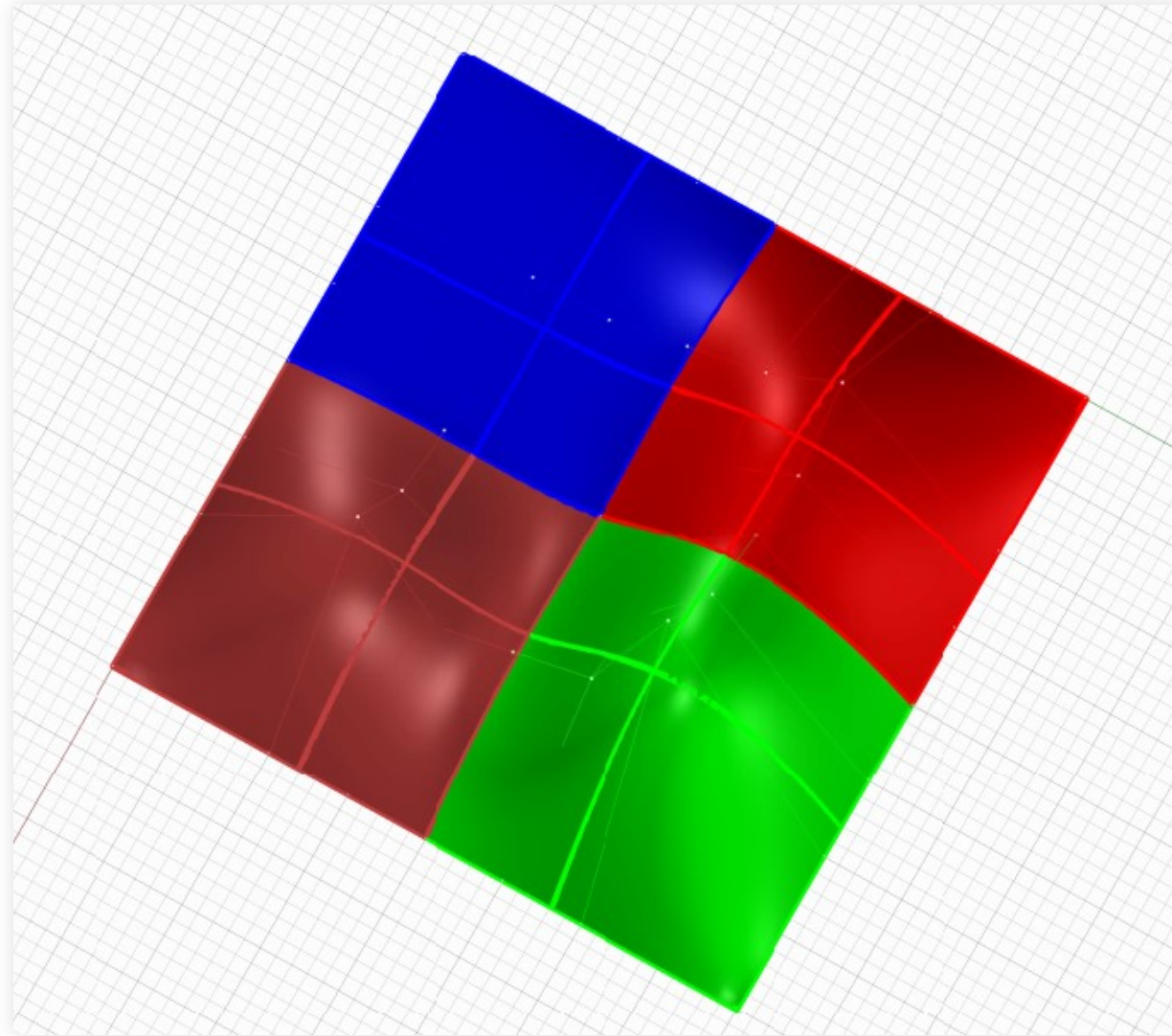
$$\bar{M} = \begin{pmatrix} (0, 0, 0) & (0, 10, 0) & (0, 15, 0) & (0, 20, 0) & (0, 25, 0) & (0, 30, 0) & (0, 40, 0) \\ (10, 0, 0) & (10, 10, 5) & (10, 15, 5) & (10, 20, 10) & (10, 25, 15) & (10, 30, 25) & (10, 40, 0) \\ (15, 0, 0) & (15, 10, 0) & (15, 15, 0) & (15, 20, 5) & (15, 25, 10) & (15, 30, 20) & (15, 40, 0) \\ (20, 0, 0) & (20, 10, 5) & (20, 15, 0) & (20, 20, 5) & (20, 25, 10) & (20, 30, 25) & (20, 40, 0) \\ (25, 0, 0) & (25, 10, 10) & (25, 15, 0) & (25, 20, 5) & (25, 25, 10) & (25, 30, 30) & (25, 40, 0) \\ (30, 0, 0) & (30, 10, 25) & (30, 15, 5) & (30, 20, 10) & (30, 25, 15) & (30, 30, 45) & (30, 40, 0) \\ (40, 0, 0) & (40, 10, 0) & (40, 15, 0) & (40, 20, 0) & (40, 25, 0) & (40, 30, 0) & (40, 40, 0) \end{pmatrix}$$

"Rohové" matice 4x4 vybrané z matice \bar{M} jsou mapy plátů jednotlivých Bézierových bikubických ploch, které jsou na sebe napojené s C^2 spojitostí a tvoří segmenty původní ukotvené bikubické B-spline plochy.

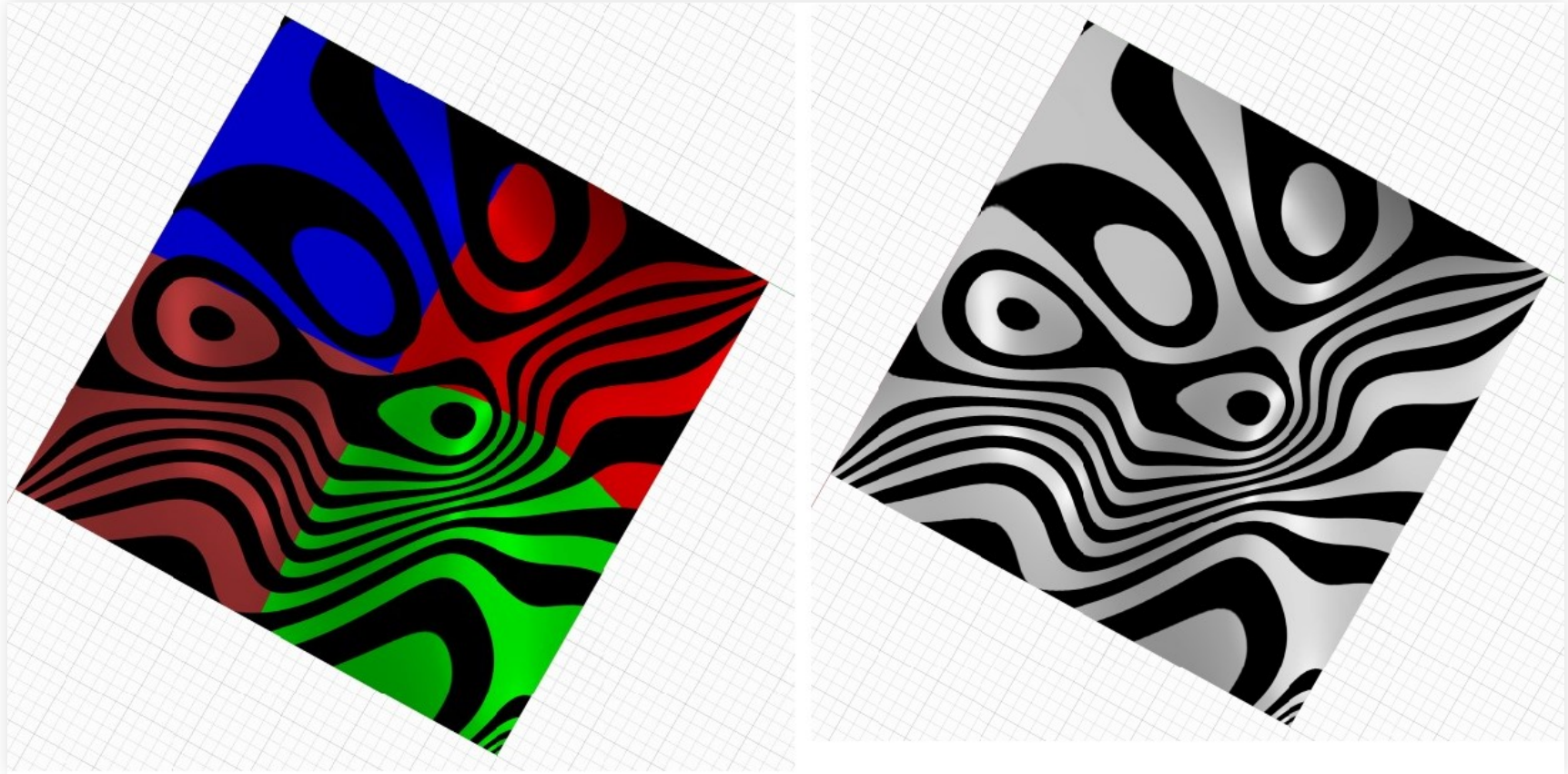
"Mapa" napojených plátů Bézierových bikubických ploch



Pláty Bézierových bikubických ploch

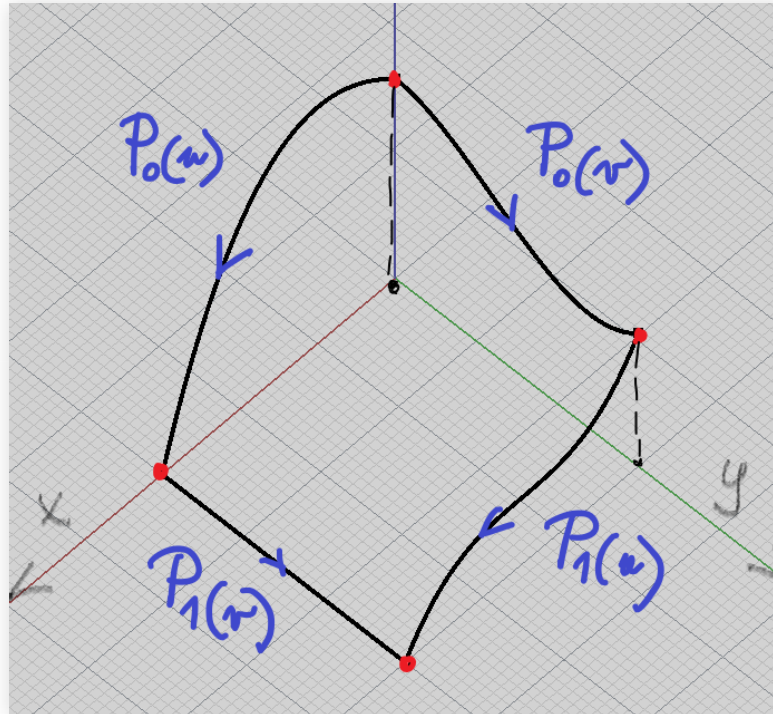


Kontrola spojitosti plátů a srovnání s ukotvenou plochou



interpolační plocha

Dáno: okrajové křivky $P_0(u)$, $P_1(u)$, $P_0(v)$, $P_1(v)$
- tzv. **křivočarý čtyřúhelník**



COONSOVA BILINEÁRNÍ PLOCHA

Vektorová rovnice:

$$P(u, v) = (1 - u, 1, u) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ 1 \\ v \end{pmatrix}; (u, v) \in [0, 1]^2$$

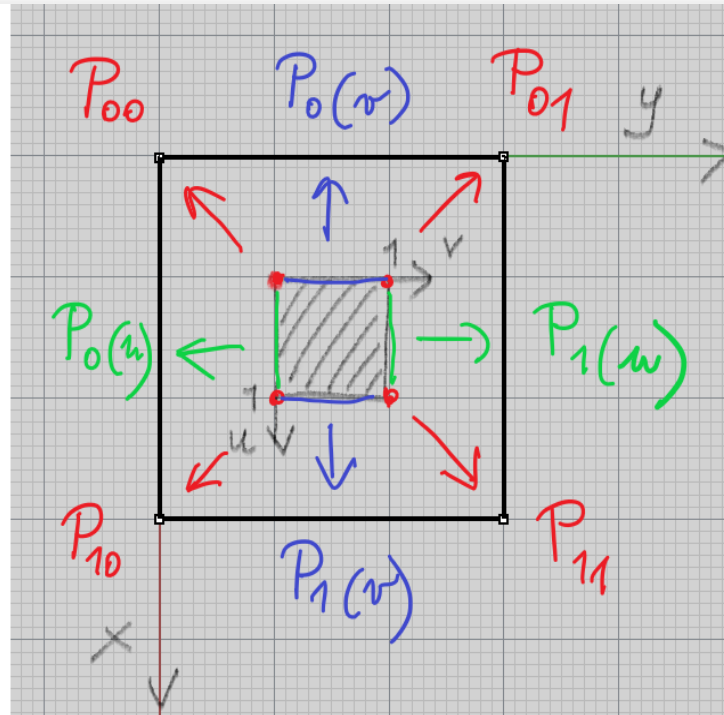
Mapa plátu:

$$M = \begin{pmatrix} -P_{00} & P_0(v) & -P_{01} \\ P_0(u) & \vec{o} & P_1(u) \\ -P_{10} & P_1(v) & -P_{11} \end{pmatrix}$$

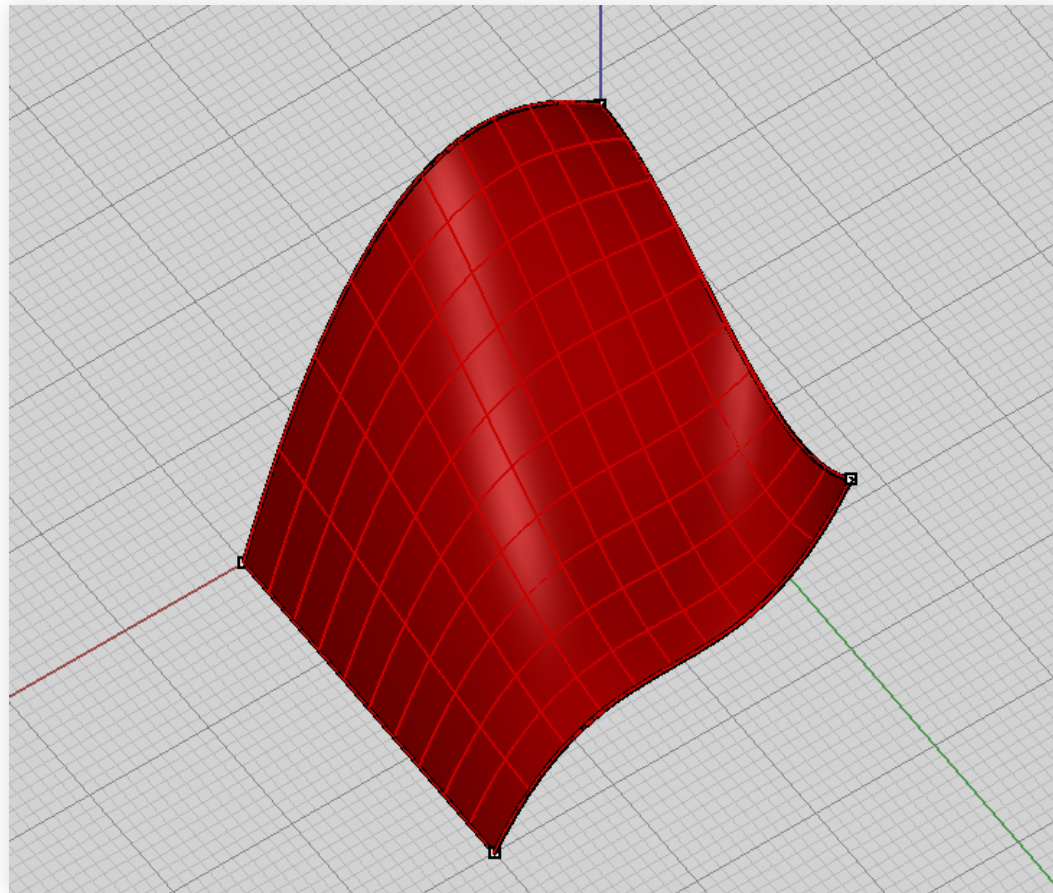
COONSOVA BILINEÁRNÍ PLOCHA

Mapa plátu:

$$M = \begin{pmatrix} -P_{00} & P_0(v) & -P_{01} \\ P_0(u) & \vec{o} & P_1(u) \\ -P_{10} & P_1(v) & -P_{11} \end{pmatrix}$$



COONSOVA BILINEÁRNÍ PLOCHA



COONSOVA BILINEÁRNÍ PLOCHA - VLASTNOSTI

- interpoluje dané 4 okraje
- interpoluje rohy plátu

COONSOVA BILINEÁRNÍ → BÉZIEROVA

COONSOVA BILINEÁRNÍ PLOCHA

mapa plátu

$$M = \begin{pmatrix} -P_{0,0} & P_0(v) & -P_{0,1} \\ P_0(u) & \vec{0} & P_1(u) \\ -P_{1,0} & P_1(v) & -P_{1,1} \end{pmatrix}$$

COONSOVA BILINEÁRNÍ PLOCHA

okrajové křivky - Bézierovy kubiky

$$M = \begin{pmatrix} -V_{0,0} & P_0(v) & -V_{0,3} \\ P_0(u) & \vec{0} & P_1(u) \\ -V_{3,0} & P_1(v) & -V_{3,3} \end{pmatrix}$$

COONSOVA BILINEÁRNÍ PLOCHA



BÉZIEROVA BIKUBICKÁ PLOCHA

?

BÉZIEROVA PLOCHA

mapa plátu

$$M = \begin{pmatrix} V_{0,0} & V_{0,1} & V_{0,2} & V_{0,3} \\ V_{1,0} & ? & ? & V_{1,3} \\ V_{2,0} & ? & ? & V_{2,3} \\ V_{3,0} & V_{3,1} & V_{3,2} & V_{3,3} \end{pmatrix}$$

COONSOVA BILINEÁRNÍ \rightarrow BÉZIEROVA

Postup - teorie:

- vektory zkrutu Coonsovy bilineární plochy získat výpočtem (konkrétní vektor v každém rohu)
- vyjádřit vektory zkrutu v rozích Bézierovy plochy (obecně, ve vyjádřeních figurují vnitřní body sítě)
- porovnat dva zkruty (Coons = Bézier) v každém rohu
- z rovnic vyjádřit neznámé vnitřní body sítě

COONSOVA BILINEÁRNÍ → BÉZIEROVA BIKUBICKÁ

Postup - praxe:

- vektory zkrutu Coonsovy bilineární plochy (rohy):

$$P^{uv}(0, 0), P^{uv}(0, 1), P^{uv}(1, 0), P^{uv}(1, 1)$$

- vektory zkrutu Bézierovy plochy (obecně)

$$P^{uv}(u, v) = \mathcal{B}'(u) \cdot M \cdot \mathcal{B}'(v)$$

kde

$$\mathcal{B}'(u) = (B'_{03}(u), B'_{13}(u), B'_{23}(u), B'_{33}(u))$$

$$\mathcal{B}'(v) = (B'_{03}(v), B'_{13}(v), B'_{23}(v), B'_{33}(v))^T$$

- konkrétně v rozích

$$\mathcal{B}'(0) = (-3, 3, 0, 0), \mathcal{B}'(1) = (0, 0, -3, 3)$$

COONSOVA BILINEÁRNÍ → BÉZIEROVA BIKUBICKÁ

Roh $P_{0,0}$

- vektor zkrutu Bézierovy plochy:

$$P^{uv}(0,0) = (-3, 3, 0, 0) \cdot M \cdot (-3, 3, 0, 0)^T$$

↓

$$P^{uv}(0,0) = 9V_{0,0} - 9V_{1,0} - 9V_{0,1} + 9V_{1,1}$$

↓

$$V_{1,1} = \frac{1}{9}P^{uv}(0,0) - V_{0,0} + V_{1,0} + V_{0,1}$$

↓

$$V_{1,1} = \frac{1}{9}P^{uv}(0,0) - V_{0,0} + V_{1,0} + V_{0,1} + (V_{0,0} - V_{0,0})$$

↓

1

→

→

COONSOVA BILINEÁRNÍ \rightarrow BÉZIEROVA BIKUBICKÁ

Roh $P_{0,0}$

- pomocí vektoru zkrutu a tečných vektorů Coonsovy bilineární plochy:

$$V_{1,1} = \frac{1}{9}P^{uv}(0,0) + V_{0,0} + V_{0,0}\vec{V}_{1,0} + V_{0,0}\vec{V}_{0,1}$$

\Downarrow

$$V_{1,1} = \frac{1}{9}P^{uv}(0,0) + V_{0,0} + \frac{1}{3}P^u(0,0) + \frac{1}{3}P^v(0,0)$$

COONSOVA BILINEÁRNÍ \rightarrow BÉZIEROVA BIKUBICKÁ

Roh $P_{1,0}$

- vektor zkrutu Bézierovy plochy:

$$P^{uv}(1, 0) = (0, 0, -3, 3) \cdot M \cdot (-3, 3, 0, 0)^T$$

\Downarrow

$$P^{uv}(1, 0) = 9V_{2,0} - 9V_{3,0} - 9V_{2,1} + 9V_{3,1}$$

\Downarrow

$$V_{2,1} = -\frac{1}{9}P^{uv}(1, 0) - V_{3,0} + V_{2,0} + V_{3,1}$$

\Downarrow

$$V_{2,1} = -\frac{1}{9}P^{uv}(1, 0) - V_{3,0} + V_{2,0} + V_{3,1} + (V_{3,0} - V_{3,0})$$

\Downarrow

1

\rightarrow

\rightarrow

COONSOVA BILINEÁRNÍ \rightarrow BÉZIEROVA BIKUBICKÁ

Roh $P_{1,0}$

- pomocí vektoru zkrutu a tečných vektorů Coonsovy bilineární plochy:

$$V_{2,1} = -\frac{1}{9}P^{uv}(1,0) + V_{3,0} + V_{3,0}\vec{V}_{2,0} + V_{3,0}\vec{V}_{3,1}$$

\Downarrow

$$V_{2,1} = -\frac{1}{9}P^{uv}(1,0) + V_{3,0} - \frac{1}{3}P^u(1,0) + \frac{1}{3}P^v(1,0)$$

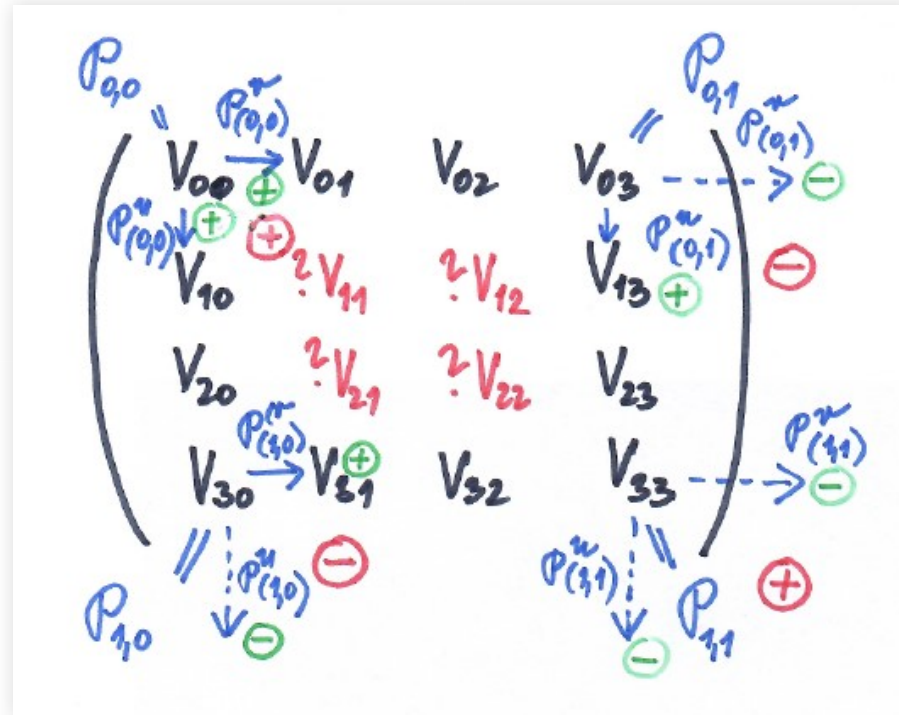
COONSOVA BILINEÁRNÍ → BÉZIEROVA BIKUBICKÁ

Podobně ve zbylých rozích:

$$\begin{aligned}V_{1,1} &= V_{0,0} + \frac{1}{3}P^u(0,0) + \frac{1}{3}P^v(0,0) + \frac{1}{9}P^{uv}(0,0) \\V_{2,1} &= V_{3,0} - \frac{1}{3}P^u(1,0) + \frac{1}{3}P^v(1,0) - \frac{1}{9}P^{uv}(1,0) \\V_{1,2} &= V_{0,3} + \frac{1}{3}P^u(0,1) - \frac{1}{3}P^v(0,1) - \frac{1}{9}P^{uv}(0,1) \\V_{2,2} &= V_{3,3} - \frac{1}{3}P^u(1,1) - \frac{1}{3}P^v(1,1) + \frac{1}{9}P^{uv}(1,1)\end{aligned}$$

COONSOVA BILINEÁRNÍ → BÉZIEROVA BIKUBICKÁ

Pomocné schema pro určení znamének:



PŘÍMKOVÁ PŘECHODOVÁ PLOCHA HYPERBOLICKÝ PARABOLOID